FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 1

1. (10 PUNTOS)

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $20\ libras$, se cobra $\$1.80$ por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $30\ libras$, se cobra $\$1.10$ por cada $libra$ más un recargo de $\$15$ por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$\boldsymbol{C(x) = \begin{cases} 1.80x\,, & 0 \le x < 20 \\ mx + b\,, & 20 \le x < 30 \\ 1.10x + 15\,, & x \ge 30 \end{cases}}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

Solución:

La constante m representa el cobro en $dólares$ por cada $libra$ facturada de producto que pertenece al intervalo $[20, 30)$ y la constante b representa un recargo por el envío del producto a domicilio.

Para que la función C sea continua en $x = 20$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 20^+} C(x) = \lim_{x \to 20^-} C(x)$$

$$\lim_{x \to 20^+} (mx + b) = \lim_{x \to 20^-} (1.80x)$$

$$20m + b = 36$$

Para que la función C sea continua en $x = 30$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 30^-} C(x) = \lim_{x \to 30^+} C(x)$$

$$\lim_{x \to 30^-} (mx + b) = \lim_{x \to 30^+} (1.10x + 15)$$

$$30m + b = 48$$

Se debe resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 20m + b = 36 \\ 30m + b = 48 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por (-1) y sumarla a la segunda ecuación se obtiene:

$$30m - 20m = 48 - 36 \quad \rightarrow \quad 10m = 12 \quad \rightarrow \quad m = 1.20$$

Se podría reemplazar este valor en la primera ecuación y obtener:

$$b = 36 - 20m = 36 - 20(1.20) = 36 - 24 = 12$$

Por lo tanto, para que la función C sea siempre continua, debe cumplirse que:

$$\boxed{(m = 1.20\ \ dólares/libra) \wedge (b = 12\ dólares)}$$

2. **(10 PUNTOS)**

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $20\ libras$, se cobra $\$1.70$ por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $30\ libras$, se cobra $\$1.10$ por cada $libra$ más un recargo de $\$15$ por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$\boldsymbol{C(x) = \begin{cases} 1.70x\,, & 0 \le x < 20 \\ mx + b\,, & 20 \le x < 30 \\ 1.10x + 15\,, & x \ge 30 \end{cases}}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

Solución:

La constante m representa el cobro en $dólares$ por cada $libra$ facturada de producto que pertenece al intervalo $[20, 30)$ y la constante b representa el recargo por el envío del producto a domicilio.

Para que la función C sea continua en $x = 20$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 20^+} C(x) = \lim_{x \to 20^-} C(x)$$

$$\lim_{x \to 20^+} (mx + b) = \lim_{x \to 20^-} (1.70x)$$

$$20m + b = 34$$

Para que la función C sea continua en $x = 30$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 30^-} C(x) = \lim_{x \to 30^+} C(x)$$

$$\lim_{x \to 30^-}(mx + b) = \lim_{x \to 30^+}(1.10x + 15)$$

$$30m + b = 48$$

Se debe resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 20m + b = 34 \\ 30m + b = 48 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por (-1) y sumarla a la segunda ecuación se obtiene:

$$30m - 20m = 48 - 34 \quad \rightarrow \quad 10m = 14 \quad \rightarrow \quad m = 1.40$$

Se podría reemplazar este valor en la primera ecuación y obtener:

$$b = 34 - 20m = 34 - 20(1.40) = 34 - 28 = 6$$

Por lo tanto, para que la función C sea siempre continua, debe cumplirse que:

$$\boxed{(m = 1.40\ \ dólares/libra) \wedge (b = 6\ dólares)}$$

3. (10 PUNTOS)

Se cobra C $dólares$ al facturar y enviar a domicilio x $libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a 30 $libras$, se cobra $\$2.10$ por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 $libras$, se cobra $\$1.30$ por cada $libra$ más un recargo de $\$25$ por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.10x\,, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b\,, & 30 \leq x < 40 \\ 1.30x + 25\,, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

Solución:

La constante m representa el cobro en $dólares$ por cada $libra$ facturada de producto que pertenece al intervalo $[30, 40)$ y la constante b representa el recargo por el envío del producto a domicilio.

Para que la función C sea continua en $x = 30$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 30^+} C(x) = \lim_{x \to 30^-} C(x)$$

$$\lim_{x \to 30^+}(mx + b) = \lim_{x \to 30^-}(2.10x)$$

$$30m + b = 63$$

Para que la función C sea continua en $x = 40$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 40^-} C(x) = \lim_{x \to 40^+} C(x)$$

$$\lim_{x \to 40^-}(mx + b) = \lim_{x \to 40^+}(1.30x + 25)$$

$$40m + b = 77$$

Se debe resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 30m + b = 63 \\ 40m + b = 77 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por (-1) y sumarla a la segunda ecuación se obtiene:

$$40m - 30m = 77 - 63 \quad \rightarrow \quad 10m = 14 \quad \rightarrow \quad m = 1.40$$

Se podría reemplazar este valor en la primera ecuación y obtener:

$$b = 63 - 30m = 63 - 30(1.40) = 63 - 42 = 21$$

Por lo tanto, para que la función C sea siempre continua, debe cumplirse que:

$$\boxed{(m = 1.40\ \ dólares/libra) \wedge (b = 21\ dólares)}$$

4. (10 PUNTOS)

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $30\ libras$, se cobra $\$1.90$ por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $40\ libras$, se cobra $\$1.05$ por cada $libra$ más un recargo de $\$30$ por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$\boldsymbol{C(x) = \begin{cases} 1.90x\,, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b\,, & 30 \leq x < 40 \\ 1.05x + 30\,, & x \geq 40 \end{cases}}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

Solución:

La constante m representa el cobro en $dólares$ por cada $libra$ facturada de producto que pertenece al intervalo $[30, 40)$ y la constante b representa el recargo por el envío del producto a domicilio.

Para que la función C sea continua en $x = 30$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 30^+} C(x) = \lim_{x \to 30^-} C(x)$$
$$\lim_{x \to 30^+} (mx + b) = \lim_{x \to 30^-} (1.90x)$$
$$30m + b = 57$$

Para que la función C sea continua en $x = 40$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 40^-} C(x) = \lim_{x \to 40^+} C(x)$$
$$\lim_{x \to 40^-} (mx + b) = \lim_{x \to 40^+} (1.05x + 30)$$
$$40m + b = 72$$

Se debe resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 30m + b = 57 \\ 40m + b = 72 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por (-1) y sumarla a la segunda ecuación se obtiene:

$$40m - 30m = 72 - 57 \quad \rightarrow \quad 10m = 15 \quad \rightarrow \quad m = 1.50$$

Se podría reemplazar este valor en la primera ecuación y obtener:

$$b = 57 - 30m = 57 - 30(1.50) = 57 - 45 = 12$$

Por lo tanto, para que la función C sea siempre continua, debe cumplirse que:

$$\boxed{(m = 1.50\ \ dólares/libra) \wedge (b = 12\ dólares)}$$

5. (10 PUNTOS)

Se cobra $C\ dólares$ al facturar y enviar a domicilio $x\ libras$ de un producto. Si la cantidad no llega a $20\ libras$, se cobra $\$2.20$ por cada $libra$ sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las $40\ libras$, se cobra $\$1.05$ por cada $libra$ más un recargo de $\$34$ por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$\boldsymbol{C(x) = \begin{cases} 2.20x\,, & 0 \le x < 20 \\ mx + b\,, & 20 \le x < 40 \\ 1.05x + 34\,, & x \ge 40 \end{cases}}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C, y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

Solución:

La constante m representa el cobro en $dólares$ por cada $libra$ facturada de producto que pertenece al intervalo $[20, 40)$ y la constante b representa el recargo por el envío del producto a domicilio.

Para que la función C sea continua en $x = 20$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 20^+} C(x) = \lim_{x \to 20^-} C(x)$$

$$\lim_{x \to 20^+}(mx + b) = \lim_{x \to 20^-}(2.20x)$$

$$20m + b = 44$$

Para que la función C sea continua en $x = 40$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 40^-} C(x) = \lim_{x \to 40^+} C(x)$$

$$\lim_{x \to 40^-}(mx + b) = \lim_{x \to 40^+}(1.05x + 34)$$

$$40m + b = 76$$

Se debe resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 20m + b = 44 \\ 40m + b = 76 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por (-1) y sumarla a la segunda ecuación se obtiene:

$$40m - 20m = 76 - 44 \quad \rightarrow \quad 20m = 32 \quad \rightarrow \quad m = 1.60$$

Se podría reemplazar este valor en la primera ecuación y obtener:

$$b = 44 - 20m = 44 - 20(1.60) = 44 - 32 = 12$$

Por lo tanto, para que la función C sea siempre continua, debe cumplirse que:

$$\boxed{(m = 1.60\ \ dólares/libra) \wedge (b = 12\ dólares)}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 2

6. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 5x + 2 \quad ; \quad x \leq -\frac{5}{2}}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa $\boldsymbol{f^{-1}}$ en el punto cuya abscisa es $\boldsymbol{-2}$.

Solución:

Si $P_1\ (a, b) \in f$ y $P_2\ (b, a) \in f^{-1}$, entonces se cumple que:

$$\begin{gathered} a = f^{-1}(b) \\ a = f^{-1}(-2) \\ f(a) = f(f^{-1}(-2)) \\ f(a) = -2 \end{gathered}$$

Luego, se determina el valor de a:

$$\begin{gathered} a^2 + 5a + 2 = -2 \\ a^2 + 5a + 4 = 0 \\ (a+1)(a+4) = 0 \\ (a+1=0) \vee (a+4=0) \\ (a=-1) \vee (a=-4) \end{gathered}$$

Tomando en cuenta el dominio para la función f, se concluye que:

$$P_2\ (-2, -4) \in f^{-1}$$

Se calcula la pendiente de la recta tangente m_T, con base en el TEOREMA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS, obteniendo previamente la expresión de la derivada de la función $f'(x) = 2x + 5$.

$$m_T = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$
$$m_T = (f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-4)}$$
$$m_T = \frac{1}{2(-4)+5} = -\frac{1}{3}$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_T(x - b)$$

$$\boxed{y + 4 = -\frac{1}{3}(x + 2)}$$

Se calcula la pendiente de la recta normal m_N , considerando la perpendicularidad de ambas rectas:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{-}\frac{1}{3}} = 3$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_N(x - b)$$

$$\boxed{y + 4 = 3(x + 2)}$$

7. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$\boldsymbol{f(x) = -x^2 - 3x - 2 \quad ; \quad x \le -\frac{3}{2}}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa $\boldsymbol{f^{-1}}$ en el punto cuya abscisa es $\boldsymbol{-2}$.

Solución:

Si $P_1\ (a, b) \in f$ y $P_2\ (b, a) \in f^{-1}$, entonces se cumple que:

$$a = f^{-1}(b)$$
$$a = f^{-1}(-2)$$
$$f(a) = f(f^{-1}(-2))$$
$$f(a) = -2$$

Luego, se determina el valor de a:

$$
\begin{gathered}
-a^2 - 3a - \cancel{2} = -\cancel{2} \\
a^2 + 3a = 0 \\
a(a+3) = 0 \\
(a = 0) \vee (a + 3 = 0) \\
(a = 0) \vee (a = -3)
\end{gathered}
$$

Tomando en cuenta el dominio para la función f, se concluye que:

$$P_2\,(-2, -3) \in f^{-1}$$

Se calcula la pendiente de la recta tangente m_T, con base en el TEOREMA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS, obteniendo previamente la expresión de la derivada de la función $f'(x) = -2x - 3$.

$$
\begin{aligned}
m_T &= (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \\
m_T &= (f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-3)} \\
m_T &= \frac{1}{-2(-3) - 3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_T(x - b)$$

$$\boxed{y + 3 = \frac{1}{3}(x + 2)}$$

Se calcula la pendiente de la recta normal m_N , considerando la perpendicularidad de ambas rectas:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_N(x - b)$$

$$\boxed{y + 3 = -3(x + 2)}$$

8. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 3 \quad ; \quad x \leq -\frac{1}{2}}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa $\boldsymbol{f^{-1}}$ en el punto cuya abscisa es $\boldsymbol{-1}$.

Solución:

Si $P_1\ (a,b) \in f$ y $P_2\ (b,a) \in f^{-1}$, entonces se cumple que:

$$\begin{gathered} a = f^{-1}(b) \\ a = f^{-1}(-1) \\ f(a) = f(f^{-1}(-1)) \\ f(a) = -1 \end{gathered}$$

Luego, se determina el valor de a:

$$\begin{gathered} a^2 + a - 3 = -1 \\ a^2 + a - 2 = 0 \\ (a+2)(a-1) = 0 \\ (a+2=0) \vee (a-1=0) \\ (a=-2) \vee (a=1) \end{gathered}$$

Tomando en cuenta el dominio para la función f, se concluye que:

$$P_2\ (-1,-2) \in f^{-1}$$

Se calcula la pendiente de la recta tangente m_T, con base en el TEOREMA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS, obteniendo previamente la expresión de la derivada de la función $f'(x) = 2x + 1$.

$$\begin{gathered} m_T = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \\ m_T = (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(-2)} \\ m_T = \frac{1}{2(-2)+1} = -\frac{1}{3} \end{gathered}$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_T(x - b)$$

$$\boxed{y+2=-\frac{1}{3}(x+1)}$$

Se calcula la pendiente de la recta normal m_N , considerando la perpendicularidad de ambas rectas:

$$m_N=-\frac{1}{m_T}=\cancel{-}\frac{1}{\cancel{-}\frac{1}{3}}=3$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a f^{-1} en P_2 es:

$$y-a=m_N(x-b)$$

$$\boxed{y+2=3(x+1)}$$

9. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2-4x-5 \quad ; \quad x\leq -2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -5.

Solución:

Si $P_1\,(a,b)\in f$ y $P_2\,(b,a)\in f^{-1}$, entonces se cumple que:

$$\begin{gathered}a=f^{-1}(b)\\ a=f^{-1}(-5)\\ f(a)=f(f^{-1}(-5))\\ f(a)=-5\end{gathered}$$

Luego, se determina el valor de a:

$$\begin{gathered}-a^2-4a-\cancel{5}=-\cancel{5}\\ a^2+4a=0\\ a(a+4)=0\\ (a=0)\vee(a+4=0)\\ (a=0)\vee(a=-4)\end{gathered}$$

Tomando en cuenta el dominio para la función f, se concluye que:

$$P_2\,(-5,-4)\in f^{-1}$$

Se calcula la pendiente de la recta tangente m_T, con base en el TEOREMA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS, obteniendo previamente la expresión de la derivada de la función $f'(x) = -2x - 4$.

$$m_T = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$
$$m_T = (f^{-1})'(-5) = \frac{1}{f'(-4)}$$
$$m_T = \frac{1}{-2(-4) - 4} = \frac{1}{4}$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_T(x - b)$$

$$\boxed{y + 4 = \frac{1}{4}(x + 5)}$$

Se calcula la pendiente de la recta normal m_N , considerando la perpendicularidad de ambas rectas:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_N(x - b)$$

$$\boxed{y + 4 = -4(x + 5)}$$

10. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 7x + 3 \quad ; \quad x \leq \frac{7}{2}}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa $\boldsymbol{f^{-1}}$ en el punto cuya abscisa es $\boldsymbol{-3}$.

Solución:

Si $P_1\ (a, b) \in f$ y $P_2\ (b, a) \in f^{-1}$, entonces se cumple que:

$$a = f^{-1}(b)$$

$$a = f^{-1}(-3)$$
$$f(a) = f(f^{-1}(-3))$$
$$f(a) = -3$$

Luego, se determina el valor de a:

$$a^2 - 7a + 3 = -3$$
$$a^2 - 7a + 6 = 0$$
$$(a-1)(a-6) = 0$$
$$(a-1=0) \vee (a-6=0)$$
$$(a=1) \vee (a=6)$$

Tomando en cuenta el dominio para la función f, se concluye que:

$$P_2\,(-3,1) \in f^{-1}$$

Se calcula la pendiente de la recta tangente m_T, con base en el TEOREMA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS, obteniendo previamente la expresión de la derivada de la función $f'(x) = 2x - 7$.

$$m_T = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$
$$m_T = (f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(1)}$$
$$m_T = \frac{1}{2(1) - 7} = -\frac{1}{5}$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_T(x - b)$$

$$\boxed{y - 1 = -\frac{1}{5}(x + 3)}$$

Se calcula la pendiente de la recta normal m_N , considerando la perpendicularidad de ambas rectas:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{-}\frac{1}{5}} = 5$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a f^{-1} en P_2 es:

$$y - a = m_N(x - b)$$

$$\boxed{y - 1 = 5(x + 3)}$$

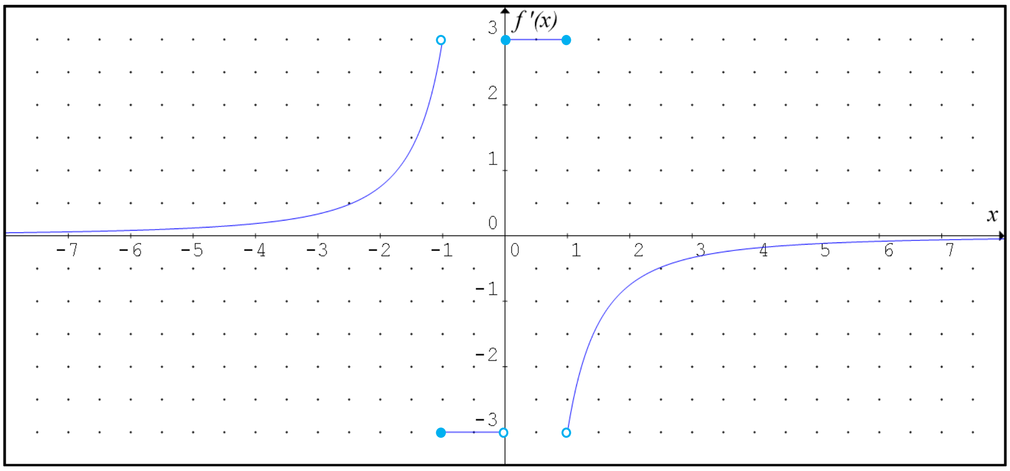
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 3

11. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x > N \Rightarrow \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right]$

(c) $\forall x \in [0,1]$ **, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que** $\int_0^1 f(x)dx = 2.$

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

Solución:

Según la gráfica dada de f':

$$\forall x \in (-\infty, -1) \cup [0,1]\ , f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ es estrictamente creciente}$$
$$\forall x \in [-1, 0) \cup (1, +\infty)\ , f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Según las condiciones dadas:

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad P(0,1) \in f$, dado que f es continua.

(b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}$ *es una asíntota horizontal.*

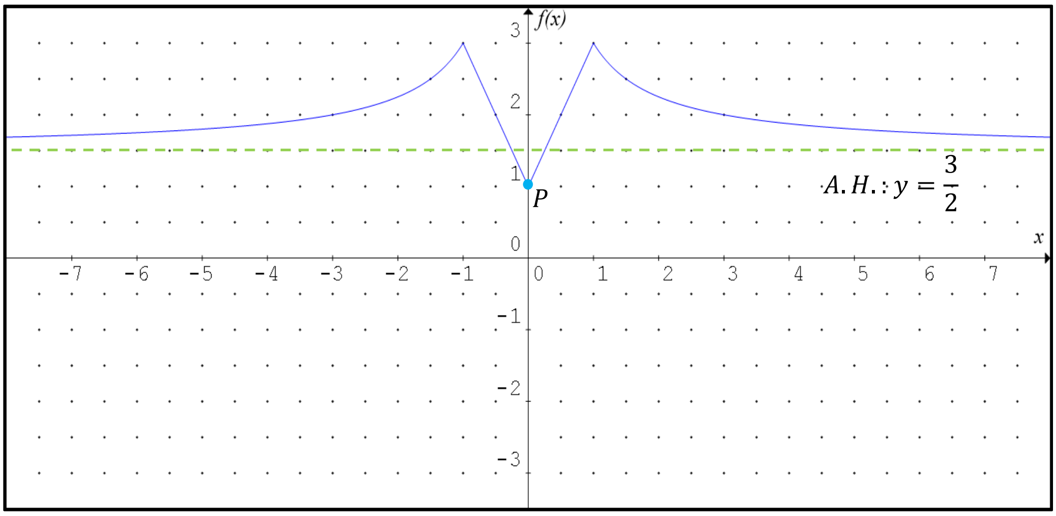
(c) El tramo lineal debe tener la forma $y = mx + b$, pero se conoce que $f(0) = 1$, lo cual nos permite concluir que $y = mx + 1$. Adicionalmente:

$$\int_0^1 (mx+1)dx = 2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{m}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{m}{2} + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad m = 2$$

Por lo que, este tramo tiene por regla de correspondencia $y = 2x + 1$, $x \in [0,1]$.

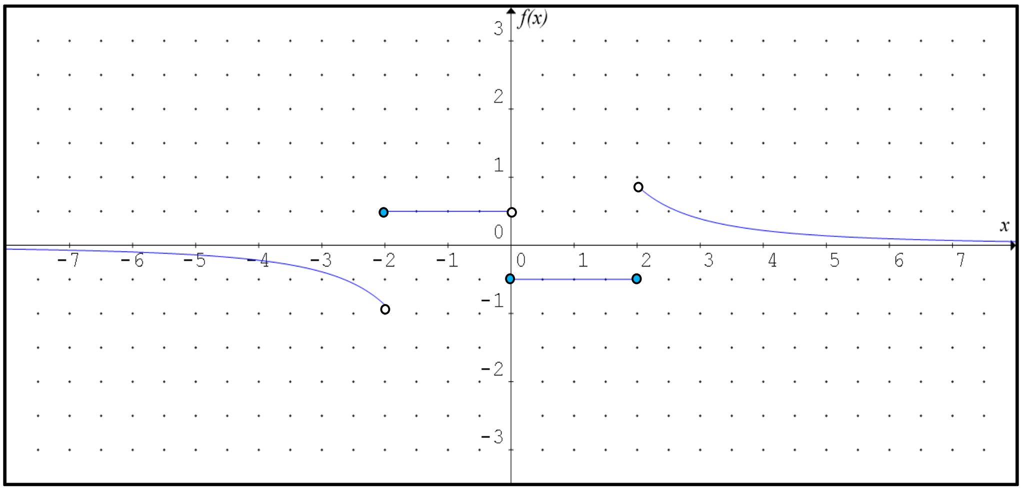
(d) f es par, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje X.

Se bosqueja la gráfica de f:



12. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ \ [0 < -x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 2| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x > N\ \Rightarrow\ \left|f(x) - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon\right]$

(c) $\forall x \in [0, 2]$ **, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que** $\int_0^2 f(x)dx = 3$**.**

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

Solución:

Según la gráfica dada de f':

$$\forall x \in [-2, 0) \cup (2, +\infty)\, , f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ es estrictamente creciente}$$
$$\forall x \in (-\infty, -2) \cup [0, 2]\, , f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Según las condiciones dadas:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad P(0, 2) \in f$, dado que f es continua.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{2}$ *es una asíntota horizontal*.

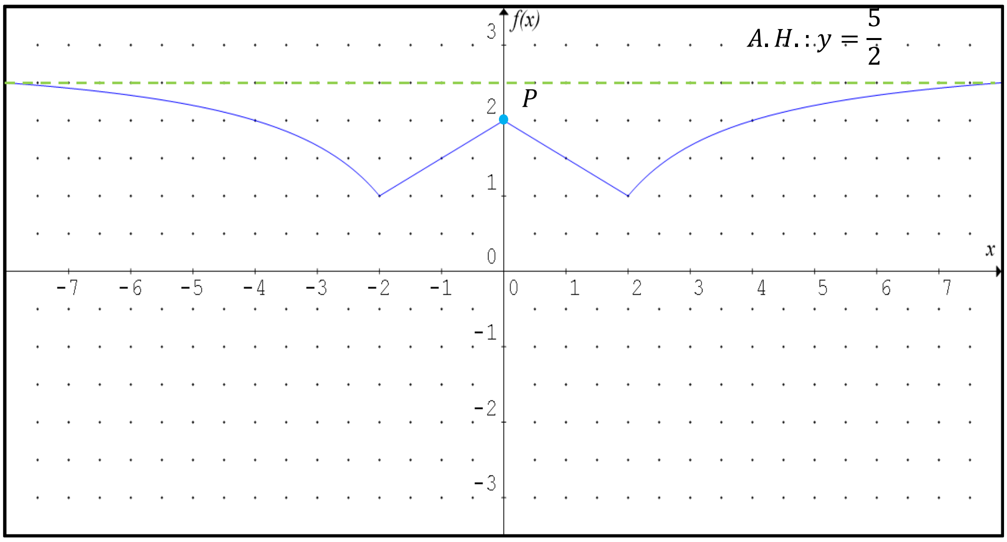
(c) El tramo lineal debe tener la forma $y = mx + b$, pero se conoce que $f(0) = 2$, lo cual nos permite concluir que $y = mx + 2$. Adicionalmente:

$$\int_0^2 (mx + 2)dx = 3 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{m}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_0^2 = 2m + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}$$

Por lo que, este tramo tiene por regla de correspondencia $y = -\frac{1}{2}x + 2\, , x \in [0, 2]$.

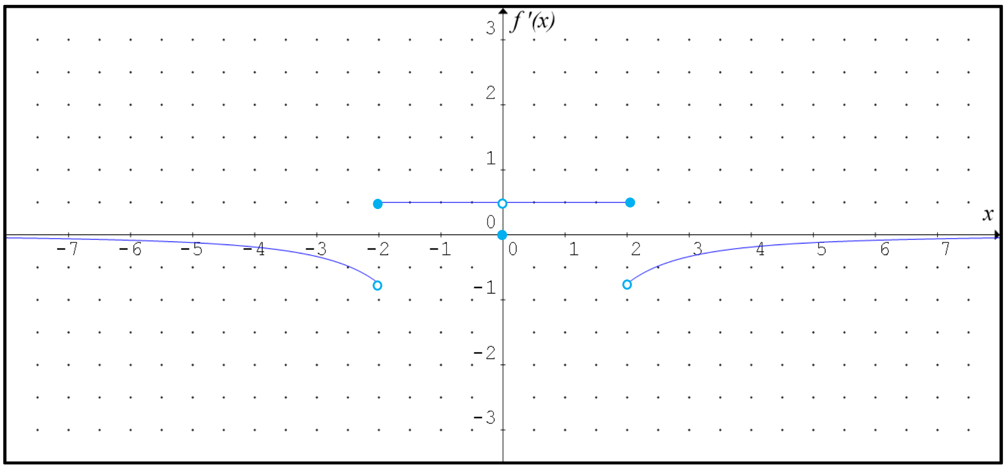
(d) f es par, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje X.

Se bosqueja la gráfica de f:



13. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ [0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x < -N \Rightarrow \left|f(x) + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right]$

(c) $\forall x \in [0, 2]$, **la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^2 f(x)dx = 3$.**

(d) $\forall x \in dom\, f,\ f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

Solución:

Según la gráfica dada de f':

$$\forall x \in [-2, 0) \cup (0, 2]\ , f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f\ es\ estrictamente\ creciente$$
$$\forall x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)\ , f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f\ es\ estrictamente\ decreciente$$

Según las condiciones dadas:

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\ es\ una\ asíntota\ horizontal.$

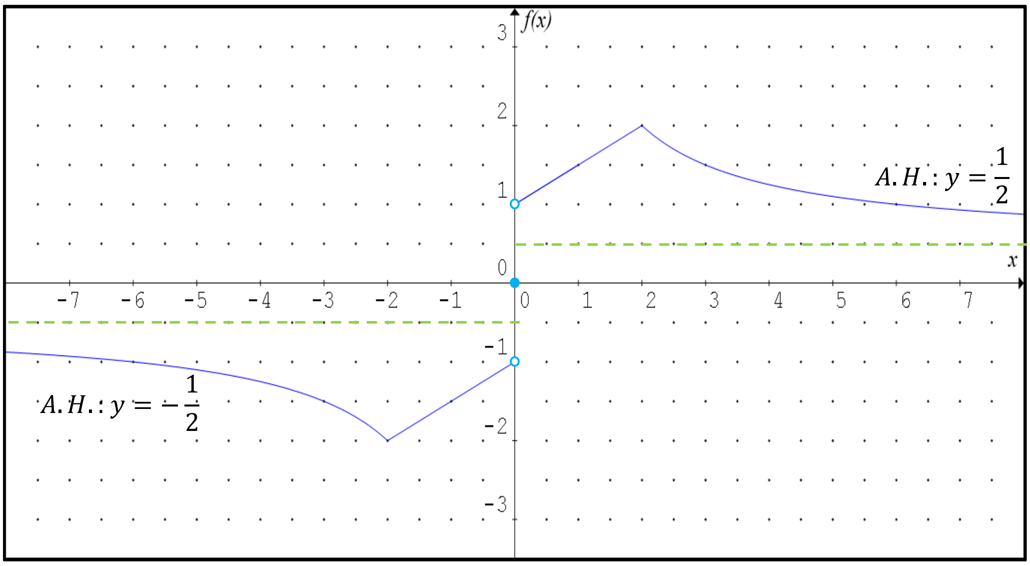
(c) El tramo lineal debe tener la forma $y = mx + b$, pero se conoce que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, lo cual nos permite concluir que $y = mx + 1$. Adicionalmente:

$$\int_0^2 (mx + 1)dx = 3 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{m}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^2 = 2m + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$$

Por lo que, este tramo tiene por regla de correspondencia $y = \frac{1}{2}x + 1\ , x \in [0, 2]$.

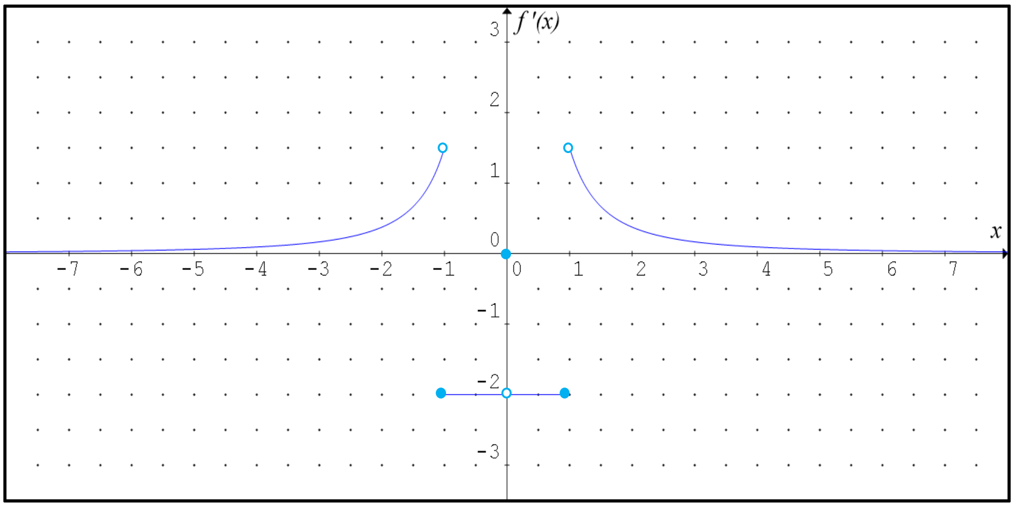
(d) f es impar, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Se bosqueja la gráfica de f:



14. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x < -N \Rightarrow \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right]$

(c) $\forall x \in [0, 1]$ **, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que** $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$.

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

Solución:

Según la gráfica dada de f':

$$\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\ , f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ es estrictamente creciente}$$
$$\forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]\ , f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Según las condiciones dadas:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}$ *es una asíntota horizontal.*

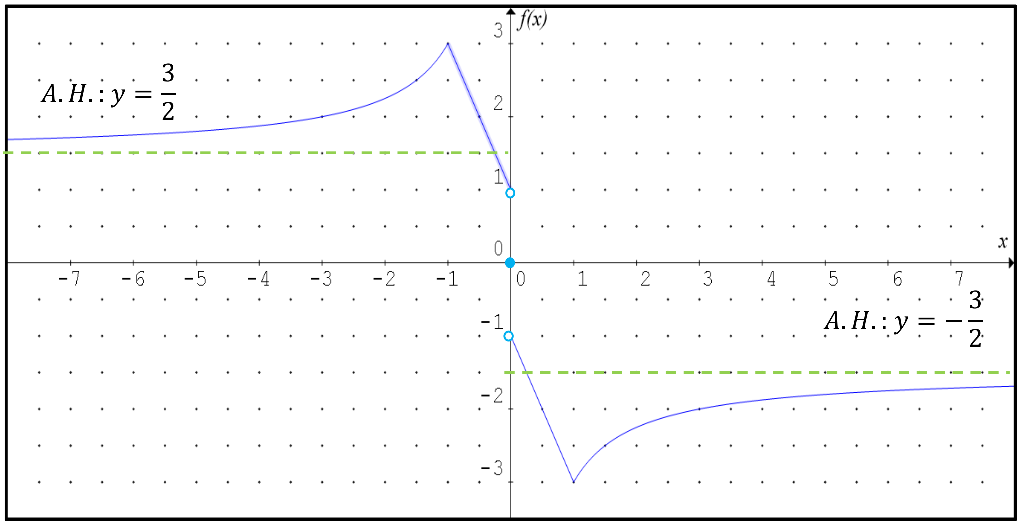
(c) El tramo lineal debe tener la forma $y = mx + b$, pero se conoce que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$, lo cual nos permite concluir que $y = mx + 1$. Adicionalmente:

$$\int_{-1}^{0} (mx + 1)dx = 2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{m}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{m}{2} + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

Por lo que, este tramo tiene por regla de correspondencia $y = -2x + 1\ , x \in [-1, 0)$.

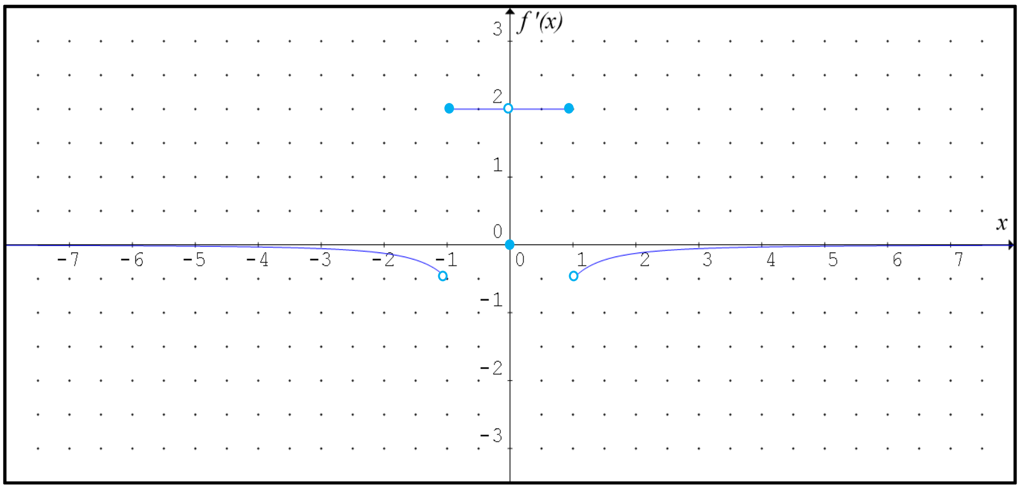
(d) f es impar, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Se bosqueja la gráfica de f:



15. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f':



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\, f\ [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\, f\ \left[x < -N \Rightarrow \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right]$

(c) $\forall x \in [-1, 0]$ **, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que** $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$**.**

(d) $\forall x \in dom\, f\ ,\ f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

Solución:

Según la gráfica dada de f':

$$\forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]\ , f'(x) > 0 \quad \to \quad f\ es\ estrictamente\ creciente$$
$$\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\ , f'(x) < 0 \quad \to \quad f\ es\ estrictamente\ decreciente$$

Según las condiciones dadas:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}\ es\ una\ asíntota\ horizontal.$

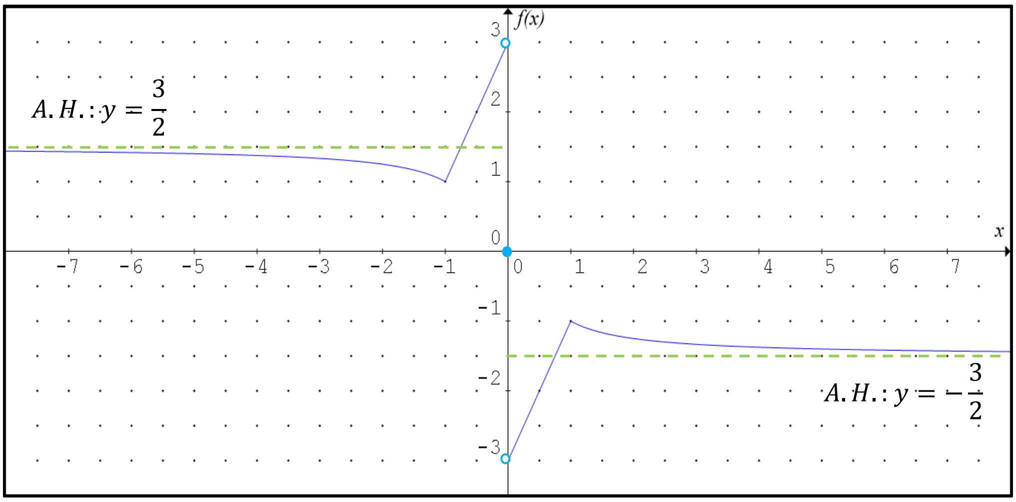
(c) El tramo lineal debe tener la forma $y = mx + b$, pero se conoce que $f(0) = 3$, lo cual nos permite concluir que $y = mx + 2$. Adicionalmente:

$$\int_{-1}^{0} (mx + 3)dx = 2 \quad \to \quad \left(\frac{m}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{m}{2} + 3 = 2 \quad \to \quad m = 2$$

Por lo que, este tramo tiene por regla de correspondencia $y = 2x + 3\ , x \in [-1, 0)$.

(d) f es impar, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Se bosqueja la gráfica de f:



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 4

16. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{sen(x)-x}$$

Solución:

Observe que:

$$\left(\lim_{x\to 0}\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt=\int_0^0\left(e^{t^2}-1\right)dt=0\right)\ \wedge\ \left(\lim_{x\to 0}[sen(x)-x]=0\right)$$

Por lo que, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{sen(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt\right]}{\frac{d}{dx}[sen(x)-x]}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{cos(x)-1}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por segunda vez el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{cos(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}-1\right]}{\frac{d}{dx}[cos(x)-1]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot(2x)-0}{-sen(x)-0}=-2\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}}{sen(x)}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por tercera vez el teorema de L'Hôpital:

$$-2\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}}{sen(x)} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[xe^{x^2}\right]}{\frac{d}{dx}[sen(x)]} = -2\lim_{x\to 0}\frac{(1)\cdot\left(e^{x^2}\right)+(x)\cdot\left(e^{x^2}\cdot 2x\right)}{cos(x)}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}(1+2x^2)}{cos(x)} = -2\left(\frac{1(1+0)}{1}\right) = -2$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{sen(x)-x} = -2}$$

17. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} ln\big(sen(t)\big)dt}{(2x-\pi)^3}}$$

Solución:

Observe que:

$$\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} ln\big(sen(t)\big)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ln\big(sen(t)\big)dt = 0\right) \wedge \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^3 = 0\right)$$

Por lo que, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} ln\big(sen(t)\big)dt}{(2x-\pi)^3} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} ln\big(sen(t)\big)dt\right]}{\frac{d}{dx}[(2x-\pi)^3]}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln\big(sen(x)\big)}{3(2x-\pi)^2\cdot(2)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln\big(sen(x)\big)}{(2x-\pi)^2}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por segunda vez el teorema de L'Hôpital:

$$\frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln\big(sen(x)\big)}{(2x-\pi)^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}\big[ln\big(sen(x)\big)\big]}{\frac{d}{dx}(2x-\pi)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{sen(x)}\cdot cos(x)}{2(2x-\pi)\cdot(2)}=\frac{1}{24}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cot(x)}{2x-\pi}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por tercera vez el teorema de L'Hôpital:

$$\frac{1}{24}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cot(x)}{2x-\pi}=\frac{1}{24}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}[cot(x)]}{\frac{d}{dx}[2x-\pi]}=\frac{1}{24}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-csc^2(x)}{2-0}$$

$$=-\frac{1}{48}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}csc^2(x)=-\frac{1}{48}(1^2)=-\frac{1}{48}$$

$$\boxed{\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}ln\big(sen(t)\big)dt}{(2x-\pi)^3}=-\frac{1}{48}}$$

18. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[arctan(t)]^2dt}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}}$$

Solución:

Observe que:

$$\left(\lim_{x\to 0}\int_0^x[arctan(t)]^2dt=\int_0^0[arctan(t)]^2dt=0\right)\ \wedge\ \left(\lim_{x\to 0}e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1=0\right)$$

Por lo que, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x [arctan(t)]^2 dt}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[\int_0^x [arctan(t)]^2 dt\right]}{\frac{d}{dx}\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{[arctan(x)]^2}{e^x-x-1}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por segunda vez el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{[arctan(x)]^2}{e^x-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}([arctan(x)]^2)}{\frac{d}{dx}(e^x-x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ arctan(x)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{e^x-1}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{arctan(x)}{1+x^2}}{e^x-1}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por tercera vez el teorema de L'Hôpital:

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{arctan(x)}{1+x^2}}{e^x-1}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{arctan(x)}{1+x^2}\right]}{\frac{d}{dx}[e^x-1]}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x^2}}-arctan(x)\cdot(0+2x)}{(1+x^2)^2}}{e^x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-2x\ arctan(x)}{(1+x^2)^2}}{e^x}=2\left(\frac{\frac{1-0}{1^2}}{1}\right)=2$$

$$\boxed{\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x [arctan(t)]^2 dt}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=2}$$

19. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (arctan(t) - t)dt}{x^4}$$

Solución:

Observe que:

$$\left(\lim_{x \to 0} \int_0^x (arctan(t) - t)dt = \int_0^0 (arctan(t) - t)dt = 0\right) \wedge \left(\lim_{x \to 0} x^4 = 0\right)$$

Por lo que, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (arctan(t) - t)dt}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[\int_0^x (arctan(t) - t)dt\right]}{\frac{d}{dx}[x^4]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{arctan(x) - x}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{arctan(x) - x}{x^3}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por segunda vez el teorema de L'Hôpital:

$$\frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{arctan(x) - x}{x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[arctan(x) - x]}{\frac{d}{dx}[x^3]} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x^2} - 1}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x^2} - 1}{x^2}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por tercera vez el teorema de L'Hôpital:

$$\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+x^2}-1\right]}{\frac{d}{dx}[x^2]}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot(2x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{1^2}\right)=-\frac{1}{12}$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(arctan(t)-t)dt}{x^4}=-\frac{1}{12}}$$

20. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(2sen^2(t)+4t\,sen(2t)+2t^2cos(2t)\right)dt}{2x-sen(2x)}$$

Solución:

Observe que:

$$\left(\lim_{x\to 0}\int_0^x\left(2sen^2(t)+4t\,sen(2t)+2t^2cos(2t)\right)dt\right.$$
$$\left.=\int_0^0\left(2sen^2(t)+4t\,sen(2t)+2t^2cos(2t)\right)dt=0\right)$$
$$\wedge$$
$$\left(\lim_{x\to 0}2x-sen(2x)=0\right)$$

Por lo que, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(2sen^2(t)+4t\,sen(2t)+2t^2cos(2t)\right)dt}{2x-sen(2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[\int_0^x\left(2sen^2(t)+4t\,sen(2t)+2t^2cos(2t)\right)dt\right]}{\frac{d}{dx}[2x-sen(2x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}sen^2(x)+\cancel{4}x\,sen(2x)+\cancel{2}x^2cos(2x)}{\cancel{2}-\cancel{2}cos(2x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen^2(x) + 2x\, sen(2x) + x^2 cos(2x)}{1 - cos(2x)}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por segunda vez el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(x) + 2x\, sen(2x) + x^2 cos(2x)}{1 - cos(2x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[sen^2(x) + 2x\, sen(2x) + x^2 cos(2x)]}{\frac{d}{dx}[1 - cos(2x)]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2sen(x)cos(x) + 2\big(sen(2x) + 2x\, cos(2x)\big) + \big(2x\, cos(2x) - 2x^2 sen(2x)\big)}{2sen(2x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) + 2sen(2x) + 4x\, cos(2x) + 2x\, cos(2x) - 2x^2 sen(2x)}{2sen(2x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3sen(2x) + 6x\, cos(2x) - 2x^2 sen(2x)}{2sen(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{3sen(2x) + 6x\, cos(2x) - 2x^2 sen(2x)}{sen(2x)}$$

Al evaluar la tendencia, nuevamente se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Se aplica por tercera vez el teorema de L'Hôpital:

$$\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{3sen(2x) + 6x\, cos(2x) - 2x^2 sen(2x)}{sen(2x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[3sen(2x) + 6x\, cos(2x) - 2x^2 sen(2x)]}{\frac{d}{dx}[sen(2x)]}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{6cos(2x) + 6\big(cos(2x) - 2x\, sen(2x)\big) - 2\big(2x\, sen(2x) + 2x^2 cos(2x)\big)}{2cos(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{6cos(2x) + 6cos(2x) - 12x\, sen(2x) - 4x\, sen(2x) - 4x^2 cos(2x)}{2cos(2x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{12cos(2x)-16x\ sen(2x)-4x^2cos(2x)}{2cos(2x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{12(1)-0-0}{2(1)}\right)=3$$

$$\boxed{\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(2sen^2(t)+4t\ sen(2t)+2t^2cos(2t)\right)dt}{2x-sen(2x)}=3}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 5

21. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $\int_a^b f^2(x)dx = 0$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua $f(x) = x\ ; x \in [-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{1}{2}(x^2)|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3}(x^3)|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\big(1-(-1)\big) = \frac{2}{3}$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a = -1$ y $b = 1$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{f \text{ es continua en } [a,b]}_{Verdadero} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx = 0}_{Verdadero}\right)}_{Verdadero} \to \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx = 0}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

22. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA O FALSA, justificando su respuesta:

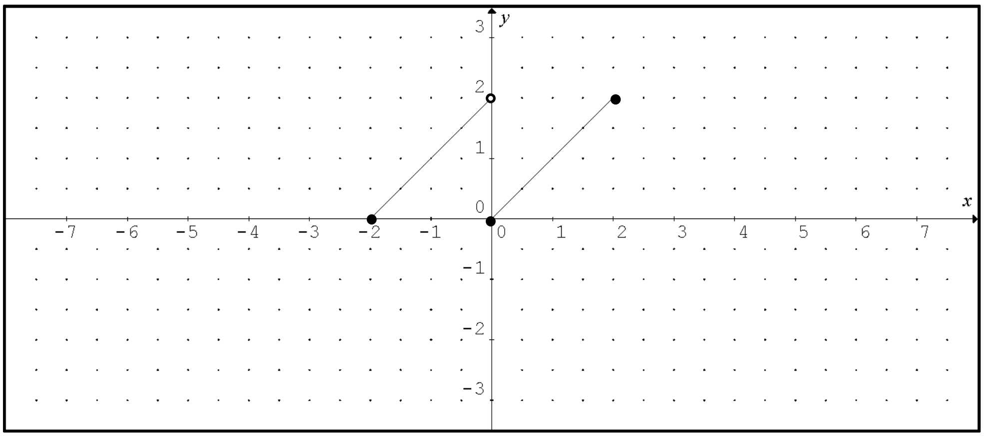
"Si f no es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f no es integrable en el intervalo $[a, b]$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función discontinua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\,, & -2 \leq x < 0 \\ x\,, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x + 2)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x + 2)^2\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}(x)^2\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}(4 - 0) + \frac{1}{2}(4 - 0) = 2 + 2 = 4$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a = -2$ y $b = 2$.

$$\underbrace{(f \text{ no es continua en } [a, b])}_{Verdadero} \rightarrow \underbrace{f \text{ no es integrable en } [a, b]}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

23. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

$$\int_{1}^{n+1} [\![x]\!]\, dx = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Solución:

Con base en la definición de la función entero mayor y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{1}^{n+1} [\![x]\!]\, dx = \int_{1}^{2} 1\, dx + \int_{2}^{3} 2\, dx + \int_{3}^{4} 3\, dx + \ \dots \ + \int_{n}^{n+1} n\, dx$$

$$= x|_1^2 + 2x|_2^3 + 3x|_3^4 + \ \dots \ + nx|_n^{n+1}$$

$$= (2-1) + 2(3-2) + 3(4-3) + \ \dots \ + n(n+1-n)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \ \dots \ + n$$

$$\therefore \int_{0}^{n+1} [\![x]\!]\, dx = \frac{n(n+1)}{2}$$

∴ La proposición es VERDADERA.

24. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Si $\int_a^b f(x)dx = c$, entonces $\int_a^b (b^3 f(x) - 3cx^2)dx = a^3 c$."

Solución:

Aplicando la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{a}^{b} (b^3 f(x) - 3cx^2)dx = b^3 \int_{a}^{b} f(x)dx - \cancel{3}c\left(\frac{1}{\cancel{3}}x^3\right)\Big|_a^b$$

$$= b^3 c - c(b^3 - a^3) = \cancel{b^3 c} - \cancel{b^3 c} + a^3 c$$

$$\int_{a}^{b} (b^3 f(x) - 3cx^2)dx = a^3 c$$

∴ La proposición es VERDADERA.

25. (10 PUNTOS)

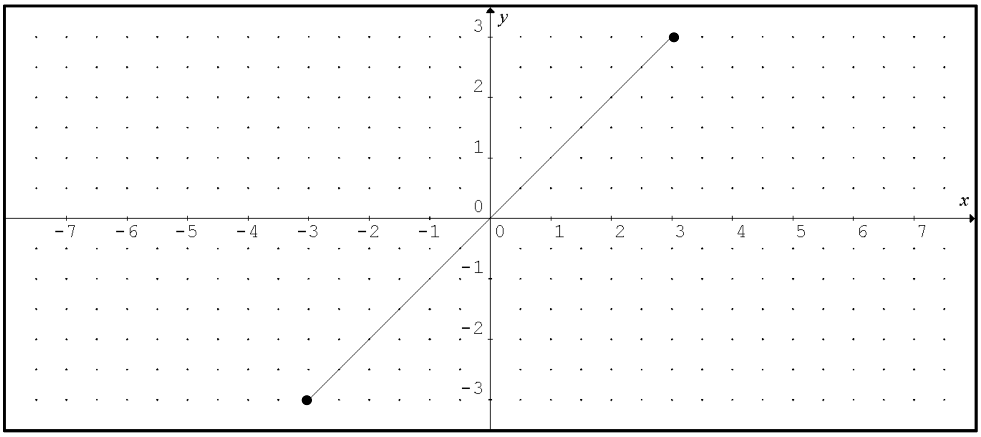
Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $f(x) = 0$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua $f(x) = x\ ;\ x \in [-3, 3]$:



$$\int_{-3}^{3} x\, dx = \frac{1}{2}(x^2)|_{-3}^{3} = \frac{1}{2}(9-9) = 0$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a = -3$ y $b = 3$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{f\ es\ continua\ en\ [a,b]}_{Verdadero} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx = 0}_{Verdadero}\right)}_{Verdadero} \to \underbrace{f(x) = 0}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 6

26. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x} \quad ; \quad x \in [1, 4]}$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

Solución:

Para obtener el valor solicitado VP, se debe resolver:

$$VP = \frac{1}{4-1} \int_1^4 \frac{1}{x^2 + 2x} dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x} dx = \int \frac{1}{x(x+2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}\right) dx$$

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \quad \rightarrow \quad 1 = A(x+2) + Bx$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = A(2) + 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 + B(-2) \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} ln|x| - \frac{1}{2} ln|x+2| + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$VP = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)(ln|x| - ln|x+2|)|_1^4$$

$$VP = \frac{1}{6}\Big(\big(ln(4) - ln(6)\big) - \big(0 - ln(3)\big)\Big)$$

$$VP = \frac{1}{6}\big(ln(4) - ln(6) + ln(3)\big) = \frac{1}{6}\left(ln\left(\frac{(4)(3)}{6}\right)\right)$$

$$\boxed{\therefore VP = \frac{1}{6}ln(2)}$$

27. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \quad ; \quad x \in [-3, -1]}$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

Solución:

Para obtener el valor solicitado VP, se debe resolver:

$$VP = \frac{1}{-1-(-3)}\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2 - 2x}dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x}dx = \int \frac{1}{x(x-2)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}\right)dx$$

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \quad \rightarrow \quad 1 = A(x-2) + Bx$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = A(-2) + 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 + B(2) \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x}dx = -\frac{1}{2}ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-2| + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$VP = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(ln|x-2| - ln|x|)|_{-3}^{-1}$$

$$VP = \frac{1}{4}\Big((ln(3) - 0) - \big(ln(5) - ln(3)\big)\Big)$$

$$VP = \frac{1}{4}\big(2ln(3) - ln(5)\big) = \frac{1}{4}\left(ln\left(\frac{3^2}{5}\right)\right)$$

$$\boxed{\therefore VP = \frac{1}{4}ln\left(\frac{9}{5}\right)}$$

28. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x} \quad ; \quad x \in [1, 4]}$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

Solución:

Para obtener el valor solicitado VP, se debe resolver:

$$VP = \frac{1}{4-1}\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x}dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x}dx = \int \frac{1}{x(x+4)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}\right)dx$$

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} \quad \rightarrow \quad 1 = A(x+4) + Bx$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = A(4) + 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$
$$x = -4 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 + B(-4) \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+4}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x}dx = \frac{1}{4}ln|x| - \frac{1}{4}ln|x+4| + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$VP = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(ln|x| - ln|x+4|)|_1^4$$

$$VP = \frac{1}{12}\Big(\big(ln(4) - ln(8)\big) - \big(0 - ln(5)\big)\Big)$$

$$VP = \frac{1}{12}\big(ln(4) - ln(8) + ln(5)\big) = \frac{1}{12}\left(ln\left(\frac{(4)(5)}{8}\right)\right)$$

$$\boxed{\therefore VP = \frac{1}{12}ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$

29. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad ; \quad x \in [4, 9]}$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

Solución:

Para obtener el valor solicitado VP, se debe resolver:

$$VP = \frac{1}{9-4}\int_4^9 \frac{1}{x^2-3x}dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\int \frac{1}{x^2-3x}dx = \int \frac{1}{x(x-3)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}\right)dx$$

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} \quad \rightarrow \quad 1 = A(x-3) + Bx$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = A(-3) + 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{3}$$

$$x = 3 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 + B(3) \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x}dx = -\frac{1}{3}ln|x| + \frac{1}{3}ln|x-3| + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$VP = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)(ln|x-3| - ln|x|)|_4^9$$

$$VP = \frac{1}{15}\Big(\big(ln(6) - ln(9)\big) - \big(0 - ln(4)\big)\Big)$$

$$VP = \frac{1}{15}\big(ln(6) - ln(9) + ln(4)\big) = \frac{1}{15}\left(ln\left(\frac{(6)(4)}{9}\right)\right)$$

$$\boxed{\therefore VP = \frac{1}{15}ln\left(\frac{8}{3}\right)}$$

30. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2+5x} \quad ; \quad x \in [1,5]}$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

Solución:

Para obtener el valor solicitado VP, se debe resolver:

$$VP = \frac{1}{5-1}\int_1^5 \frac{1}{x^2+5x}dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\int \frac{1}{x^2+5x}dx = \int \frac{1}{x(x+5)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}\right)dx$$

$$\frac{1}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} \quad \rightarrow \quad 1 = A(x+5) + Bx$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = A(5) + 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{5}$$

$$x = -5 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 + B(-5) \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{5}$$

$$\int \frac{1}{x^2+5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+5}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+5x}dx = \frac{1}{5}ln|x| - \frac{1}{5}ln|x+5| + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$VP = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(ln|x| - ln|x+5|)|_1^5$$

$$VP = \frac{1}{20}\Big(\big(ln(5) - ln(10)\big) - \big(0 - ln(6)\big)\Big)$$

$$VP = \frac{1}{20}\big(ln(5) - ln(10) + ln(6)\big) = \frac{1}{20}\left(ln\left(\frac{(5)(6)}{10}\right)\right)$$

$$\boxed{\therefore VP = \frac{1}{20}ln(3)}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	07/febrero/2022

Tema # 7

31. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}1-x^2\,, & |x|\le 1\\ ln(|x|)\,, & (-e\le x<-1)\vee(1<x\le e)\end{cases}}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x=e$, $x=-e$; y finalmente, calcule su área.

Solución:

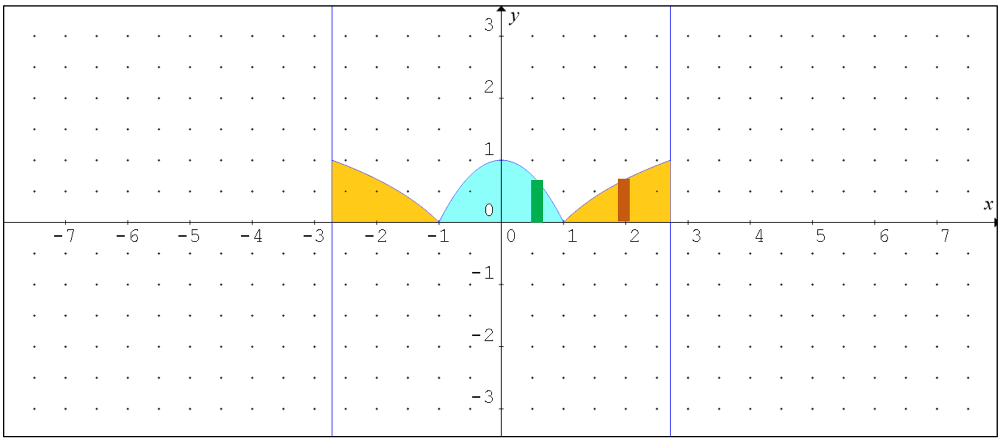
Nótese que:

$$f(-x)=1-(-x)^2=1-x^2=f(x)\ ;\ -1\le x\le 1$$

$$f(-x)=ln(|-x|)=ln(|x|)=f(x)\ ;\ \ (-e\le x<-1)\vee(1<x\le e)$$

$$\therefore\ f\ es\ par\ ;\ \ \forall x\in dom\ f$$

Se bosqueja la gráfica de f, las rectas $x=e$ y $x=-e$ para identificar la región. Adicionalmente se dibujan los rectángulos representativos.



Se tendría:

$$dA_1 = (1 - x^2)dx \ ; \ \ x \in [0, 1]$$
$$dA_2 = ln(x)\ dx \ ; \ \ x \in (1, e]$$

Aprovechando la SIMETRÍA de la función, ya que es par, y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA y la PROPIEDAD DE LINEALIDAD, el área A de la región se calcula así:

$$A = \int_{-e}^{e} f(x)dx = 2\int_{0}^{e} f(x)dx = 2\left(\underbrace{\int_{0}^{1}(1 - x^2)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{1}^{e} ln(x)dx}_{A_2}\right)$$

Se obtiene A_1:

$$A_1 = \int_{0}^{1}(1 - x^2)dx = \int_{0}^{1} dx - \int_{0}^{1} x^2 dx$$

$$A_1 = x|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = (1 - 0) - \frac{1}{3}(1 - 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ u^2$$

Para obtener A_2, se aplicará la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{array}{c|c} u = ln(x) & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x}dx & v = x \end{array}$$

$$\int ln(x)dx = x\ ln(x) - \int dx = x\ ln(x) - x + C \ \ ; \ \ \ C \in \mathbb{R}$$

$$A_2 = \big(x\ ln(x)\big)\Big|_1^e - x|_1^e = (e - 0) - (e - 1) = 1\ u^2$$

Entonces:

$$A = 2\left(\frac{2}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{\therefore \ A = \frac{10}{3}\ u^2}$$

32. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi}arctan(|x|)\,, & |x|\le 1\\ 3-|x|\,, & (-3\le x<-1)\vee(1<x\le 3)\end{cases}}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje X; y finalmente, calcule su área.

Solución:

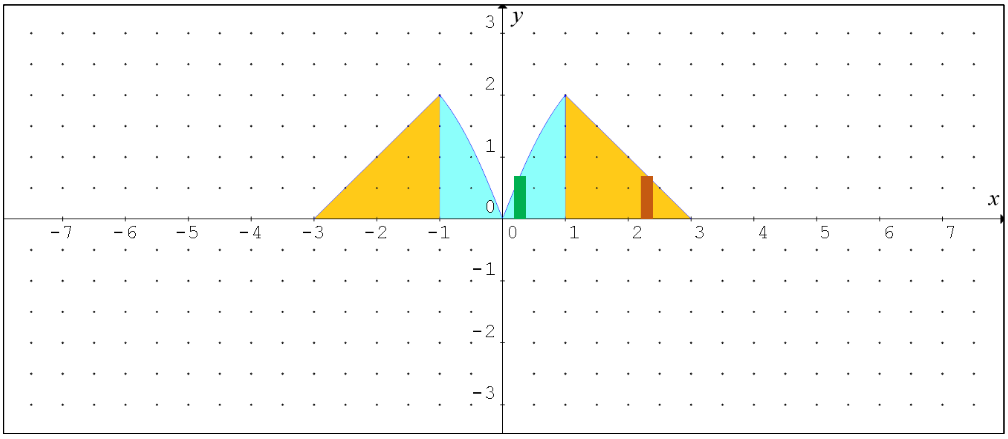
Nótese que:

$$f(-x)=\frac{8}{\pi}arctan(|-x|)=\frac{8}{\pi}arctan(|x|)=f(x)\ ;\ -1\le x\le 1$$

$$f(-x)=3-|-x|=3-|x|=f(x)\ ;\ (-3\le x<-1)\vee(1<x\le 3)$$

$$\therefore\ f\ es\ par\ ;\ \forall x\in dom\ f$$

Se bosqueja la gráfica de f y se identifica la región. Adicionalmente se dibujan los rectángulos representativos.



Se tendría:

$$dA_1=\frac{8}{\pi}arctan(x)dx\ ;\ x\in[0,1]$$
$$dA_2=(3-x)\,dx\ ;\ x\in(1,3]$$

Aprovechando la SIMETRÍA de la función, ya que es par, y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA y la PROPIEDAD DE LINEALIDAD, el área A de la región se calcula así:

$$A = \int_{-3}^{3} f(x)dx = 2\int_{0}^{3} f(x)dx = 2\left(\underbrace{\frac{8}{\pi}\int_{0}^{1} arctan(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{1}^{3}(3-x)dx}_{A_2}\right)$$

Para obtener A_1, se aplicará la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{array}{c|c} u = arctan(x) & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx & v = x \end{array}$$

$$\int arctan(x)dx = x\,arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,arctan(x) - \frac{1}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2}x}{1+x^2}dx$$

$$\int arctan(x)dx = x\,arctan(x) - \frac{1}{2}ln|1+x^2| + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$A_1 = \frac{8}{\pi}\left(\left(x\,arctan(x)\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}ln|1+x^2|\Big|_0^1\right) = \frac{8}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2}(ln(2) - 0)\right)$$

$$A_1 = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln(2)\right) = \frac{1}{\pi}\left(2\pi - 4ln(2)\right)u^2$$

Se obtiene A_2:

$$A_2 = \int_{1}^{3}(3-x)dx = 3\int_{1}^{3}dx - \int_{1}^{3}x\,dx = 3x|_1^3 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3$$

$$A_2 = 3(3-1) - \frac{1}{2}(9-1) = 6 - 4 = 2\,u^2$$

Entonces:

$$A = 2\left(\frac{1}{\pi}\left(2\pi - ln(16)\right) + 2\right) = 2\left(2 - \frac{1}{\pi}ln(16) + 2\right)$$

$$\boxed{\therefore\ A = 2\left(4 - \frac{1}{\pi}ln(16)\right)u^2}$$

33. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{\pi}arcsen(|x|)\,, & |x|\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] |x|+\dfrac{1}{2}\,, & \left(-2\le x<-\dfrac{1}{2}\right)\vee\left(\dfrac{1}{2}<x\le 2\right)\end{cases}}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x=2$, $x=-2$; y finalmente, calcule su área.

Solución:

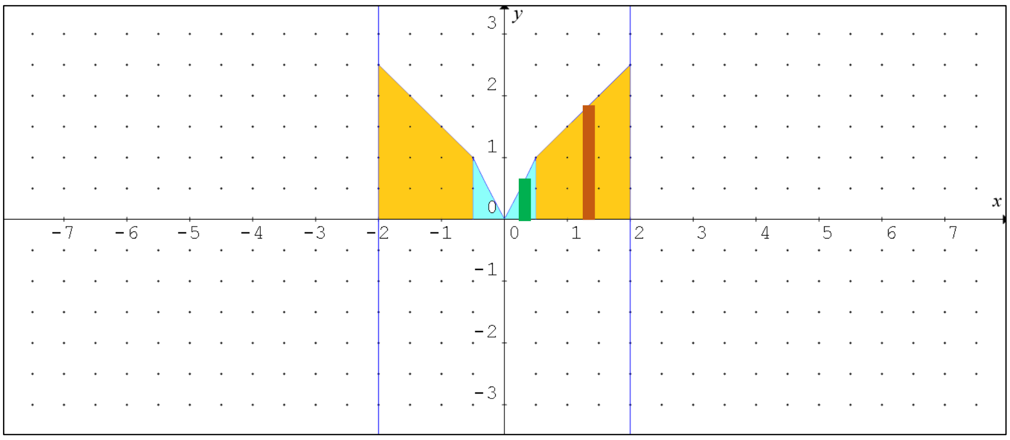
Nótese que:

$$f(-x)=\frac{6}{\pi}arcsen(|-x|)=\frac{6}{\pi}arcsen(|x|)=f(x)\ ;\ -1\le x\le 1$$

$$f(-x)=|-x|+\frac{1}{2}=|x|+\frac{1}{2}=f(x)\ ;\ (-2\le x<-1)\vee(1<x\le 2)$$

$$\therefore f\ es\ par\ ;\ \forall x\in dom\, f$$

Se bosqueja la gráfica de f, las rectas $x=2$ y $x=-2$ para identificar la región. Adicionalmente se dibujan los rectángulos representativos.



Se tendría:

$$dA_1=\frac{6}{\pi}arcsen(x)dx\ ;\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$
$$dA_2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx\ ;\ x\in\left(\frac{1}{2},2\right]$$

Aprovechando la SIMETRÍA de la función, ya que es par, y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA y la PROPIEDAD DE LINEALIDAD, el área A de la región se calcula así:

$$A=\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx=2\left(\underbrace{\frac{6}{\pi}\int_{0}^{1/2}arcsen(x)dx}_{A_1}+\underbrace{\int_{1/2}^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}_{A_2}\right)$$

Para obtener A_1, se aplicará la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{array}{c|c} u=arcsen(x) & dv=dx \\ du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x \end{array}$$

$$\int arcsen(x)dx=x\,arcsen(x)-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int arcsen(x)dx=x\,arcsen(x)+\sqrt{1-x^2}+C\quad;\quad C\in\mathbb{R}$$

$$A_1=\frac{6}{\pi}\left(\left(x\,arcsen(x)\right)\Big|_0^{1/2}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1/2}\right)=\frac{6}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)-0\right)+\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}-1\right)\right)$$

$$A_1=\frac{6}{\pi}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\ u^2$$

Se obtiene A_2:

$$A_2=\int_{1/2}^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_{1/2}^{2}x\,dx+\frac{1}{2}\int_{1/2}^{2}dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{1/2}^{2}+\frac{1}{2}x\Big|_{1/2}^{2}$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8}+\frac{3}{4}=\frac{21}{8}\ u^2$$

Entonces:

$$A=2\left(\frac{6}{\pi}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{21}{8}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}-\frac{6}{\pi}+\frac{21}{8}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ A=2\left(\frac{25}{8}-\frac{3}{\pi}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\ u^2}$$

34. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3 - |3x|\,, & |x| \leq 1 \\ log_2(|x|)\,, & (-4 \leq x < -1) \vee (1 < x \leq 4) \end{cases}}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x = 4$, $x = -4$; y finalmente, calcule su área.

Solución:

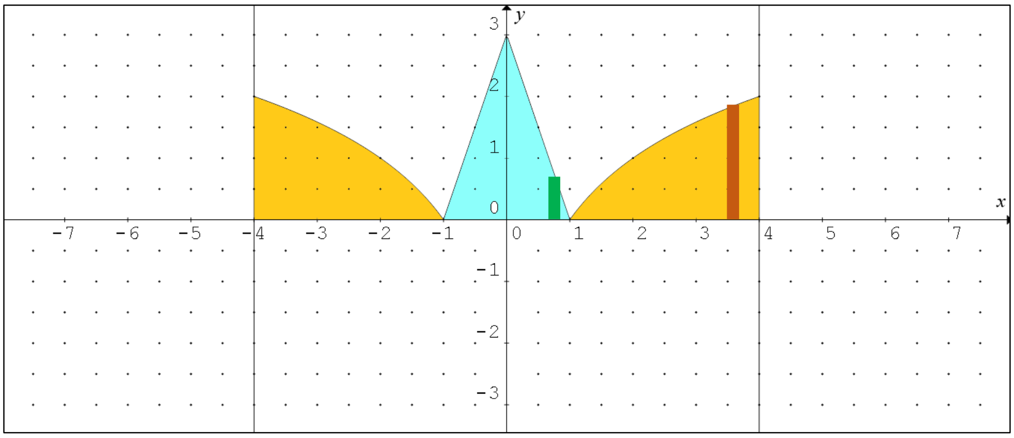
Nótese que:

$$f(-x) = 3 - |-3x| = 3 - |3x| = f(x) \;\; ; \; -1 \leq x \leq 1$$

$$f(-x) = log_2(|-x|) = log_2(|x|) = f(x) \;\; ; \;\; (-4 \leq x < -1) \vee (1 < x \leq 4)$$

$$\therefore f \; es \; par \;\; ; \;\; \forall x \in dom\, f$$

Se bosqueja la gráfica de f, las rectas $x = 4$ y $x = -4$ para identificar la región. Adicionalmente se dibujan los rectángulos representativos.



Se tendría:

$$dA_1 = (3 - 3x)dx \;\; ; \;\; x \in [0, 1]$$
$$dA_2 = log_2(x)\, dx \;\; ; \;\; x \in (1, 4]$$

Aprovechando la SIMETRÍA de la función, ya que es par, y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA y la PROPIEDAD DE LINEALIDAD, el área A de la región se calcula así:

$$A = \int_{-4}^{4} f(x)dx = 2\int_{0}^{4} f(x)dx = 2\left(\underbrace{\int_{0}^{1}(3-3x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{1}^{4} log_2(x)dx}_{A_2}\right)$$

Se obtiene A_1:

$$A_1 = \int_0^1 (3-3x)dx = 3\int_0^1 dx - 3\int_0^1 x\,dx = 3x|_0^1 - \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1$$

$$A_1 = 3(1-0) - \frac{3}{2}(1-0) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\ u^2$$

Para obtener A_2, se aplicará la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = log_2(x) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x\,ln(2)}dx \qquad v = x$$

$$\int log_2(x)dx = x\,log_2(x) - \frac{1}{ln(2)}\int dx = x\,log_2(x) - \frac{1}{ln(2)}x + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$A_2 = \left(x\,log_2(x)\right)\Big|_1^4 - \frac{1}{ln(2)}x\Big|_1^4 = (4(2)-0) - \frac{1}{ln(2)}(4-1) = \left(8 - \frac{3}{ln(2)}\right)\ u^2$$

Entonces:

$$A = 2\left(\frac{3}{2} + 8 - \frac{3}{ln(2)}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ A = 2\left(\frac{19}{2} - \frac{3}{ln(2)}\right)\ u^2}$$

35. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \left|\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}\right|, & |\boldsymbol{x}| \le \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} + \boldsymbol{log_{\frac{1}{2}}}(|\boldsymbol{x}|), & (\boldsymbol{-4 \le x < -2}) \vee (\boldsymbol{2 < x \le 4}) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje X; y finalmente, calcule su área.

Solución:

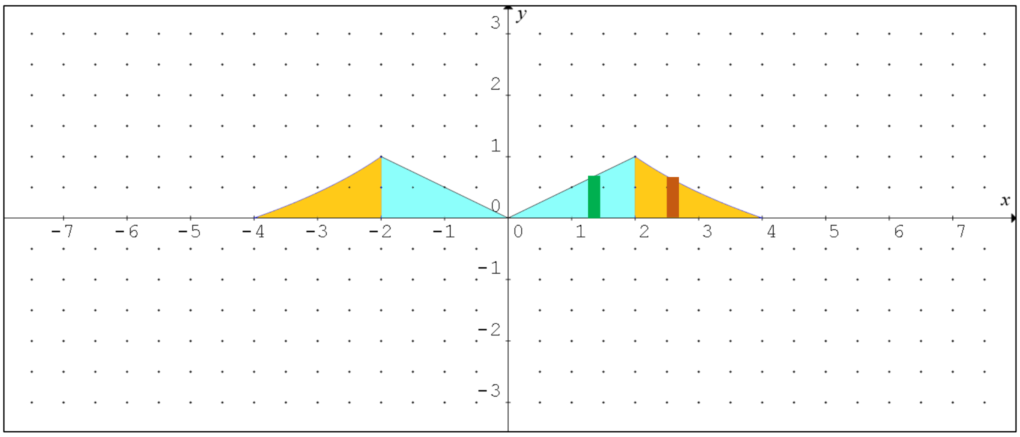
Nótese que:

$$f(-x) = \left|-\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right| = f(x)\ ;\ -2 \le x \le 2$$

$$f(-x) = 2 + log_{\frac{1}{2}}(|-x|) = 2 + log_{\frac{1}{2}}(|x|) = f(x)\ ;\ (-4 \le x < -2) \vee (2 < x \le 4)$$

$$\therefore f\ es\ par\ ;\ \forall x \in dom\ f$$

Se bosqueja la gráfica de f y se identifica la región. Adicionalmente se dibujan los rectángulos representativos.



Se tendría:

$$dA_1 = \frac{x}{2}dx\ ;\ x \in [0, 2]$$
$$dA_2 = \left(2 + log_{\frac{1}{2}}(x)\right) dx\ ;\ x \in (2, 4]$$

Aprovechando la SIMETRÍA de la función, ya que es par, y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA y la PROPIEDAD DE LINEALIDAD, el área A de la región se calcula así:

$$A = \int_{-4}^{4} f(x)dx = 2\int_{0}^{4} f(x)dx = 2\left(\underbrace{\int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{2}^{4}\left(2 + log_{\frac{1}{2}}(x)\right)dx}_{A_2}\right)$$

Se obtiene A_1:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\, dx = \frac{1}{4}x^2\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{4}(4-0) = 1\, u^2$$

Para obtener A_2, se aplicará la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = log_{\frac{1}{2}}(x) \qquad\qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x\, ln\left(\frac{1}{2}\right)}dx = -\frac{1}{x\, ln(2)}dx \qquad\qquad v = x$$

$$\int log_{\frac{1}{2}}(x)dx = x\, log_{\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{ln(2)}\int dx = x\, log_{\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{ln(2)}x + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$A_2 = 2\int_{2}^{4} dx + \int_{2}^{4} log_{\frac{1}{2}}(x)dx = 2(x)|_2^4 + \left(x\, log_{\frac{1}{2}}(x)\right)\Big|_2^4 + \frac{1}{ln(2)}x\Big|_2^4$$

$$A_2 = 2(4-2) + \big(4(-2) - 2(-1)\big) + \frac{1}{ln(2)}(4-2) = \left(4 - 6 + \frac{2}{ln(2)}\right)$$

$$A_2 = 2\left(\frac{1}{ln(2)} - 1\right)\, u^2$$

Entonces:

$$A = 2\left(1 + 2\left(\frac{1}{ln(2)} - 1\right)\right) = 2\left(1 + \frac{2}{ln(2)} - 2\right)$$

$$\boxed{\therefore\ A = 2\left(\frac{2}{ln(2)} - 1\right)\, u^2}$$