

Año:	2024	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Carlos Martín Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Segunda	Fecha:	26 de agosto de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los problemas debo resolverlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar”.

Firma: _____ Número de matrícula: _____ Paralelo: _____

1. (10 puntos) Halle la solución general de ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 4y = 3 \sec^2(2t), \quad 0 < t < \pi/4.$$

Solución: La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t, \quad 0 < t < \pi/4.$$

Una solución particular a la ecuación dada es

$$y_p(t) = v_1(t) \cos 2t + v_2(t) \sen 2t, \quad 0 < t < \pi/4,$$

donde

$$v_1(t) = - \int \frac{3 \sec^2 2t \sen 2t}{W[\cos 2t, \sen 2t](t)} dt = - \frac{3}{2} \int \sec 2t \tan 2t dt = - \frac{3}{4} \sec 2t$$

y

$$v_2(t) = \int \frac{3 \sec^2 2t \cos 2t}{W[\cos 2t, \sen 2t](t)} dt = \frac{3}{2} \int \sec 2t dt = \frac{3}{4} \ln(\sec 2t + \tan 2t).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación planteada es

$$\begin{aligned}
 y_h(t) = y_h(t) + y_p(t) &= c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t - \frac{3}{4} \sec(2t) \cos 2t + \frac{3}{4} \ln(\sec 2t + \tan 2t) \sen 2t \\
 &= c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ln(\sec 2t + \tan 2t) \sen 2t.
 \end{aligned}$$

Rúbrica:

Halla la solución general homogénea.	1-2 puntos
Usa variación de parámetros para hallar una solución particular.	1-7 puntos
Halla la solución general	1 punto

2. Considere la base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 y sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal que satisfice

$$T(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (1, 0, 0).$$

- (a) (3 puntos) Halle la matriz de T respecto a la base \mathcal{B} .

Solución:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Halla la matriz de T respecto a la base \mathcal{B}	1-3 puntos.
---	-------------

- (b) (4 puntos) Calcule todos los valores propios de T y sus correspondientes espacios propios.

Solución: Podemos calcular el polinomio característico de T usando la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$:

$$p_T(t) = p_{[T]_{\mathcal{B}}}(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^3.$$

Luego, el único valor propio de T es 0. El espacio propio asociado a este valor propio es simplemente el núcleo de T . Note que $(1, 2, 1) \in N(T)$, por lo que la dimensión del núcleo es al menos 1. Sin embargo, la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ es escalón reducida por filas, y tiene dos filas no nulas, de donde $\dim N(T) = 1$. Por tanto, $N(T) = \text{gen}\{(1, 2, 1)\}$.

Rúbrica:

Demuestra que 0 es el único valor propio de T	1-2 puntos.
Calcula correctamente el espacio propio asociado al valor propio 0 de T	1-2 puntos.

- (c) (3 puntos) Calcule las dimensiones del núcleo de T y de la imagen de T .

Solución: De la parte (b) y el teorema del núcleo y la imagen, se tiene que $\dim N(T) = 1$ y $\dim \text{Im}(T) = 2$. Note que esta información también puede a partir de $[T]_{\mathcal{B}}$, pues el rango de filas de esta matriz es exactamente 2.

Rúbrica:

Calcula correctamente las dimensiones del núcleo de T y de la imagen de T .	1-3 puntos.
---	-------------

3. Sea u un número real y $H_u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por

$$H_u(x, y) = (\cosh(u)x + \sinh(u)y, \sinh(u)x + \cosh(u)y).$$

(a) (3 puntos) Halle la matriz de H_u respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 .

Solución: Se tiene

$$H_u(1, 0) = (\cosh u, \sinh u),$$

y

$$H_u(0, 1) = (\sinh u, \cosh u),$$

por lo que, matricialmente, H_u se expresa como

$$H_u \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Calcula correctamente la matriz de H_u respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 .	1-3 puntos.
--	-------------

(b) (3 puntos) Demuestre que H_u es un isomorfismo.

Solución: Note que

$$\begin{vmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{vmatrix} = \cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1,$$

de manera que

$$\text{Im}(H_u) = \text{Col} \left(\begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, H_u es un isomorfismo.

Rúbrica:

Demuestra que H_u es un isomorfismo.	1-3 puntos.
--	-------------

(c) (4 puntos) Sean v otro número real. Use las representaciones matriciales de H_u y H_v para demostrar que

$$H_{u+v} = H_u H_v.$$

Sugerencia: Recuerde las identidades trigonométricas hiperbólicas $\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v$ y $\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$

Solución: Tenemos,

$$\begin{aligned} H_u H_v \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh v & \sinh v \\ \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v & \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v \\ \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v & \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(u + v) & \sinh(u + v) \\ \sinh(u + v) & \cosh(u + v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= H_{u+v} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rúbrica:Demuestra que $H_{u+v} = H_u H_v$.

1-3 puntos.

4. (10 puntos) Resuelva el PVI

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Solución: El polinomio característico de esta matriz es

$$p(t) = t^2 - 2t - 8 = (t - 4)(t + 2)$$

De donde se obtienen los valores propios 4 y -2 . Los espacios propios correspondientes son

$$E_4 = \text{gen}\{(1, 1)\},$$

y

$$E_{-2} = \text{gen}\{(-1, 1)\}.$$

De aquí obtenemos las soluciones l.i.

$$y_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y la solución general es por tanto

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{-2t} \\ e^{4t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Si $y(0) = (1, -1)$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la solución al PVI es

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{-2t} \\ e^{4t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Rúbrica:

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1-2 puntos
Calcula correctamente los vectores propios correspondientes	1-3 puntos
Halla la solución general	1-3 puntos
Resuelve el PVI	1-2 puntos

5. Considere un sistema de masa y resorte sin amortiguamiento que consiste de un objeto de masa $m = 1$ kg y coeficiente de elasticidad $k = 4$ N/m. Suponga que sobre el objeto también actúa una fuerza externa dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ N}, & \text{si } \pi \leq t < 3\pi; \\ 0 \text{ N}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $x = x(t)$ la posición del objeto, en metros, después de t segundos.

- (a) (3 puntos) Plantee la ecuación diferencial que modela el movimiento del objeto.

Solución: La ecuación diferencial que modela este fenómeno es

$$\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \leq t < 3\pi; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Rúbrica:

Plantea correctamente la ecuación diferencial que modela el movimiento del objeto.	1-3 puntos.
--	-------------

- (b) (7 puntos) Halle la solución a la ecuación planteada en la parte (a) para las condiciones iniciales $x(0) = 3$ m y $\dot{x}(0) = 7$ m/seg.

Solución: Primero notemos que $f(t) = H(t - \pi) - H(t - 3\pi)$. Así, el PVI que modela el fenómeno es

$$\ddot{x} + 4x = H(t - \pi) - H(t - 3\pi), \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 7.$$

Para resolver este PVI, usamos transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 4\mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{H(t - \pi) - H(t - 3\pi)\} \\ s^2 X - sx(0) - \dot{x}(0) + 4X &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s} \\ (s^2 + 4)X &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s} + 3s + 7 \\ X(s) &= \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2 + 4)} + \frac{3s + 7}{s^2 + 4} \\ &= e^{-\pi s} \left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4} \right) - e^{-3\pi s} \left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4} \right) + 3 \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{7}{2} \frac{2}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \\ &= H(t - \pi) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(t - \pi) \right) - H(t - 3\pi) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(t - 3\pi) \right) + 3 \cos 2t + \frac{7}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1 punto
Calcula correctamente $X(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1-2 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1-2 puntos
Resuelve el PVI.	1-2 puntos