

RUBRICA DEL TERCER EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL PAO 2 2025-2026

TEMA 1: Considere la función escalar $z = yf(u)$, siendo $u = x^2 - y^2$, con f diferenciable en R .

a) Simplifique la expresión:

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y}$$

y escriba la nueva expresión únicamente en términos de x , y o z .

b) Usando la parte a), deduzca el valor de:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), \text{ siendo el punto } (x_0, y_0) = (2, 2) \text{ y } f(0) = \sqrt{\pi}.$$

Solución:

(a) Por regla de la cadena generalizada se sigue que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f_u u_x = 2xy f_u.$$

Similarmente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(u) + y f_u u_y = f(u) - 2y^2 f_u.$$

Sustituyendo en la expresión dada y simplificando, se obtiene:

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = y^2(2xy f_u) + xy(f(u) - 2y^2 f_u) = xyf(u) = xz.$$

Hasta 10 puntos.

(b) En el punto $(x_0, y_0) = (2, 2)$ se deduce que $z_0 = 2\sqrt{\pi}$. Así,

$$y_0^2 \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + x_0 y_0 \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0 z_0$$

equivalente a: $4 \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + 4 \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 2 \times 2\sqrt{\pi}.$

Despejando, se deduce que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \sqrt{\pi}.$$

Hasta 20 puntos.

TEMA 2: Sea el plano cuya ecuación es: $\pi : 2x - y + z = 11$ y el punto $P(1, 2, -1)$.

Determine:

(a) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por P .

(b) El punto de intersección de esta recta con el plano π .

(c) La distancia del punto P al plano π .

Solución:

(a) Recta perpendicular al plano que pasa por P: El vector normal al plano es $n = (2, -1, 1)$. La recta perpendicular al plano que pasa por P tiene ecuaciones paramétricas:

$$L : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Hasta 6 puntos.

(b) Sustituyendo las ecuaciones de la recta en el plano: $2(1 + 2t) - (2 - t) + (-1 + t) = 11$. Simplificando se obtiene que: $t = 2$, reemplazando en la ecuación de la recta, finalmente el punto $(5, 0, 1)$, es el punto de intersección. Hasta 14 puntos.

(c) Para la parte última:

Sustituyendo $P(1, 2, -1)$:

$$d(P, \pi) = \frac{|2(1) - (2) + (-1) - 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 2 - 1 - 11|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

$$\boxed{d(P, \pi) = 2\sqrt{6}}.$$

Hasta 20 puntos.

TEMA 3: Usando el teorema de la divergencia de Gauss, calcule el flujo que genera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, $\forall (x, y, z) \in R^3$, a través de la superficie cerrada S, que es la frontera del sólido E limitado por: $x^2 + y^2 = 1$; $z = 1$; $z = -1$, orientada hacia el exterior de la región que limita.

Solución: Dado $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, entonces $\nabla \cdot F = x^2 + y^2$. Hasta 5 puntos.
El sólido E está dado por: $x^2 + y^2 \leq 1$; $-1 \leq z \leq 1$. Así se obtiene:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_E (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r^2 (r dz dr d\theta).$$

Es decir,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r^3 dz dr d\theta.$$

Hasta 13 puntos.

Resolviendo esta integral triple resulta en:

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \pi}.$$

Hasta 20 puntos.

TEMA 4: Sea C el contorno cerrado acotado por la recta $y = x - 2$ y la parábola $y^2 + x = 4$. Calcular la integral:

$$\oint_C y \, ds$$

Solución: A partir del bosquejo de la curva cerrada C :

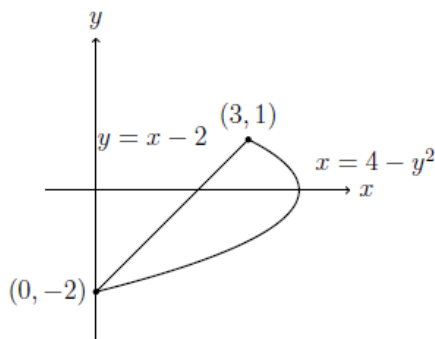


Figura. Contorno cerrado C .

Notemos que la integral corresponde a una integral de línea escalar, la cual podemos escribir como:

$$\int_C y \, ds = \int_{C_1} y \, ds + \int_{C_2} y \, ds,$$

donde C_1 es la recta y C_2 la parábola.

Hasta 4 puntos.

Plantea cada una de las respectivas integrales de línea, esto es, para C_1 :

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y \, ds &= \int_{-1}^2 (-t)\sqrt{2} \, dt = -\sqrt{2} \int_{-1}^2 t \, dt. \\ &= -\sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Hasta 10 puntos.

Así mismo para C_2 :

$$\int_{C_2} y \, ds = \int_{-2}^1 t\sqrt{4t^2 + 1} \, dt.$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 t\sqrt{4t^2+1} dt &= \frac{1}{8} \int_{17}^5 u^{1/2} du = -\frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{17}^5 \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 17^{3/2}).\end{aligned}$$

Hasta 16 puntos.

Finalmente, presenta la suma de las dos integrales:

$$\int_C y ds = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12} (5^{3/2} - 17^{3/2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$

Hasta 20 puntos.

TEMA 5: Empleando integrales triples, calcule el volumen del sólido Q acotado por las superficies: $z = x^2 + y^2$; $z = 1$; $z = 4$. Realice un bosquejo gráfico de Q.

Solución: De acuerdo al bosquejo gráfico de **Q**, se puede determinar que su volumen está dado por la diferencia de dos volúmenes: el que acota el paraboloide con el plano $z = 4$ menos el que acota el paraboloide con el plano $z = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}V_Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r dz dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2r^2 - r^4/4)|_0^2 d\theta - \int_0^{2\pi} (r^2/2 - r^4/4)|_0^1 d\theta \\ &= 2\pi \left(8 - 4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= 2\pi \left(4 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{15\pi}{2} [u^3].\end{aligned}$$

Realiza el bosquejo del sólido: Hasta 4 puntos.

Plantea correctamente la ecuación del volumen usando integrales triples: Hasta 12 puntos.

Resuelve las integrales planteadas de manera correcta e identifica el resultado como el volumen del sólido: Hasta 20 puntos.