

Año:	2025	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Colón Mario Céleri
Evaluación:	Primera	Fecha:	24 de noviembre de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar”.

Firma: _____ Número de matrícula: _____ Paralelo: _____

1. (8 puntos) Halle el valor de y_0 para el cual la solución del problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3 \operatorname{sen} t, \quad y(0) = y_0$$

permanece finito cuando $t \rightarrow \infty$.

Solución: Multiplicamos la ecuación dada por el factor integrante e^{-t} para obtener

$$\frac{d}{dt} (e^{-t}y(t)) = e^{-t}(1 + 3 \operatorname{sen} t).$$

Luego,

$$y(t) = ce^t + e^t \int e^{-t}(1 + 3 \operatorname{sen} t) dt = ce^t - \frac{1}{2}(2 + 3 \cos t + 3 \operatorname{sen} t).$$

De $y(0) = y_0$ se obtiene que $c = y_0 + \frac{5}{2}$ y así

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{5}{2}\right) e^t - \frac{1}{2}(2 + 3 \cos t + 3 \operatorname{sen} t).$$

Por tanto, la condición inicial buscada es $y_0 = -\frac{5}{2}$.

2. En un laboratorio se dispone de un tanque bien agitado con 50 litros de agua pura (sin sal) en el instante $t = 0$. A partir de ese momento:

- Entra al tanque una solución de agua con sal a razón de 5 L/min, con una concentración constante de 0,2 kg de sal por litro.
- La mezcla dentro del tanque se considera perfectamente homogénea en todo momento.
- Sale del tanque una solución (la misma mezcla) a razón de 5 L/min.

Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kg) contenida en el tanque en el instante t (en minutos).

(a) (3 puntos) Plantee la ecuación diferencial que modela la variación temporal de la cantidad de sal $y(t)$ en el tanque. Especifique claramente la expresión de:

- la tasa de entrada de sal,
- la tasa de salida de sal,

en función de $y(t)$.

(b) (3 puntos) Resuelva la ecuación diferencial obtenida en el inciso anterior, usando la condición inicial adecuada. Escriba una expresión explícita para $y(t)$ y para la concentración de sal en el tanque $c(t)$ (en kg/L).

(c) Determine:

- I. (2 puntos) el límite de la concentración $c(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$,
- II. (2 puntos) el instante (aproximado) en el que la concentración en el tanque alcanza por primera vez 0,15 kg/L.

Comente brevemente por qué, durante los primeros instantes, la concentración de salida del tanque es diferente de la concentración de entrada, a pesar de que el flujo de volumen es el mismo.

Solución: El volumen del tanque se mantiene constante en

$$V = 50 \text{ L},$$

ya que el caudal de entrada y de salida son ambos de 5 L/min.

Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kg) en el tanque en el instante t .

(a) ■ **Tasa de entrada de sal:**

$$\text{Entrada de sal} = (\text{caudal de entrada}) \times (\text{concentración de entrada}) = 5 \text{ L/min} \times 0,2 \text{ kg/L} = 1 \text{ kg/min}.$$

■ **Tasa de salida de sal:** la concentración dentro del tanque en el instante t es

$$c(t) = \frac{y(t)}{V} = \frac{y(t)}{50} \text{ kg/L}.$$

El caudal de salida es de 5 L/min, por lo que

$$\text{Salida de sal} = 5 \text{ L/min} \times \frac{y(t)}{50} \text{ kg/L} = \frac{5}{50} y(t) = \frac{y(t)}{10} \text{ kg/min}.$$

De este modo, la ecuación diferencial que modela el proceso es

$$\frac{dy}{dt} = \text{entrada} - \text{salida} = 1 - \frac{y(t)}{10},$$

con condición inicial

$$y(0) = 0,$$

pues el tanque contiene inicialmente agua pura.

(b) La ecuación diferencial es lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{10}y = 1.$$

Podemos resolverla, por ejemplo, usando el método estándar de ecuaciones lineales:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{10}y = 1.$$

El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{10} dt} = e^{t/10}.$$

Multiplicando toda la ecuación por $\mu(t)$,

$$e^{t/10} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{10} e^{t/10} y = e^{t/10}.$$

El lado izquierdo es la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt}(e^{t/10} y(t)) = e^{t/10}.$$

Integramos ambos lados:

$$e^{t/10} y(t) = \int e^{t/10} dt = 10e^{t/10} + C,$$

donde C es la constante de integración. Dividiendo entre $e^{t/10}$,

$$y(t) = 10 + Ce^{-t/10}.$$

Usando la condición inicial $y(0) = 0$,

$$0 = 10 + Ce^0 = 10 + C \Rightarrow C = -10.$$

Por lo tanto,

$$y(t) = 10 - 10e^{-t/10} = 10(1 - e^{-t/10}) \text{ kg}.$$

La concentración en el tanque es

$$c(t) = \frac{y(t)}{50} = \frac{10}{50}(1 - e^{-t/10}) = 0,2(1 - e^{-t/10}) \text{ kg/L}.$$

(c) 1. Tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/10} = 0,$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0,2(1 - 0) = 0,2 \text{ kg/L}.$$

Es decir, la concentración en el tanque tiende a la misma concentración de la solución de entrada.

II. $c(t) = 0,15 \text{ kg/L}$.

Buscamos t tal que

$$c(t) = 0,2(1 - e^{-t/10}) = 0,15.$$

Entonces

$$1 - e^{-t/10} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75,$$

de donde

$$e^{-t/10} = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Aplicando logaritmos naturales,

$$-\frac{t}{10} = \ln(0,25) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4),$$

por lo que

$$t = 10 \ln(4) \text{ min} \approx 13,86 \text{ min}.$$

Comentario sobre la diferencia de concentraciones al inicio. Al comienzo, el tanque contiene agua pura ($c(0) = 0$), mientras que la solución que entra tiene concentración $0,2 \text{ kg/L}$. Aunque el caudal de entrada y salida es el mismo, la mezcla interna parte de una concentración menor y va aumentando gradualmente. Por ello, durante los primeros instantes, la concentración de salida (igual a la concentración interna del tanque) es menor que la concentración de entrada; sólo cuando se alcanza el estado estacionario ambas coinciden.

3. Considere el espacio vectorial P_2 de todos los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Sea $k \in \mathbb{R}$ un número real y definamos los siguientes polinomios en P_2 :

$$\begin{aligned}p_1(t) &= 1 + t, \\p_2(t) &= t + t^2, \\p_3(t) &= 1 + kt^2, \\q(t) &= 2 + 3t + 4t^2.\end{aligned}$$

Considere el conjunto $S_k = \{p_1, p_2, p_3\} \subset P_2$.

- (a) (3 puntos) Determine, en función de k , si el polinomio q puede escribirse como combinación lineal de los polinomios de S_k , es decir, si existen números reales α, β, γ tales que:

$$q(t) = \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) + \gamma p_3(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En caso afirmativo, exprese α, β, γ en función de k . Indique claramente para qué valores de k esto es posible.

- (b) (3 puntos) ¿Para qué valores de k el conjunto S_k genera el espacio vectorial P_2 ? Justifique su respuesta escribiendo el sistema lineal asociado (en la base $\{1, t, t^2\}$ de P_2) y analizando la condición sobre k .
- (c) (3 puntos) ¿Para qué valores de k los polinomios de S_k son linealmente independientes? Relacione su respuesta con el resultado obtenido en el inciso anterior y concluya, si es el caso, para qué valores de k el conjunto S_k es una base de P_2 .
- (d) (3 puntos) Para el valor de k en el cual S_k no genera P_2 , encuentre explícitamente un polinomio $r \in P_2$ tal que el conjunto

$$S_k \cup \{r\}$$

genere P_2 . A partir de dicho conjunto, seleccione una subfamilia de tres polinomios que forme una base de P_2 y justifique su elección.

Solución: Trabajaremos en la base canónica de P_2 , es decir, $\{1, x, x^2\}$. En esta base, la coordenada de un polinomio

$$a + bx + cx^2$$

es el vector columna $(a, b, c)^T$.

- (a) Buscamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$q(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x).$$

Sustituimos:

$$\alpha(1 + x) + \beta(x + x^2) + \gamma(1 + kx^2) = \alpha + \alpha x + \beta x + \beta x^2 + \gamma + \gamma kx^2.$$

Agrupando términos semejantes,

$$(\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta)x + (\beta + k\gamma)x^2.$$

Este polinomio debe coincidir con

$$q(x) = 2 + 3x + 4x^2.$$

Por lo tanto, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 2, \\ \alpha + \beta = 3, \\ \beta + k\gamma = 4. \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$\alpha = 2 - \gamma.$$

Sustituyendo en la segunda,

$$(2 - \gamma) + \beta = 3 \Rightarrow \beta - \gamma = 1 \Rightarrow \beta = 1 + \gamma.$$

Sustituyendo ahora en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} \beta + k\gamma = 4 &\Rightarrow (1 + \gamma) + k\gamma = 4, \\ 1 + \gamma(1 + k) = 4 &\Rightarrow \gamma(1 + k) = 3. \end{aligned}$$

Si $1 + k \neq 0$, es decir, si $k \neq -1$, obtenemos

$$\gamma = \frac{3}{1 + k}.$$

Entonces

$$\beta = 1 + \gamma = 1 + \frac{3}{1 + k} = \frac{1 + k + 3}{1 + k} = \frac{k + 4}{k + 1},$$

y

$$\alpha = 2 - \gamma = 2 - \frac{3}{1 + k} = \frac{2(1 + k) - 3}{1 + k} = \frac{2k - 1}{k + 1}.$$

Conclusión:

- Si $k \neq -1$, el polinomio $q(x)$ se puede escribir como combinación lineal de $\{p_1, p_2, p_3\}$, con

$$\alpha = \frac{2k - 1}{k + 1}, \quad \beta = \frac{k + 4}{k + 1}, \quad \gamma = \frac{3}{k + 1}.$$

- Si $k = -1$, la ecuación $\gamma(1 + k) = 3$ se vuelve $0 \cdot \gamma = 3$, lo cual es imposible; en este caso, $q(x)$ **no** se puede expresar como combinación lineal de los polinomios de S_k .

(b) Escribimos las coordenadas de los polinomios en la base $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{aligned} p_1(x) = 1 + x &\Rightarrow [p_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p_2(x) = x + x^2 &\Rightarrow [p_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ p_3(x) = 1 + kx^2 &\Rightarrow [p_3] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Formamos la matriz cuyas columnas son estos vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

El conjunto S_k genera $P_2 \cong \mathbb{R}^3$ si y sólo si las columnas de A generan $\mathbb{R}^3$, es decir, si $\det(A) \neq 0$. Calculamos el determinante:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 0 \cdot (\dots) + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot k - 0 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = k + 1.$$

Por tanto,

$$\det(A) = k + 1.$$

- Si $k \neq -1$, entonces $\det(A) \neq 0$ y las columnas de A generan $\mathbb{R}^3$. En consecuencia, S_k genera P_2 .
- Si $k = -1$, entonces $\det(A) = 0$ y las columnas de A no generan $\mathbb{R}^3$. En este caso, S_k no genera P_2 .

(c) Los polinomios de S_k son linealmente independientes si y sólo si las columnas de la matriz A son linealmente independientes, lo cual ocurre exactamente cuando $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto:

$$S_k \text{ es linealmente independiente} \Leftrightarrow k \neq -1.$$

Como $\dim(P_2) = 3$, concluimos:

- Si $k \neq -1$, entonces S_k es un conjunto de 3 polinomios linealmente independientes que genera P_2 . Por tanto, S_k es una **base** de P_2 .
- Si $k = -1$, entonces S_k es un conjunto linealmente dependiente que no genera P_2 y, en consecuencia, no puede ser base.

(d) El caso problemático es $k = -1$. En este caso,

$$p_3(x) = 1 - x^2,$$

y el conjunto es

$$S_{-1} = \{p_1, p_2, p_3\} = \{1 + x, x + x^2, 1 - x^2\}.$$

En coordenadas,

$$[p_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [p_3] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que

$$p_3(x) = p_1(x) - p_2(x),$$

pues

$$p_1(x) - p_2(x) = (1 + x) - (x + x^2) = 1 - x^2 = p_3(x).$$

Por lo tanto, S_{-1} es linealmente dependiente y de hecho

$$\text{gen}(S_{-1}) = \text{gen}\{p_1, p_2\},$$

que es un subespacio de dimensión 2 de P_2 .

Para completar a una base, buscamos un polinomio $r(x) \in P_2$ que no pertenezca a $\text{span}\{p_1, p_2\}$. Consideremos, por ejemplo,

$$r(x) = x^2.$$

Verifiquemos que $x^2 \notin \text{span}\{p_1, p_2\}$. Supongamos que existieran escalares $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) = x^2.$$

El lado izquierdo es

$$c_1(1+x) + c_2(x+x^2) = c_1 + (c_1 + c_2)x + c_2x^2,$$

cuyas coordenadas son $(c_1, c_1 + c_2, c_2)^T$. Igualando con x^2 , cuyas coordenadas son $(0, 0, 1)^T$, obtenemos:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Pero el sistema exige $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$; en la segunda ecuación tendríamos $0 + 1 = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x^2 \notin \text{span}\{p_1, p_2\}$.

Con ello, el conjunto

$$S_{-1} \cup \{r\} = \{p_1, p_2, p_3, x^2\}$$

genera P_2 . De hecho, una base de P_2 que podemos extraer de este conjunto es

$$B = \{p_1, p_2, x^2\}.$$

Comprobemos que B es linealmente independiente. En coordenadas,

$$[p_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [x^2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Formamos la matriz B con estas columnas:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\det(M_B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\{p_1, p_2, x^2\}$ es linealmente independiente. Además, al estar formada por 3 polinomios linealmente independientes en un espacio de dimensión 3, necesariamente genera P_2 , y por ello

$$B = \{p_1, p_2, x^2\}$$

es una base de P_2 .

En resumen:

- Para $k \neq -1$, el conjunto $S_k = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de P_2 .
- Para $k = -1$, S_k no genera P_2 , pero añadiendo $r(x) = x^2$ y tomando por ejemplo la subfamilia $\{p_1, p_2, x^2\}$, se obtiene una base de P_2 .

4. Una matriz, $n \times n$, se dice **mágica**, si la suma de las entradas en cada fila, columna y diagonal (principal y secundaria) es la misma. Sea W el conjunto de las matrices mágicas 2×2 .
- (a) (5 puntos) Demuestre que W es un subespacio del espacio vectorial de matrices 2×2 .
- (b) (5 puntos) Halle una base para W y determine su dimensión.

Solución:

- (a) Es claro que la matriz nula 2×2 es una matriz mágica. Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ matrices mágicas. Sean s y t números reales tales que

$$a + b = c + d = a + c = b + d = a + d = b + c = s,$$

y

$$e + f = g + h = e + g = f + h = e + h = f + g = t.$$

La matriz $A + B$ es dada por

$$A + B = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} (a + e) + (b + f) &= (c + g) + (d + h) = (a + e) + (c + g) = (b + f) + (d + h) \\ &= (a + e) + (d + h) = (b + f) + (c + g) = s + t, \end{aligned}$$

lo cual implica que $A + B$ es mágica. Similarmente, si $k \in \mathbb{R}$, entonces la matriz kA es

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix},$$

y vale que

$$ka + kb = kc + kd = ka + kc = kb + kd = ka + kd = kb + kc = ks,$$

lo cual demuestra que kA es una matriz mágica. Por tanto, W es un subespacio vectorial de $M_{2,2}$.

- (b) La matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es mágica si, y solamente si, se tiene que

$$a + b - c - d = 0$$

$$a + b - a - c = 0$$

$$a + b - b - d = 0$$

$$a + b - a - d = 0$$

$$a + b - b - c = 0.$$

Al simplificar y reducir este sistema por el método de Gauss-Jordan nos queda

$$a - d = 0$$

$$b - d = 0$$

$$c - d = 0$$

$$b - d = 0,$$

o equivalentemente $a = b = c = d$. Por tanto, una matriz A , 2×2 , es mágica si, y solamente si, A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} d & d \\ d & d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para W y $\dim W = 1$.

5. (10 puntos) Halle solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = -3te^{-t} + 2 \cos 4t.$$

Solución: Usaremos el método de los coeficientes indeterminados. La ecuación diferencial lineal homogénea asociada es

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

cuya solución general es

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Busquemos una solución particular y_p de la forma

$$y_p(t) = (At + Bt^2)e^{-t} + C \cos 4t + D \sin 4t.$$

Se tiene que

$$y_p'(t) = (A + 2Bt)e^{-t} - (At + Bt^2)e^{-t} - 4C \sin 4t + 4D \cos 4t$$

y

$$y_p''(t) = 2Be^{-t} - 2(A + 2Bt)e^{-t} + (At + Bt^2)e^{-t} - 16C \cos 4t - 16D \sin 4t.$$

Así, de

$$y_p''(t) - y_p'(t) - 2y_p(t) = -3te^{-t} + 2 \cos 4t,$$

queda

$$(2B - 3A - 6Bt)e^{-t} + (18C - 4D) \cos 4t + (4C - 18D) \sin 4t = -3te^{-t} + 2 \cos 4t.$$

Luego, debe tenerse que

$$-3A + 2B = 0$$

$$-6B = -3$$

$$-18C - 4D = 2$$

$$4C - 18D = 0,$$

de donde

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{9}{85}, \quad D = -\frac{2}{85}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{2}t^2 \right) e^{-t} - \frac{9}{85} \cos 4t - \frac{2}{85} \sin 4t.$$