AÑO:	2024	PERÍODO:	I PAO	MATERIA:	Cálculo de una variable
PROFESORES:	Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Carrión L., Cordero M., Díaz R., García E., Hernández C., Laveglia F., López E., Mejía M., Ramos M., Toledo X., Valdiviezo J.				
EVALUACIÓN:	SEGUNDA		FECHA:	26/agosto/2024	

Examen:	50
Lección:	35
Quiz:	10
Deber:	5
Total:	100

1. (5 PUNTOS) La eficiencia E (en porcentaje) del operador de una máquina, se ha definido como una función del tiempo t (en $horas$ de trabajo); y, está dada para $0 \leq t \leq 8$, por la siguiente integral indefinida:

$$\boldsymbol{E(t) = \int \left(-8t + \frac{89}{3}\right) dt}$$

(a) (4 PUNTOS) Obtenga la expresión para $E(t)$, si se conoce que la eficiencia del operador, cuando ha trabajado $2\ horas$, es de 76%; es decir, $E(2) = 76$.

(b) (1 PUNTO) Calcule la eficiencia del operador, cuando ha trabajado $3\ horas$. Aproxime su respuesta con dos decimales.

Solución:

Se aplica la PROPIEDAD DE LINEALIDAD:

$$E(t) = -8\int t\, dt + \frac{89}{3}\int dt$$

$$E(t) = -4t^2 + \frac{89}{3}t + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

Pero:

$$E(2) = -4(2)^2 + \frac{89}{3}(2) + C = 76$$

$$C = 76 + 16 - \frac{178}{3} = 92 - \frac{178}{3} = \frac{98}{3}$$

$$\boxed{\therefore E(t) = -4t^2 + \frac{89}{3}t + \frac{98}{3} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 8}$$

Se evalúa la función E, cuando $t = 3$:

$$E(3) = -4(3)^2 + \frac{89}{3}(3) + \frac{98}{3} = -36 + 89 + \frac{98}{3} = 53 + \frac{98}{3} = \frac{257}{3} \approx 85.67$$

$$\boxed{\therefore La\ eficiencia\ del\ operador, cuando\ ha\ trabajado\ 3\ horas, es\ del\ 85.67\%.}$$

2. (7 PUNTOS) Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \boldsymbol{x^3[ln(x)]^2dx}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES por primera vez:

$$\begin{array}{c|c} u = [ln(x)]^2 & dv = x^3dx \\ du = 2ln(x)\left(\frac{1}{x}\right)dx & v = \frac{x^4}{4} \end{array}$$

$$\int x^3[ln(x)]^2dx = [ln(x)]^2\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int\left(\frac{x^4}{4}\right)\left(2\,ln(x)\left(\frac{1}{x}\right)dx\right)$$

$$\int x^3[ln(x)]^2dx = \frac{x^4}{4}[ln(x)]^2 - \frac{1}{2}\int x^3ln(x)dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES por segunda vez:

$$\begin{array}{c|c} u = ln(x) & dv = x^3dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^4}{4} \end{array}$$

Entonces:

$$\int x^3[ln(x)]^2dx = \frac{x^4}{4}[ln(x)]^2 - \frac{1}{2}\left(ln(x)\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int\left(\frac{x^4}{4}\right)\left(\frac{1}{x}dx\right)\right)$$

$$\int x^3[ln(x)]^2dx = \frac{x^4}{4}[ln(x)]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3dx\right)$$

$$\int x^3[ln(x)]^2dx = \frac{x^4}{4}[ln(x)]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}ln(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right)\right) + C$$

$$\boxed{\therefore \int x^3[ln(x)]^2dx = \frac{x^4}{4}[ln(x)]^2 - \frac{x^4}{8}ln(x) + \frac{x^4}{32} + C\ ;\ C \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\therefore \int x^3[ln(x)]^2dx = \frac{x^4}{4}\left([ln(x)]^2 - \frac{1}{2}ln(x) + \frac{1}{8}\right) + C\ ;\ C \in \mathbb{R}}$$

3. (6 PUNTOS) Dada la función h tal que:

$$\boldsymbol{h(x) = \int_{2}^{\sqrt[3]{x}} cos(\pi\, u^2)du}$$

Determine la pendiente m_t de la recta tangente a h en el punto cuya abscisa es 8.

Solución:

Para determinar la pendiente requerida, primero se debe obtener $h'(x)$, utilizando el PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{\sqrt[3]{x}} cos(\pi\, u^2)du\right)$$

$$h'(x) = cos\left(\pi\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

$$h'(x) = cos\left(\pi\, x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$h'(x) = cos\left(\pi\, x^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$h'(x) = \frac{cos\left(\pi\,\sqrt[3]{x^2}\,\right)}{3\,\sqrt[3]{x^2}}$$

Para obtener el valor de la pendiente m_t de la recta tangente, se evalúa la abscisa dada $x = 8$ y se simplifica:

$$m_t = h'(8) = \frac{cos\left(\sqrt[3]{8^2}\,\pi\,\right)}{3\,\sqrt[3]{8^2}} = \frac{cos\left(\left((2^{\cancel{3}})^2\right)^{1/\cancel{3}}\,\pi\,\right)}{3\,\left((2^{\cancel{3}})^2\right)^{1/\cancel{3}}} = \frac{cos(4\pi)}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\therefore\, m_t = \frac{1}{12}}$$

4. (8 PUNTOS) Aplicando las propiedades de la integral definida, evalúe:

(a) (4 PUNTOS) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x-1|dx$

Solución:

Se descompone la función valor absoluto, con base en su definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1\,, & x \geq 1 \\ -(x-1)\,, & x < 1 \end{cases}$$

Se aplica la PROPIEDAD ADITIVA de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^{2} |x-1|dx = \int_{-1}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx$$

$$\int_{-1}^{2} |x-1|dx = \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$\int_{-1}^{2} |x-1|dx = \left(1 - \frac{1}{2}(1^2)\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(2^2) - 2\right) - \left(\frac{1}{2}(1^2) - 1\right)$$

$$\int_{-1}^{2} |x-1|dx = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^{2} |x-1|dx = \frac{5}{2}}$$

(b) (4 PUNTOS) $\displaystyle\int_{0}^{24\pi} |sen(x)|dx$

Solución:

La función $y = sen(x)$ tiene período fundamental $T = 2\pi$. Para la función en el integrando $|sen(x)|$, el período fundamental se reduce a la mitad, esto es, π.

Por lo que:

$$\int_{0}^{24\pi} |sen(x)|dx = \underbrace{\int_{0}^{\pi} |sen(x)|dx + \int_{\pi}^{2\pi} |sen(x)|dx + \cdots + \int_{23\pi}^{24\pi} |sen(x)|dx}_{24\ veces}$$

Considerando la periodicidad, se suman las integrales; y, dado que la función $y = sen(x)$ es positiva en el intervalo $[0, \pi]$, se reemplaza $|sen(x)|$ como $sen(x)$:

$$\int_{0}^{24\pi} |sen(x)|dx = 24\left(\int_{0}^{\pi} |sen(x)|dx\right) = 24\left(\int_{0}^{\pi} sen(x)dx\right)$$

Se evalúa la integral definida:

$$\int_{0}^{24\pi} |sen(x)|dx = 24\big(-cos(x)\big)\Big|_{0}^{\pi} = -24\big(cos(x)\big)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$\int_{0}^{24\pi} |sen(x)|dx = -24\big(cos(\pi) - cos(0)\big) = -24(-1-1) = -24(-2)$$

$$\boxed{\therefore \int_{0}^{24\pi} |sen(x)|dx = 48}$$

5. (6 PUNTOS) Dada la siguiente integral impropia:

$$\boldsymbol{I = \int_{0}^{+\infty} e^{x-e^{x}} dx}$$

(a) (1 PUNTO) Indique su definición mediante el límite correspondiente.
(b) (2 PUNTOS) Obtenga la familia de antiderivadas para la función en el integrando.
(c) (3 PUNTOS) Evalúe la integral impropia, y concluya, si converge o diverge.

Solución:

Se trata de una integral impropia con un límite de integración infinito, por lo que:

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{x-e^{x}} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{x-e^{x}} dx$$

Se aplica una de las propiedades de los exponentes a la función en el integrando:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^x e^{-e^x} dx$$

Se emplea la Técnica de Sustitución o Cambio de Variable para obtener la familia de antiderivadas de la función en el integrando:

$$u = -e^x \quad \to \quad du = -e^x\, dx$$

$$\int e^x e^{-e^x} dx = -\int e^{-e^x}(-e^x dx) = -\int e^u du = -e^u + C = -e^{-e^x} + C$$

$$\int e^x e^{-e^x} dx = -\frac{1}{e^{e^x}} + C$$

Se evalúa la antiderivada en los extremos y se obtiene el límite correspondiente:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^x e^{-e^x} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^{e^x}} \right)\Bigg|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^{e^b}} + \frac{1}{e^{e^0}} \right)$$

$$I = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^{e^b}} + \frac{1}{e^1} \right) = -\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{e^{e^b}} + \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{e} = -\underbrace{\frac{1}{e^{+\infty}}}_{0} + \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\therefore I = \frac{1}{e}}$$

Con lo cual, se concluye que la integral impropia es convergente.

6. (10 Puntos) Calcule el área A de la siguiente región R definida en el plano cartesiano:

$$\boldsymbol{R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4 - x \le y \le 4 - (x-2)^2 \ \wedge (1 \le x \le 3)\}}$$

Para el efecto, realice lo siguiente:

(a) (3 Puntos) Bosqueje la región R en el plano cartesiano adjunto, identificando puntos característicos y etiquetas adecuadas.
(b) (3 Puntos) Dibuje la(s) franja(s) representativa(s) y establezca la(s) expresión(es) para el cálculo de su(s) área(s).
(c) (4 Puntos) Plantee y evalúe la(s) integral(es) definida(s) correspondiente(s) para el cálculo del área A.

Solución:

La región referida se establece en el primer cuadrante, considerando que en ella intervienen: la parábola cóncava hacia abajo, con vértice en $V(2, 4)$, cuyas intersecciones con el eje X se presentan cuando $x = 0$ o $x = 4$; dos rectas verticales en $x = 1$ y $x = 3$;

y, una recta oblicua con pendiente -1 con puntos de intersección con los ejes en $(4, 0)$ y $(0, 4)$.

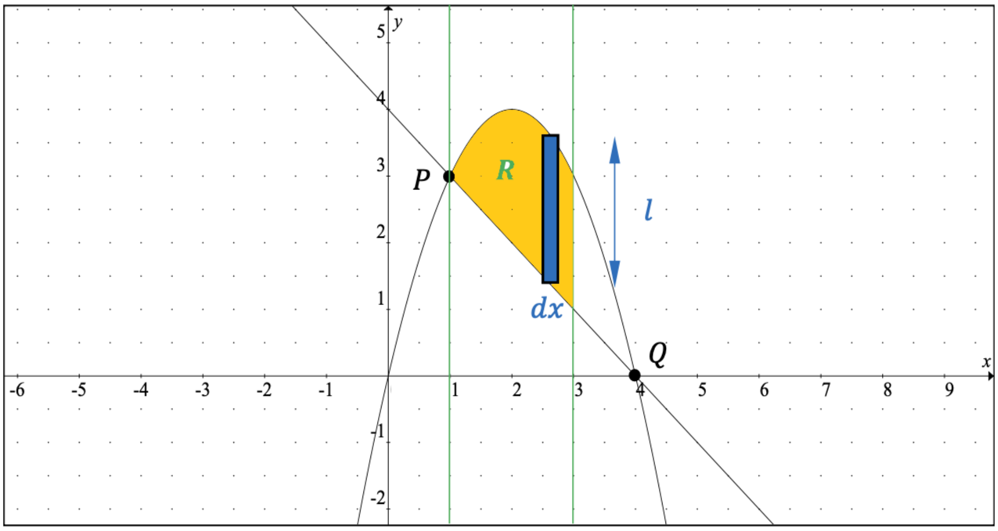
Luego, se determinan las coordenadas de los puntos de intersección entre las funciones que limitan la región:

$$\begin{gathered} 4 - x = 4 - (x-2)^2 \\ x = (x-2)^2 \\ x = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \\ (x-1)(x-4) = 0 \\ (x = 1) \vee (x = 4) \end{gathered}$$

Evaluando alguna de las dos funciones se obtienen las ordenadas respectivas, y, por ende, los pares ordenados que representan los puntos de intersección entre ambas funciones:

$$P(1, 3) \wedge Q(4, 0)$$

La representación gráfica de la región R se muestra a continuación:



Se establece la expresión para el área de la franja representativa:

$$\begin{gathered} dA = l\,dx \\ dA = \left(y_{sup} - y_{inf}\right)dx \\ dA = \left([\cancel{4} - (x-2)^2] - (\cancel{4} - x)\right)dx \\ dA = (-[x^2 - 4x + 4] + x)dx \\ dA = (-x^2 + 5x - 4)dx \;\; ; \;\; x \in [1, 3] \end{gathered}$$

Luego, el área A de la región, se plantea y se calcula así:

$$A = \int_1^3 (-x^2 + 5x - 4)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]\Big|_1^3$$

$$A=\left(-\frac{1}{3}(27)+\frac{5}{2}(9)-4(3)\right)-\left(-\frac{1}{3}(1)+\frac{5}{2}(1)-4(1)\right)$$

$$A=-9+\frac{45}{2}-12+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4$$

$$A=-17+\frac{40}{2}+\frac{1}{3}=-17+20+\frac{1}{3}=3+\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\therefore A=\frac{10}{3}u^2}$$

7. (8 PUNTOS) En una empresa, se requiere reemplazar, con una varilla de acero, un tramo de la línea de producción, para lo cual, se ha modelado la forma de dicho tramo, a escala real, según la siguiente curva C dada en coordenadas paramétricas:

$$\boldsymbol{C}:\ \begin{cases} \boldsymbol{x(t)=2t^2} \\ \boldsymbol{y(t)=\frac{4}{3}t^3} \end{cases} \quad ; \quad \boldsymbol{0\le t\le \sqrt{3}}$$

Si x e y están dadas en $metros$ y además el proveedor cuenta con varillas de acero que miden 6, 9 o 12 $metros$ de longitud, determine mediante el cálculo correspondiente, cuál es la varilla que se debe adquirir.

Solución:

Se identifica la necesidad de calcular la longitud del tramo por reemplazar, como la longitud L de la curva paramétrica C, en el intervalo dado.

La longitud L de la curva se calculará con la expresión:

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Se construye la expresión subradical, obteniendo las derivadas, elevándolas al cuadrado y sumándolas:

$$\frac{dx}{dt}=4t \qquad\Big|\qquad \frac{dy}{dt}=4t^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(4t)^2+(4t^2)^2=16t^2+16t^4=16t^2(1+t^2)$$

Por la definición de valor absoluto; cuando $t \in [\,0, \sqrt{3}\,]$, se cumple que $|t| = t$. Luego, reemplazando en el integrando, se tiene que:

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{16t^2(1+t^2)}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} 4|t|\sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} 4t\sqrt{1+t^2}\, dt$$

Se evalúa la integral definida mediante la TÉCNICA DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE:

$$u = 1 + t^2 \quad \to \quad du = 2t\, dt$$

$$\begin{cases} t = 0 & \to \quad u = 1 \\ t = \sqrt{3} & \to \quad u = 4 \end{cases}$$

$$L = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}\,(2t\, dt) = 2\int_1^4 \sqrt{u}\, du = 2\int_1^4 u^{1/2}\, du$$

$$L = 2\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{4}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{4}{3}(8-1)$$

$$\boxed{\therefore L = \frac{28}{3}\, m \approx 9.33\, m}$$

Con base en el cálculo realizado, se recomienda la adquisición de una varilla que mida 12 $metros$ de longitud.