FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2019	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Baquerizo G., Brito W., Chóez M., Cifuentes C., Córdova N., Crow P., Díaz R., García E., Mejía M., Ramos M., Ramos P., Ronquillo C., Toledo X.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	26/agosto/2019

1. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, establezca si la proposición dada es VERDADERA O FALSA.

(a) (5 PUNTOS) Dada la función por tramos $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida así:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \geq 2 \\ x, & x < 2 \end{cases}}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{\int_1^4 f(x)\, dx = \frac{7}{2}}$$

Solución:

Se aplica la propiedad aditiva de las integrales definidas:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,dx + \int_2^4 (4-x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4$$
$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \big((16-8) - (8-2)\big) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$\therefore$ La proposición es VERDADERA.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo aplicar la propiedad aditiva de la integral definida.	**Indica que la proposición es falsa o no realiza proceso alguno.**	**Aplica la propiedad aditiva, pero no integra correctamente término alguno.**	**Aplica la propiedad aditiva, pero sólo integra correctamente uno de los términos.**	**Proporciona una demostración clara y concluye que la proposición es verdadera.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5**

(b) **(5 PUNTOS)** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{sen^2(x)} \right) = \frac{1}{2}$

Aplicando el TEOREMA DE SUSTITUCIÓN y el TEOREMA PRINCIPAL:

$$\lim_{x \to 0} (e^x - 1 - x) = e^0 - 1 - 0 = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \left(sen^2(x) \right) = \left(\lim_{x \to 0} \left(sen(x) \right) \right)^2 = 0^2 = 0$$

Se observa que existe una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que se puede aplicar el TEOREMA DE L'HOPITAL:

$$\lim_{x \to 0} \frac{[e^x - 1 - x]'}{[sen^2(x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{2sen(x)cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{sen(2x)}$$

Se puede aplicar nuevamente el TEOREMA DE L'HOPITAL, ya que al sustituir los límites del numerador y del denominador son iguales a cero:

$$\lim_{x \to 0} \frac{[e^x - 1]'}{[sen(2x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0}{cos(2x) \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{sen^2(x)} \right) = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ La proposición es VERDADERA.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre cálculo de límites, el teorema de L'Hopital, la regla de la cadena; y, derivadas de funciones trigonométricas, lineales y exponenciales.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Indica que la proposición es falsa o no realiza proceso alguno.	**Identifica el tipo de indeterminación y aplica bien el teorema de L'Hopital; pero, o no sabe la regla de la cadena, o, derivar una función lineal, exponencial o trigonométrica.**	**Identifica el tipo de indeterminación, aplica bien el teorema de L'Hopital, luego, o aplica propiedades de límites e identidades, o sigue aplicando el teorema de L'Hopital.**	**Identifica el tipo de indeterminación y calcula correctamente el límite.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5**

2. **(10 PUNTOS) Bosqueje en un plano cartesiano la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:**

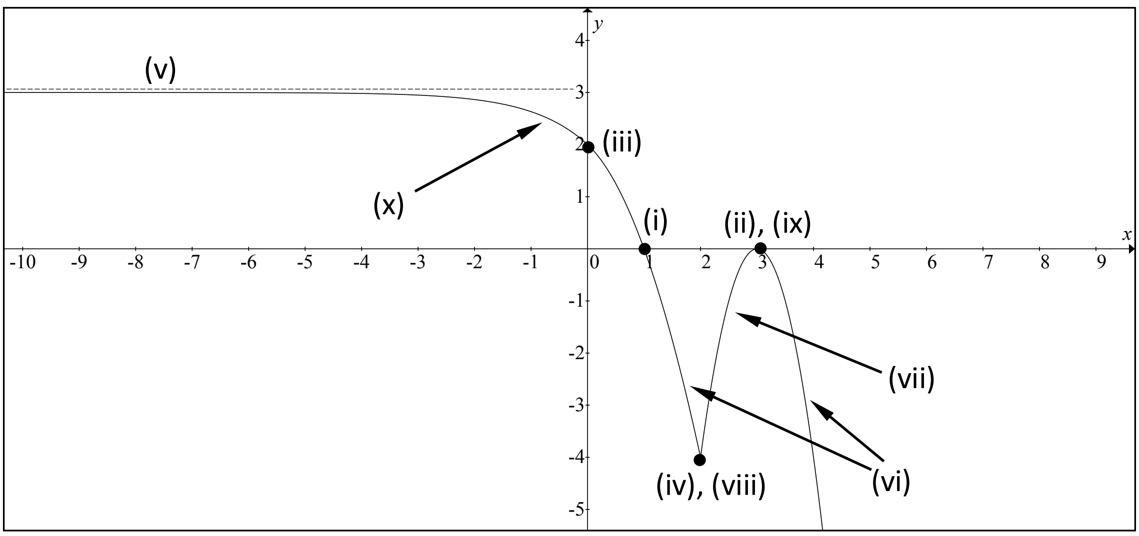
(i) $\forall \xi > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\ f\ [(|x-1| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| < \xi)]$
(ii) $\forall \xi > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\ f\ [(|x-3| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| < \xi)]$
(iii) $\forall \xi > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\ f\ [(|x| < \delta) \Rightarrow (|f(x)-2| < \xi)]$
(iv) $\forall \xi > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom\ f\ [(|x-2| < \delta) \Rightarrow (|f(x)+4| < \xi)]$
(v) $\forall \xi > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in dom\ f\ [(x < -N) \Rightarrow (|f(x)-3| < \xi)]$
(vi) $f'(x) < 0$**, si** $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.
(vii) $f'(x) > 0$**, si** $x \in (2, 3)$.
(viii) $f'(2)$ **no existe.**
(ix) $f'(3) = 0$
(x) $f''(x) < 0$, $\forall x \in dom\ f - \{2\}$

Solución:

Interpretando las condiciones dadas, dado que f es continua:

(i) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$
(ii) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$
(iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$
(iv) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = -4$
(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3\ es\ una\ asíntota\ horizontal.$
(vi) $f\ es\ estrictamente\ decreciente\ en\ (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$
(vii) $f\ es\ estrictamente\ creciente\ en\ (2, 3).$
(viii) $x = 2\ es\ un\ punto\ crítico\ singular.$
(ix) $x = 3\ es\ un\ punto\ crítico\ estacionario.$
(x) $f\ es\ cóncava\ hacia\ abajo, \forall x \in dom\ f - \{2\}.$

Una gráfica que cumple con todas las características anotadas para f, es:



Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe la definición formal de límite, el criterio de la primera derivada para determinar un punto estacionario o singular y los intervalos de monotonía, y el criterio de la segunda derivada para determinar los intervalos de concavidad.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	Logra asociar solamente dos de las condiciones dadas para bosquejar la gráfica.	Asocia entre tres y seis de las condiciones dadas para bosquejar la gráfica.	Asocia entre siete y nueve de las condiciones dadas para bosquejar la gráfica.	Utiliza en forma correcta las diez condiciones dadas para bosquejar la gráfica de la función.
	1 – 2	3 – 6	7 – 9	10

3. (10 PUNTOS) Obtenga las siguientes antiderivadas:

(a) (5 PUNTOS) $\displaystyle\int\left(\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\right)dx$

Solución:

$$\int\left(\frac{2x^3+2x}{x^4-1}+\frac{x^2-1}{x^4-1}\right)dx=\int\left(\frac{2x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}+\frac{\cancel{x^2-1}}{(x^2+1)\cancel{(x^2-1)}}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int\frac{2x}{x^2-1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN:

$$u=x^2-1\quad\rightarrow\quad du=2x\,dx$$

Las integrales que se obtienen son inmediatas:

$$=\int\frac{du}{u}+\int\frac{1}{x^2+1}dx=ln|u|+arc\,tan(x)+C$$

$$\boxed{\int \left(\frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1}\right) dx = ln|x^2 - 1| + arc\,tan(x) + C \ ; \quad C \in \mathbb{R}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante aplica la propiedad de linealidad, la técnica de integración por sustitución y la antiderivada de funciones racionales.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar.	**Aplica la propiedad de linealidad pero no integra correctamente los dos términos del integrando.**	**Aplica linealidad e integra bien utilizando un cambio de variable, pero no incluye la constante C.**	**Aplica linealidad e integra correctamente los dos términos del integrando y considera la constante C en la antiderivada.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

Observación.- Se puede aplicar la Técnica de Integración por Descomposición en Fraccciones Parciales y se obtendrá la misma respuesta.

(b) (5 Puntos) $\displaystyle \int \frac{\boldsymbol{ln(x)}}{\boldsymbol{x^4}}\,\boldsymbol{dx}$

Se aplicará la Técnica de Integración por Partes:

$$u = ln(x) \qquad dv = \frac{1}{x^4}dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{3x^3}$$

$$= -\frac{ln(x)}{3x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{ln(x)}{3x^3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3x^3}\right) + C$$

$$\boxed{\int \frac{ln(x)}{x^4}\,dx = -\frac{ln(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + C \ ; \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int \frac{ln(x)}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}\left(ln(x) + \frac{1}{3}\right) + C \ ; \quad C \in \mathbb{R}}$$

Rúbrica:

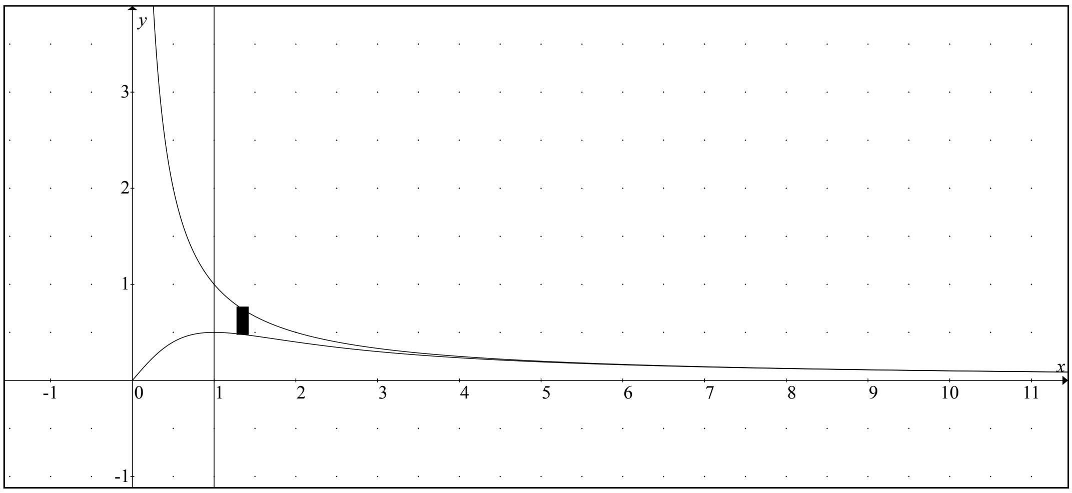
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante aplica la técnica de integración por partes, conoce la derivada de funciones logarítmicas y la antiderivada de funciones racionales.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, tampoco sabe la derivada de una función logarítmica, ni la antiderivada de una función racional.	**Aplica bien la técnica de integración por partes, pero se equivoca al derivar la función logarítmica o integrar la función racional.**	**Aplica bien la técnica de integración por partes, deriva bien la función logarítmica e integra bien la función racional; pero se equivoca al simplificar términos.**	**Obtiene correctamente la antiderivada de la función y considera la constante C.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5**

4. (8 PUNTOS) Calcule el área de la región R definida así:

$$\boldsymbol{R}: \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases} \quad ; \quad x \in [1, +\infty)$$

Solución:

Se grafican las curvas solamente en el primer cuadrante, ya que la región a integrar se presenta en el mencionado cuadrante:



El área A de la región puede ser calculada así:

$$A = \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\int_{1}^{b} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \right]$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\left[\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{2x}{x^2+1} dx\right]$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (ln|x|)|_1^b - \frac{1}{2}\left[\lim_{b \to +\infty} (ln|x^2+1|)|_1^b\right]$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(ln|b| - \underbrace{ln|1|}_{0}\right) - \frac{1}{2}\left[\lim_{b \to +\infty} (ln|b^2+1| - ln|2|)\right]$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(ln|b| - \frac{1}{2} ln|b^2+1| + \frac{1}{2}(ln|2|)\right)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(ln|b| - ln|b^2+1|^{\frac{1}{2}}\right) + \lim_{b \to +\infty} ln(2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} ln\left(\left|\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}\right|\right) + \lim_{b \to +\infty} ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$= ln\left(\lim_{b \to +\infty}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}}\right|\right)\right) + ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$= ln\left(\lim_{b \to +\infty} |1|\right) + ln(2)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{ln(1)}_{0} + ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{A = ln\left(\sqrt{2}\right)\ [u^2]}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica una región en el plano cartesiano en forma analítica y gráfica, con el uso de integrales definidas, sabe cómo se calcula el área de dicha región, y también cómo resolver una integral impropia.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar cómo se grafica la región o no sabe plantear el área como una integral definida.	**Grafica la región, pero no define bien los límites para la integral definida, o no plantea bien la función que debe antiderivar, o no sabe cómo integrar todas las expresiones que se presentan.**	**Bosqueja bien la gráfica de la región, sabe cómo integrar todas las expresiones que se presentan, pero o no aplica límites para la integral impropia o no evalúa bien algún término.**	**Bosqueja bien la gráfica de la región, integra correctamente todas las expresiones que se presentan, evalúa bien cada término, aplica límites para la integral impropia y presenta el resultado correcto en unidades cuadradas.**
	0 – 1	**2 – 3**	**4 – 6**	**7 – 8**

5. **(4 PUNTOS) Definiendo una función adecuada y usando diferenciales, aproxime el valor de $\sqrt[4]{80}$.**

Solución:

Sea la función:

$$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \ ; \quad \forall x \geq 0$$

Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$$

Sabiendo que $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$, considere entonces:

$$x_0 = 81 = 3^4$$
$$\Delta x = -1$$
$$x_0 + \Delta x = 80$$

$$f(80) = f(81 - 1)$$
$$f(81 - 1) \approx f(81) + f'(81) \cdot (-1) \approx (3^{\cancel{4}})^{1/\cancel{4}} - \frac{1}{4}(3^{\cancel{4}})^{-3/\cancel{4}}$$
$$f(81 - 1) \approx 3 - \frac{1}{4}(3^{-3}) \approx 3 - \frac{1}{4(27)} \approx 3 - \frac{1}{108} \approx \frac{324 - 1}{108}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\sqrt[4]{80} \approx \frac{323}{108}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo aproximar valores con el uso de diferenciales y conoce cómo derivar una función potencia.	**No identifica lo que debe realizar.**	**Plantea la aproximación, pero comete algún error en la identificación de los parámetros de la diferencial o no deriva bien.**	**Plantea la aproximación, identifica bien los parámetros de la diferencial, deriva bien, pero no simplifica correctamente.**	**Plantea la aproximación, identifica bien los parámetros de la diferencial, deriva bien y simplifica correctamente.**
	0	**1 – 2**	**3**	**4**

6. **(8 PUNTOS) De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.**

(a) En la fabricación y venta de $\boldsymbol{x}$ $[\boldsymbol{unidades}]$ de cierto bien, las funciones de precio unitario $\boldsymbol{p}$ y costo total $\boldsymbol{c}$, ambas en $[\$]$, vienen dadas por:

$$\boldsymbol{p(x) = 6 - 0.003x}$$
$$\boldsymbol{c(x) = 4 + 2.1x}$$

Determine el nivel de producción que generará una UTILIDAD TOTAL MÁXIMA.

Solución:

Dada la fabricación y venta de x $[unidades]$ del bien, se define así la función de utilidad total U:

$$U(x) = I(x) - C(x)\,; \quad \forall x \geq 0$$

$$U(x) = \overbrace{p(x)}^{\substack{Precio\\Unitario}} \cdot \overbrace{x}^{\substack{Cantidad\\vendida}} - \overbrace{C(x)}^{\substack{Costo\\total}}$$

$$U(x) = (6 - 0.003x)x - (4 + 2.1x)$$
$$U(x) = 6x - 0.003x^2 - 4 - 2.1x$$
$$U(x) = -0.003x^2 + 3.9x - 4$$

Se deriva por primera vez la función objetivo de utilidad:

$$U'(x) = -0.006x + 3.9$$

Se iguala a cero esta primera derivada para determinar el punto crítico estacionario:

$$-0.006x + 3.9 = 0$$
$$0.006x = 3.9$$
$$\frac{6}{100\cancel{0}}x = \frac{39}{\cancel{10}}$$

$$x = \frac{\overbrace{(\cancel{39})}^{13}\overbrace{(\cancel{100})}^{50}}{\underbrace{\underbrace{\cancel{6}}_{\cancel{2}}}_{1}}$$

$$\boxed{x = 650}$$

Debe notarse que al tratarse de una función cuadrática no existen puntos críticos singulares en la gráfica de la función objetivo. Mientras que el punto crítico de frontera $x = 0$ no genera utilidades.

Se deriva por segunda vez y se evalúa:

$$U''(x) = -0.006$$
$$U''(650) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; Se\ trata\ de\ un\ valor\ máximo.$$

Con la fabricación y venta de 650 $[unidades]$ del bien, se producirá la UTILIDAD TOTAL MÁXIMA.

(b) Un observatorio debe tener la forma de un cilindro recto coronado por un domo semiesférico. Se conoce que el domo semiesférico costará el doble por $[\boldsymbol{m^2}]$ que las paredes laterales cilíndricas que cuestan $\$\,\mathbf{10}$ cada $[\boldsymbol{m^2}]$. Determine las DIMENSIONES MÁS ECONÓMICAS del observatorio, si se quiere que tenga $\boldsymbol{400\pi}$ $[\boldsymbol{m^3}]$ de volumen.

Solución:

Para lograr el objetivo planteado, se debe conseguir que el costo de elaboración para la superficie total del observatorio sea mínimo:

$$C(r,h) = \overbrace{\$\,10(A_{Pared\ cilíndrica})}^{\substack{Costo \\ Parte\ cilíndrica}} + \overbrace{\$\,20\big(A_{Domo\ semiesférico}\big)}^{\substack{Costo \\ Parte\ semiesférica}}$$

Dadas las longitudes del radio r del cilindro y de su altura h, y tomando en cuenta que el radio de la semiesfera es congruente con el radio del cilindro, la función objetivo sería:

$$C(r,h) = 10(2\pi rh) + 20(2\pi r^2)$$
$$C(r,h) = 20\pi rh + 40\pi r^2$$

Ahora se debe plantear la función objetivo en términos de una sola variable, para la cual se utilizará la expresión del volumen del observatorio y obtener h en función de r:

$$V = \cancel{\pi} r^2 h + \frac{2}{3}\cancel{\pi} r^3 = 400\cancel{\pi}$$
$$h = \frac{400 - \frac{2}{3}r^3}{r^2} = \frac{400}{r^2} - \frac{2}{3}r$$

Reemplazando:

$$C(r) = 20\pi r\left(\frac{400}{r^2} - \frac{2}{3}r\right) + 40\pi r^2$$
$$C(r) = \frac{8\,000\,\pi}{r} - \frac{40\,\pi}{3}r^2 + 40\pi r^2$$
$$C(r) = \frac{8\,000\,\pi}{r} + \frac{80\,\pi}{3}r^2$$

$$C(r) = 80\pi\left(\frac{100}{r} + \frac{1}{3}r^2\right)$$

Se deriva por primera vez la función objetivo de costo:

$$C'(r) = 80\pi\left(-\frac{100}{r^2} + \frac{2}{3}r\right)$$

Se iguala a cero esta primera derivada para determinar el punto crítico estacionario:

$$-\frac{100}{r^2} + \frac{2}{3}r = 0$$

$$\frac{2}{3}r = \frac{100}{r^2}$$

$$r^3 = 150$$

$$\boxed{r = \sqrt[3]{150}\ [m]}$$

Se deriva por segunda vez y se evalúa:

$$C''(r) = 80\pi\left(\frac{200}{r^3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$C''\left(\sqrt[3]{150}\right) = 80\pi\left(\frac{200}{150} + \frac{2}{3}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Se trata de un valor mínimo}.$$

El punto crítico $r = 0$ es de frontera y singular al mismo tiempo, pero no contribuye al análisis.

Con la longitud del radio $r = \sqrt[3]{150}\ [m]$, se determina la longitud de la altura h:

$$h = \frac{400}{\left(\sqrt[3]{150}\right)^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{150}$$

$$h = \frac{(3)(400) - (2)\left(\sqrt[3]{150}\right)\left(\sqrt[3]{150}\right)^2}{3\left(\sqrt[3]{150}\right)^2} = \frac{1\,200 - 2(150)}{3\left(\sqrt[3]{150}\right)^2} = \frac{900}{3\left(\sqrt[3]{150}\right)^2}$$

$$h = \frac{300}{\left(\sqrt[3]{150}\right)^2} = \frac{300}{\left(\sqrt[3]{150}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{150}}{\sqrt[3]{150}} = \frac{30\cancel{0}\,\sqrt[3]{150}}{15\cancel{0}}$$

$$\boxed{h = 2\,\sqrt[3]{150}\ \ [m]}$$

Los valores determinados para r y h representan las dimensiones más económicas para el observatorio.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante reconoce un problema de aplicación de máximos y mínimos en donde puede aplicar los criterios de la primera y la segunda derivada.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	Asigna variables adecuadas y plantea la función objetivo, pero no logra asociar los datos proporcionados o no sabe cómo derivar.	Plantea y deriva bien la función objetivo, pero tiene algún problema para determinar los puntos críticos.	Plantea y deriva bien la función objetivo, determina bien los puntos críticos, pero presenta algún inconveniente en la evaluación del punto crítico estacionario para decidir.	Plantea y deriva bien la función objetivo, determina bien los puntos críticos, y concluye bien.
	0 – 1	2 – 4	5 – 7	8