FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2021	**PERIODO:** PRIMER TERMINO
MATERIA: Álgebra Lineal	**PROFESORES:** Laveglia F, Martínez M, Ramírez J, Valdiviezo J, Varas A, Vielma J.
EVALUACIÓN: SEGUNDA	**FECHA:** 02/09/2021

TEMA 1

1. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sean A y B matrices cuadradas nxn y $p_A(\lambda)$, $p_B(\lambda)$ sus correspondientes polinomios propios

Si A es semejante a B entonces $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

2. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sean A y B matrices cuadradas nxn.

Si A es semejante a B entonces A^n es semejante a B^n

3. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa

Si la matriz A de orden nxn, es la matriz de la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ que cuyos puntos de coordenadas (x, y) forman una elipse en el plano, entonces $det(A) > 0$.

4. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sean A y B matrices cuadradas nxn y $p_A(\lambda)$, $p_B(\lambda)$ sus correspondientes polinomios propios

Si $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ entonces $A = B$

5. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sea A una matriz cuadrada de orden nxn

Si A es diagonalizable, entonces A es diagonalizable de manera ortogonal

TEMA 2

1. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V.

Si $dim\ V = n$ y $dim\ W = n/2$ entonces $dim\ W^{\perp} = n/2$

2. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V.

$$\forall x \in V\ (proy_W\, x = x \Rightarrow proy_{W^{\perp}}\, x = 0_V)$$

3. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V.

$$\forall u, v \in V\ \ (proy_W\, u = proy_W\, v \Rightarrow u = v)$$

4. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V.

$$\forall u, v \in V \quad (proy_W (u+v) = proy_W u + proy_W v)$$

5. (10 Puntos)

Califique la siguiente proposición de acuerdo con su grado de veracidad:

S (siempre verdadera), **A** (a veces verdadera) **N** (nunca verdaderas)

Justifique apropiadamente. Si usted considera que la proposición es a veces verdadera explicite un ejemplo en donde sea verdadera y otro en que sea falsa.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno

$$\forall u, v \in V \quad \langle u, v\rangle > \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle$$

TEMA 3

1. (20 Puntos)

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno definido por:

$\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_3 + 4x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_3$.

Si $\boldsymbol{H}$ es el espacio generado por $\{(3, \mathbf{2}, \mathbf{0}), (5, \mathbf{0}, 5)\}$.

a. Exprese el vector $\boldsymbol{v}$ = $(1, \mathbf{2}, 3)$ como la suma de dos vectores $\boldsymbol{v}$ = $h_1 + h_2$ tal que $h_1 \in \boldsymbol{H} \wedge h_2 \in H^{\perp}$
b. Halle la distancia más corta de $\boldsymbol{v}$ a $H^{\perp}$

2. (20 Puntos)

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno definido por:

$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_3 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$.

Si $\boldsymbol{H}$ es el espacio generado por $\{(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2})\}$.

a. Exprese el vector $\boldsymbol{v}$ = $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ como la suma de dos vectores $\boldsymbol{v}$ = $h_1 + h_2$ tal que $h_1 \in \boldsymbol{H} \wedge h_2 \in H^{\perp}$
b. Halle la distancia más corta de $\boldsymbol{v}$ a $H^{\perp}$

3. (20 Puntos)

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno definido por:

$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_2y_2 - 2x_3y_1 + 2x_3y_3$.

Si $\boldsymbol{H}$ es el espacio generado por $\{(4, 4, \mathbf{0}), (2, \mathbf{0}, 3)\}$.

a. Exprese el vector $\boldsymbol{v}$ = $(2, 3, 5)$ como la suma de dos vectores $\boldsymbol{v}$ = $h_1 + h_2$ tal que $h_1 \in \boldsymbol{H} \wedge h_2 \in H^{\perp}$
b. Halle la distancia más corta de $\boldsymbol{v}$ a $H^{\perp}$

4. (20 Puntos)

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno definido por:

$\langle x, y \rangle = 4x_1y_1 - 2x_1y_3 + 4x_2y_2 - 2x_3y_1 + x_3y_3$.

Si $\boldsymbol{H}$ es el espacio generado por {(2, 0, 3), (1, 2, 0)}.

a. Exprese el vector $\boldsymbol{v}$ = (1, 2, 3) como la suma de dos vectores $\boldsymbol{v}$ = $h_1 + h_2$ tal que $h_1 \in \boldsymbol{H} \wedge h_2 \in H^{\perp}$
b. Halle la distancia más corta de $\boldsymbol{v}$ a $H^{\perp}$

5. (20 Puntos)

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno definido por:

$\langle x, y \rangle = 4x_1y_1 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - 2x_3y_1 + x_3y_3$.

Si $\boldsymbol{H}$ es el espacio generado por {(2, 0, 2), (0, 2, 5)}.

a. Exprese el vector $\boldsymbol{v}$ = (1, 3, 2) como la suma de dos vectores $\boldsymbol{v}$ = $h_1 + h_2$ tal que $h_1 \in \boldsymbol{H} \wedge h_2 \in H^{\perp}$
b. Halle la distancia más corta de $\boldsymbol{v}$ a $H^{\perp}$

TEMA 4

1. (20 Puntos)

Construir, en caso de ser posible, una transformación lineal T de $P_2(\mathbb{R})$ en $M_{2x2}(\mathbb{R})$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $Ker(T) = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / p(1) = p(-1) + p(0)\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in Im(T)$

2. (20 Puntos)

Construir, en caso de ser posible, una transformación lineal T de $P_2(\mathbb{R})$ en $M_{2x2}(\mathbb{R})$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $Ker(T) = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / p(1) = p(-1) \ \wedge p(0) = 0\}$

b) $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ b-a & b \end{pmatrix} / a, b \in IR \right\}$

3. (20 Puntos)

Construir, en caso de ser posible, una transformación lineal T de $P_2(\mathbb{R})$ en $M_{2x2}(\mathbb{R})$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $Ker(T) = \{ax^2 + bx + (b-a) / a, b \in \mathbb{R}\}$

b) $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2a \\ 2a & a \end{pmatrix} / a \in IR \right\}$

4. (20 Puntos)

Construir, en caso de ser posible, una transformación lineal T de $P_2(\mathbb{R})$ en $M_{2x2}(\mathbb{R})$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $Ker(T) = gen\{x^2 - x\}$

b) $Im(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

5. (20 Puntos)

Construir, en caso de ser posible, una transformación lineal T de $P_2(\mathbb{R})$ en $M_{2x2}(\mathbb{R})$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $Ker(T) = gen\{x^2 - x,\ x + 1,\ x^2 - 3x - 2\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in Im(T)$

TEMA 5

1. (20 Puntos)
   Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que $A = A^t$. Se conoce que los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos entre sí. Si $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Justificando de manera apropiada, determine el valor de a y un vector propio asociado a λ_3

2. (20 Puntos)
   Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que $A = A^t$. Se conoce que los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos entre sí. Si $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$ son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Justificando de manera apropiada, determine el valor de a y un vector propio asociados a λ_3

3. (20 Puntos)
   Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que $A = A^t$. Se conoce que los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos entre sí. Si $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Justificando de manera apropiada, determine el valor de a y un vector propio asociado a λ_3

4. (20 Puntos)
   Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que $A = A^t$. Se conoce que los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos entre sí. Si $v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ a \\ 12 \end{pmatrix}$ son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Justificando de manera apropiada, determine el valor de a y un vector propio asociado a λ_3

5. (20 Puntos)

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que $A = A^t$. Se conoce que los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos entre sí. Si $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}$ son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Justificando de manera apropiada, determine el valor de a y un vector propio asociado a λ_3

TEMA 6

1. (20 Puntos)

Sea $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal. Demuestre que:

$$\mathrm{T} \text{ es inyectiva } \Rightarrow \mathrm{dimV} \leq \mathrm{dimW}$$

2. (20 Puntos)

Sea $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal. Demuestre que:

$$\mathrm{T} \text{ es sobreyectiva } \Rightarrow \mathrm{dimV} \geq \mathrm{dimW}$$

3. (20 Puntos)

Sea $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal. Demuestre que:

$$\mathrm{T} \text{ es invertible } \Rightarrow dimV = \dim W$$

4. (20 Puntos)

Sea $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal. Demuestre que:

$\{T(v_1), T(v_2), T(v_2)\}$ es L.I. en $W \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente en V

5. (20 Puntos)

Sea $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal. Demuestre que:

$$\dim \mathrm{V} \neq \mathrm{dimW} \Rightarrow \mathrm{T} \text{ no es un Isomorfismo}$$