Escuela Superior Politécnica del Litoral

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
EXAMEN FINAL DE CÁLCULO VECTORIAL
SOLUCIÓN Y RÚBRICA

GUAYAQUIL, 29 DE AGOST0 DE 2022
HORARIO: 11H00 a 13H00

C O M P R O M I S O   D E   H O N O R

Yo, ____ al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte frontal del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas DEBO DESARROLLARLOS de manera ordenada, en el espacio correspondiente en el cuadernillo de ejercicios.

Firmo como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican a continuación.

Firma: _______________________________

N° cédula: _______________________________

"Como aspirante a ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar"

I N S T R U C C I O N E S

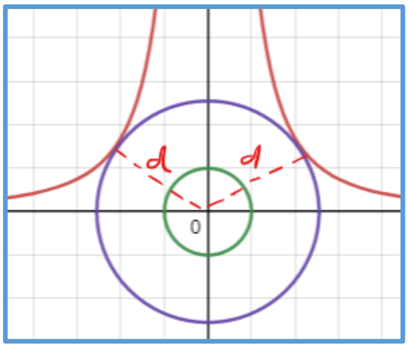
1. Abra el examen una vez que el profesor de la orden de iniciar.
2. Escriba sus datos de acuerdo a lo solicitado en el compromiso de honor, incluya su Número de Documento y su firma de responsabilidad.
3. Verifique que el examen conste de 5 preguntas de desarrollo.
4. El valor de cada pregunta es 20 puntos.
5. Desarrolle todas las preguntas del examen en un tiempo máximo de 2 horas.
6. No está permitido el uso de dispositivo de cálculo alguno para el desarrollo del examen.
7. NO consulte con sus compañeros, el examen es estrictamente personal.
8. En caso de tener alguna consulta, levante la mano hasta que el profesor pueda atenderlo.

1. Determine los puntos de la curva plana $x^2\,y = 54$ que se encuentran más cercanos al origen.

La distancia de un punto (x, y) al origen es $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Para hallar los puntos de la curva debemos optimizar $d(x,y)$ sujeta a la restricción $x^2y = 54$, es decir, $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a $g(x,y) = x^2y - 54 = 0$

Graficando la situación:



Aplicando el método de Lagrange tenemos:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x\,y & (1) \\ 2y = \lambda x^2 & (2) \\ x^2y = 54 & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (1):

$$2x = 2\lambda xy \Rightarrow x(\lambda y - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad \lambda y = 1$$

Descartamos $x = 0$ porque no satisface la ecuación de la curva, reemplazando entonces $\lambda = \frac{1}{y}$, reemplazando en (2), tenemos:

$2y = \lambda x^2 \Rightarrow 2y = \frac{1}{y}x^2 \Rightarrow x^2 = 2y^2$ (4)

Reemplazando en (3):

$$x^2y = 54 \Rightarrow 2y^3 = 54 \Rightarrow y^3 = 27 \Rightarrow y = 3$$

Reemplazando en (4):

$$x^2 = 2y^2 \Rightarrow x^2 = 18 \quad x = \pm 3\sqrt{2}$$

Los candidatos son: $P = (3\sqrt{2}, 3)$ y Q $(-3\sqrt{2}, 3)$

Comparamos con un punto cercano que satisface la restricción, para confirmar que son mínimos:

Sea $y = 9 \Rightarrow x^2 \cdot 9 = 54 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, y su valor $f\left(\sqrt{6}, 9\right) = 6 + 81 = 87$

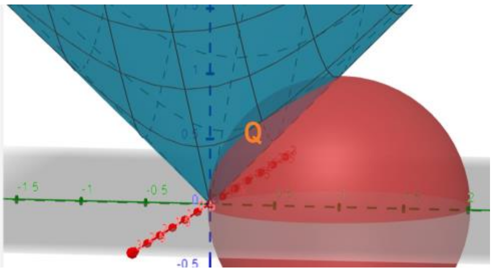
Y la imagen de P y Q es $f\left(3\sqrt{2}, 3\right) = 9(4) + 9 = 45 \leq 87$, por lo tanto, P Y Q están más cerca del origen.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo optimizar una función escalar sujeta a restricciones.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante demuestra ninguno o poco criterio de resolución, no reconoce la función Lagrangiana.	El estudiante plantea la función Lagrangiana y halla las derivadas parciales de forma correcta.	El estudiante plantea correctamente el sistema de ecuaciones para determinar el punto crítico, pero presenta leves errores de cálculo en la obtención del punto crítico.	El estudiante plantea correctamente el sistema de ecuaciones, determina el punto crítico. Escoge un punto auxiliar y halla el valor mínimo de la función objetivo de manera correcta.
	0-3	4-8	9-14	15-20

2. Utilizando integrales triples y un apropiado cambio de sistemas de coordenadas, determine el volumen del sólido Q limitado por las paredes internas de las superficies $S_1: z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $S_2: x^2+z^2 = 2y - y^2$

Note que S_1 es un cono con vértice en el origen. Por otro lado, S_2 puede escribirse como $x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$ y por tanto es una esfera de radio 1 con vértice en $(0,1,0)$. Luego, Q es el sólido que está dentro del cono y de la esfera como se aprecia en el gráfico:



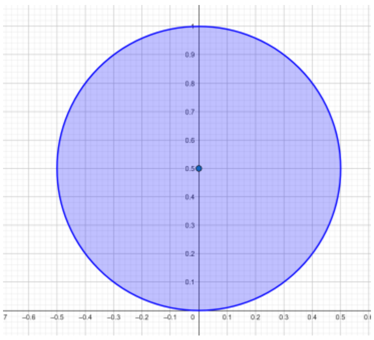
Dada la dificultad que supone calcular las integrales que pueden plantearse en coordenadas cartesianas y cilíndricas, se decide utilizar coordenadas esféricas.
Es conocido que S_1 en coordenadas esféricas tiene ecuación $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
Llevamos a coordenadas esféricas a la superficie S_2 como sigue:

$$x^2+y^2+z^2 = 2y$$
$$\rho^2 = 2\rho sen(\varphi)sen(\theta)$$
$$\rho = 2sen(\varphi)sen(\theta)$$

Note que la proyección de Q sobre el plano XY podemos obtenerla igualando las ecuaciones cartesianas del cono y la esfera. Sustituyendo $z^2 = x^2+y^2$ de S_1 en S_2 se obtiene:

$$x^2+z^2 = 2y - y^2$$
$$x^2+x^2+y^2 = 2y-y^2$$
$$x^2+y^2-y = 0$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Cuya gráfica es una circunferencia en el plano XY centrada en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ de radio $\frac{1}{2}$, como se muestra en la figura:



Donde podemos observar que para el sólido Q, $0 \le \theta \le \pi$.

El cálculo del volumen de Q lo haremos como sigue:

$$V=\iiint_Q dv=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2sen(\varphi)sen(\theta)}\rho^2 sen(\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^4(\varphi)sen^3(\theta)d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\pi} sen^3(\theta)\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^4(\varphi)\, d\varphi=\frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3\pi-8}{32}\right)=\frac{3\pi-8}{9}\ \ u^3$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe como calcular el volumen de un sólido usando integrales triples con cambio a coordenadas esféricas.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe identificar el sólido Q, por lo tanto plantea mal todo el problema.	Sabe identificar el sólido Q, plantea la integral triple pero no usa coordenadas esféricas, por lo cual no consigue calcular el volumen.	Sabe identificar el sólido Q, plantea la integral triple usando coordenadas esféricas pero comete errores en los límites de integración, jacobiano o en el cálculo de las integrales.	Sabe identificar el sólido Q, plantea la integral triple usando coordenadas esféricas con los límites de integración correctos, coloca el jacobiano de la transformación y resuelve correctamente las integrales obteniendo el volumen solicitado.
	0-3	4-8	9-14	15-20

3. Considere el campo vectorial:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^2 \cos(x) + z^3)\hat{\imath} + 2y\, sen(x)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

a) Determine si el campo es conservativo y en caso de serlo, halle su función potencial.

b) Sea $\boldsymbol{G}(x,y,z) = \boldsymbol{F}(x,y,z) + (z^3, 0, 0)$. Determine el trabajo que desarrolla el campo $\boldsymbol{G}$ para trasladar una partícula a través de la curva Γ dada por el segmento de línea recta que une los puntos $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$.

a) Probemos que el campo es conservativo es decir $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (y^2 cos(x) + z^3) & 2ysenx & 3xz^2 + 2z \end{vmatrix} = (0-0, -(3z^2 - 3z^2), 2y\cos x - 2y \cos x)$$

$= (0,0,0) \quad \rightarrow \vec{F}$ es conservativo.

Hallamos la función potencial: $\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(x) + z^3 \rightarrow f(x,y,z) = \int (y^2 \cos(x) + z^3)\, dx = y^2 sen(x) + xz^3 + g(y,z) + C_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\, sen(x) \rightarrow f(x,y,z) = \int 2y\, sen(x)\, dy = y^2 sen(x) + h(x,z) + C_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + 2z \rightarrow f(x,y,z) = \int (3xz^2 + 2z)\ dz = x\, z^3 + z^2 + l(x,y) + C_3$$

Aplicando superposición de soluciones:

$$f(x,y,z) = y^2 sen(x) + xz^3 + z^2 + C$$

Se comprueba rápidamente por inspección $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

(b) El trabajo de G sobre gamma está dado por $W = \iint_\Gamma G \cdot dr$, es decir:

$$\int_\Gamma (G) \cdot \mathrm{dr} = \int_\Gamma F \cdot \mathrm{dr} + \int_\Gamma (z^3, 0,0) \cdot \mathrm{dr}$$

La curva Gamma es la línea recta que une a los puntos $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$ y parametrizándola:

$$r(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} con \ \ r'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad con \ \ t \in [0,1]$$

Evaluando en el campo obtenemos (claramente el campo $(z^3, 0,0)$ no es conservativo):

$$\int_\Gamma (z^3, 0,0) \cdot dr = -\int_0^1 t^3 dt = -\frac{1}{4}$$

Dado que $\vec{F}$ es conservativo, entonces: $\int_\Gamma F \cdot dr = f(0,0,1) - f(1,1,0) = 1 - sen(1)$

Entonces:

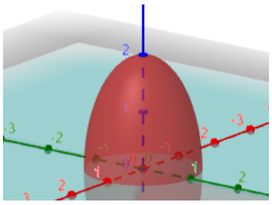
$$\int_\Gamma (G) \cdot \mathrm{dr} = \int_\Gamma F \cdot \mathrm{dr} + \int_\Gamma (z^3, 0,0) \cdot \mathrm{dr} = 1 - sen(1) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - sen(1)$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
El estudiante debe ser capaz de aplicar integrales de línea de campos vectoriales al cálculo del trabajo de un campo conservativo y no conservativo	**Inicial**	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo plantear el problema.	Calcula el rotacional del campo para demostrar que es conservativo.	Determina la función potencial correctamente y con esto justifica comprobando que el campo es conservativo.	El estudiante calcula correctamente la integral separando en dos y aplicando el teorema fundamental.
	0	1-6	7-13	14-20

4. **Considere la región Ω dada por $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\le 1$, $z\ge 0$ y un campo vectorial $F=(P,Q,R)$ con $P_x+Q_y=3$ y $R=x^2+y^2$. Utilizando el Teorema de Gauss, evalúe la integral $\oiint_S F\cdot ds$, siendo $S=\partial\Omega$ (superficie frontera de Ω) con el vector normal apuntando hacia afuera.**

En primer lugar observamos que la superficie S_1 dada por la región Ω no es cerrada, por lo tanto se le agrega la tapa S_2 correspondiente al círculo unitario en plano XY para cerrarla.



Entonces aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z=3+0=3$$

Luego: $\oiint_{\partial\Omega_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=3\iiint_\Omega dV-\oiint_{\partial\Omega_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$

Aplicando coordenadas cilíndricas para calcular el flujo a través del elipsoide, tenemos:

$$3\iiint_\Omega dV=3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=$$

$$6\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}drd\theta=4\pi$$

El flujo sobre la superficie 2 será:

$$\oiint_{\partial\Omega_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D (P,Q,x^2+y^2)\bullet(0,0,-1)ds=\iint_D -(x^2+y^2)ds$$

D es el círculo unitario, aplicando coordenadas polares:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}-\frac{r^4}{4}\Big]_0^1 d\theta=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}1d\theta=-\frac{1}{4}(2\pi)=-\frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{9\,\pi}{2}$$

Rúbrica:

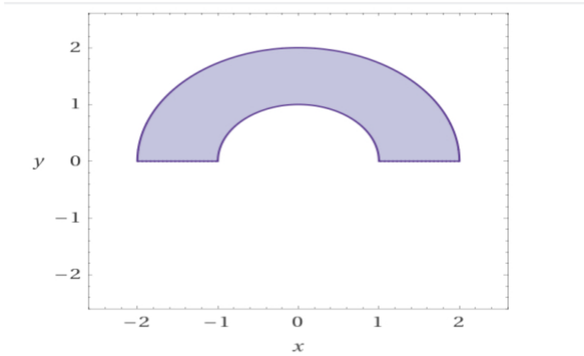
Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar teoremas que involucran campos vectoriales y aplicar teoremas de la teoría vectorial.	No sabe cómo plantear el problema.	Verifica las hipótesis del teorema de Gauss y concluye que hay que agregar la tapa S_2 para cerrar la superficie.	Aplica el teorema de Gauss correctamente implicando que la integral es equivalente a 3 veces el volumen del elipsoide menos el flujo a través de S_2.	El estudiante calcula correctamente el volumen del elipsoide directamente o aplicando cambio de variables en polares, realizando al final la resta de los dos efectos.
	0	1-5	7-13	14-20

5. **La frontera de una lámina metálica consta de los semicírculos $y = \sqrt{1-x^2}$ y $y = \sqrt{4-x^2}$ junto con las porciones del eje X que los unen. Determine el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la lámina si su densidad $\rho(x,y)$ en cualquier punto es proporcional a su distancia al origen, A continuación se proporcionan las expresiones a utilizar en la aplicación:**

Masa de la lámina: $m = \iint_R \rho(x,y)\, dA$

Centro de masa: $\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_R x\ \rho(x,y)\, dA$; $\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_R y\ \rho(x,y)\, dA$

Las condiciones indicadas proporcionan el siguiente gráfico de la lámina:



Como la densidad $\rho(x,y)$ en cualquier punto es proporcional a su distancia al origen:

$$\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ k \in R^+$$

Procedemos a calcular la masa de la lámina: $m = \iint_R k\sqrt{x^2+y^2}\ dA$

Pasando a coordenadas polares: $m = \int_0^{\pi}\int_1^2 k\, r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_1^2 k\, r^2\, dr\, d\theta = k\int_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)_1^2 d\theta$

$$= \frac{7k}{3}\ (\theta)_0^{\pi} = \frac{7k\pi}{3}$$

Para el centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_R x\, k\sqrt{x^2+y^2}\, dA = \frac{3}{7k\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 k\, r\cos(\theta)\, r\, r\, dr\, d\theta = \frac{3}{7\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 r^3\cos(\theta)\, dr\, d\theta =$$

$$\frac{3}{7\pi}\int_0^{\pi}\cos(\theta)\left(\frac{r^4}{4}\right)_1^2 d\theta = \frac{45}{28\pi}\int_0^{\pi}\cos(\theta)\ d\theta = \frac{45}{28\pi}\ (sen(\theta))_0^{\pi} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_R y\, k\sqrt{x^2+y^2}\, dA = \frac{3}{7k\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 k\, r\,\mathrm{sen}(\theta) r\, r\, dr\, d\theta = \frac{3}{7\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 r^3\mathrm{sen}(\theta)\, dr\, d\theta =$$

$$\frac{3}{7\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\theta)\left(\frac{r^4}{4}\right)_1^2 d\theta = \frac{45}{28\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\theta)\ d\theta = \frac{45}{28\pi}\ (-\cos(\theta))_0^{\pi} = \frac{45}{28\pi}\ (-\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$$

$$\frac{45}{28\pi}\ (-(-1) - (-1) = \frac{45}{28\pi}\ (2) = \frac{45}{14\,\pi}$$

Por lo tanto, el centro de masa está ubicado en el punto $\left(0,\ \frac{45}{14\,\pi}\right)$

<u>Rúbrica:</u>

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de utilizar los conceptos de integración múltiple en la resolución de problemas de ingeniería.	A pesar de estar entregadas las expresiones no sabe como plantear la asignación del enunciado del problema.	Plantea correctamente la función densidad y calcula la masa pasando a coordenadas polares.	Una vez obtenida la masa procede al cálculo de la primera y segunda componente del centro de masa pasando a coordenadas polares, o comete erorres en los cálculos.	El estudiante calcula correctamente el centro de masa solicitado o comete algún error poco significativo.
	0-2	3-8	9-18	19-20