espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2024**

PERIODO: **SEGUNDO TERMINO**

MATERIA: **Álgebra lineal**

PROFESORES: Laveglia Franca, Martin Carlos, Pastuizaca María Nela, Ramírez John, Sánchez Joffre, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

EVALUACIÓN: Segunda

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

FECHA: 23 de enero de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"*Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar*".

FIRMA: ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ___________________ ***PARALELO:*** ______

1. ***(15 Puntos)***

A continuación, encontrará 3 afirmaciones, donde debe determinar si estas son verdaderas o falsas. En cada caso debe justificar su elección, bien sea presentando alguna demostración, contraejemplo o cálculo:

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y T una transformación lineal de V en W.

a. Si una matriz A de orden nxn es invertible, entonces cero no es un autovalor de A.
b. Si u, v son dos vectores ortogonales en V, entonces $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente.
c. Sea A una representación matricial de T, entonces $A^T A$ es una matriz diagonalizable de manera ortogonal.

2. *(20 Puntos)*

Sea $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por: $T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \\ a+b-c \end{pmatrix}$.

a. Determine si T es un isomorfismo, justifique su respuesta.

b. Obtenga la regla de correspondencia de T^{-1}, en caso de que T sea un isomorfismo.

3. (25 Puntos)

Sea $H = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / p'(2) = p(1)\}$ un subespacio vectorial de $V = P_2(\mathbb{R})$, con el producto interno canónico en V.

a. Determine $H^{\perp}$.

b. Encuentre una base ortonormal para H.

c. Dado $r(x) = x^2 - 2x + 1$, encuentre los polinomios $h(x) \in H$ y $s(x) \in H^{\perp}$, tal que $r(x) = h(x) + s(x)$.

4. *(20 Puntos)*

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$*, determine los valores de* $k \in \mathbb{R}$ *para los cuales la matriz* A*:*

a. *Sea diagonalizable.*

b. *No sea diagonalizable.*

5. (20 Puntos)

Sea V un espacio vectorial real con un producto interno definido y H un subespacio vectorial de V. Demostrar que:

a. $H^{\perp}$ es un subespacio de V.

b. $H \cap H^{\perp} = \{0_V\}$.