Escuela Superior Politécnica del Litoral

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES Docentes: **Elvis Aponte- Ángel Guale-Nelson Córdova**– Fecha: 30 de junio de 2025. Horario: 11:30 – 13:30

EXAMEN PRIMER PARCIAL PA0 I AÑO 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, …… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

____

FIRMA

Tema 1 (20 puntos)

Dado el plano $\pi : \boldsymbol{x - 2y + z = 0}$

a) **Determine la ecuación paramétrica de la recta** $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x + y - z = 2} \\ \boldsymbol{x - y + z = 5} \end{cases}$

b) **El punto de intersección de la recta L con el plano** π **.**

Solución

a) Encontremos un punto Q que es un punto cualquiera de la recta;

Para z=0 resolvemos el sistema: $\begin{matrix} x + y = 2 \\ x - y = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{-3}{2} \end{matrix}$ **(4 puntos)**

Entonces Q es el punto $\left(\frac{7}{2}, \frac{-3}{2}, 0\right)$ **(4 puntos)**

el vector directriz de la recta es:

$$D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -2)$$

L: $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \left(\frac{7}{2}, \frac{-3}{2}, 0\right) + t(0, -2, -2), t \in \mathbb{R}$ **(4 puntos)**

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$x = \frac{7}{2}, y = \frac{-3}{2} - 2t$, $z = 0 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$ **(4 puntos)**

Entonces interceptando L con el plano $\pi : x - 2y + z = 0$

$$\left(\frac{7}{2}\right) - 2\left(\frac{-3}{2} - 2t\right) + (0 - 2t) = 0$$

$$t = -\frac{13}{4}$$

El punto de intersección es $P = \left(\frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$ **(1 punto)**

(3 puntos)

Rúbrica

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe obtener la ecuación de la recta dados dos puntos y calcular intersecciones entre rectas y planos.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante atendiendo el enunciado del tema (o consigue por su cuenta) plantea r el sistema, pero no resuelve correctamente.	El estudiante plantea el sistema de ecuaciones y determina un punto de la recta, pero comete errores al calcular el vector director.	El estudiante determina la ecuación de la recta en forma paramétrica e intenta hallar el valor del parámetro, pero comete errores.	El estudiante determina la ecuación de la recta en forma paramétrica y determina el punto de intersección .
	0-5	6-10	10-15	15-20

Tema 2 (20 puntos)

Dada la función $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) **Determinar la continuidad de f en el origen (0,0)**
b) **Calcule $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$**
c) **Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en todo $\mathbb{R}^2$ y luego determine si la función $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en (0,0) es continua.**
d) **De acuerdo con los literales anteriores. ¿ Se puede inferir que la función f es diferenciable o no en (0,0). o se debe hacer algo adicional?**

Solución

a) 1. $f(0,0)=0$ **(1 punto)**

2.- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\overset{\substack{x=\rho\cos\,\theta\\ y=\rho\text{sen}\,\theta}}{=}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\rho^4\cos^2\,\theta\text{sen}^2\,\theta}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\rho^2(\cos^2\theta\text{sen}^2\,\theta)}{1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\rho^2\cdot\ (\cos^2\theta\text{sen}^2\theta)=0$$ **(3 puntos)**

Pues la función acotada y el radio tiende a cero

3. $f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Luego $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$. **(1 punto)**

b)

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0\cdot k^2}{k^2}-0}{k}=\lim_{h\to0}\frac{0}{\mathrm{k}}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{k^20}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$ **(4 puntos)**

c)

Analicemos la continuidad de la derivada parcial con respecto a "x". fuera del origen

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$ **(2puntos)**

Entonces podemos escribir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ **(1 punto)**

analicemos su continuidad en el origen,

ii) $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ **(1 punto)**

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$, Por análisis de grados y denominador o Polares.

(4 puntos)

d) Debido a la simetría de las variables deducimos que las derivadas parciales en el origen son continuas, lo que implica que la función es diferenciable en (0,0). No habría que hacer nada adicional.

Teorema: "si f es de clase C^1 entonces f es diferenciable **(3 puntos)**

Rúbrica

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe probar y aplicar conceptos de continuidad y derivadas parciales	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante demuestra la continuidad en el origen.	Determina las derivadas parciales en (0,0).	El estudiante Determina $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (x, y) y explica que es continua en (0,0).	El estudiante Determina por la simetría que la función f es de clase C^1 .
	0-5	6-9	10-17	18-20

Tema 3 (20 puntos)

La productividad de cierto país está dada por $Q(K, L) = 90K^{1/3}L^{2/3}$ unidades, dónde K es el capital en unidades de 1000000 de dólares y L es la fuerza laboral en miles de horas -trabajador:

a) Encuentre la productividad marginal del capital Q_K y la productividad del trabajo Q_L Cuando el capital es de 27 millones de dólares $(K = 27)$y el nivel de fuerza laboral es 64000 horas trabajador $(L = 64)$
b) Estime el cambio en la productividad si la mano de obra aumenta en 4 unidades y el capital disminuye en 2 unidades.
c) Determina las derivadas parciales de segundo orden.

Solución

a) $Q(K, L) = 90K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, entonces

$$Q_k = 30K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \qquad Q_L = 60K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

En $K = 27, L = 64$:

$$Q_K = 30 \cdot \frac{16}{9} = \frac{480}{9} \approx 53.33, \quad Q_L = 60 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 45.$$

Si el capital disminuye en 2 unidades (de 27 a 25) y el trabajo aumenta en 4 unidades (de 64 a 68):

$$\Delta Q \approx Q_K \cdot \Delta K + Q_L \cdot \Delta L$$

- $\Delta K = -2$
- $\Delta L = +4$

$$\Delta Q \approx 53.33 \cdot (-2) + 45 \cdot 4 = -106.66 + 180 = \mathbf{73.33} \text{ unidades}$$

b)

c) $Q_{KK} = -20K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \qquad Q_{KL} = Q_{LK} = -20K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{1}{3}} \quad y \quad Q_{LL} = -20K^{1/3}L^{-4/3}$

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
Indicador del ejercicio: El estudiante encuentra derivadas parciales y aplica al caso de productividad marginal.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Aplica mal la derivada o no distingue variables.	Calcula derivadas de primer orden, pero no interpreta.	Calcula bien las derivadas y reconoce el papel de cada variable y estima el cambio	Calcula correctamente, y obtiene y llega a los resultados solicitados
	0-3	4-8	9-15	16-20

Tema 4 (20 puntos)

La biomasa diaria de un cultivo de tilapia, W (kg/dia), depende de la tasa de alimentación x (kgcomida/día) y de su coeficiente térmico y a dimensional según: $w = xy$

A su vez, la tasa de alimentación x está determinada por la frecuencia del suministro s (4 veces/día) y la cantidad de alimento por dosis t (2kg) mediante $\boldsymbol{x = s^2 + t^2}$

Y el coeficiente térmico depende de la temperatura efectiva del agua y la temperatura de referencia según

$$y = \frac{s}{t}\ .$$

Sabiendo que: $s = 4\text{veces}/$ día y $t = 2\text{kg}$:

1. **Calcule cual es la biomasa diaria de un cultivo de tilapia**
2. **Utilizando la regla de la cadena, encuentre $\frac{\partial W}{\partial s}$ y $\frac{\partial W}{\partial t}$ y luego evalúe.**
3. **De igual manera, calcule $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.**

Solución

1. **Calculamos primero:** $x = s^2 + t^2 = 4^2 + 2^2 = 20\text{kg}/$ día y $y = \frac{s}{t} = \frac{4}{2} = 2$.
   Así ,
   $$W = xy = 20 \cdot 2 = 40\text{kg}/\ \text{día}.$$

2. **Derivadas parciales (**Primera derivada de W respecto a t usando la regla de la cadena)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Pero

$$\frac{\partial W}{\partial x} = y = \frac{s}{t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 2t$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} = x = s^2 + t^2, \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}$$

Entonces

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{s}{t}(2t) + (s^2 + t^2)\left(-\frac{s}{t^2}\right) = 2s - \frac{s(s^2+t^2)}{t^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial s} = W_x \frac{\partial x}{\partial s} + W_y \frac{\partial y}{\partial s} = y(2s) + x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{s}{t}2s + \frac{s^2+t^2}{t} = \frac{2s^2+s^2+t^2}{t} = \frac{3s^2+t^2}{t}.$$

$$\frac{\partial W}{\partial s} = y \cdot 2s + x \cdot \frac{1}{t} = 2 \cdot (2 \cdot 4) + 20 \cdot \frac{1}{2} = 16 + 10 = 26\text{kg/ día por vez / día.}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = y \cdot 2t + x \cdot \left(-\frac{s}{t^2}\right) = 2 \cdot (2 \cdot 2) + 20 \cdot \left(-\frac{4}{4}\right) = 8 - 20 = -12\text{kg/ día por kg.}$$

3. $$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left((0)\frac{\partial x}{\partial t} + 1\frac{\partial y}{\partial t}\right)2t + (y \cdot 2) + (1 \cdot 2t + 0)\left(-\frac{s}{t^2}\right) + x \cdot \frac{2s}{t^3}$$

$$= -\frac{s}{t^2} \cdot 2t + \frac{2s}{\mathrm{t}} + 2t\left(-\frac{s}{t^2}\right) + (\boldsymbol{s^2} + \boldsymbol{t^2})\frac{2s}{t^3}$$

Evaluando en s=4 y t=2

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 16$$

Rúbrica

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante aplica la regla de la cadena para hallar derivadas parciales en un problema de aplicación	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Identifica incorrectamente las variables o la fórmula de W=xy.	Calcula correctamente una de las derivadas parciales ∂W/∂s o ∂W/∂t, pero comete errores.	El estudiante Halla ambas derivadas parciales con la notación correcta y realiza la sustitución numérica sin errores menores.	Además de lo anterior, Calcula correctamente lo solicitado...
	0-5	6-10	11-14	15-20

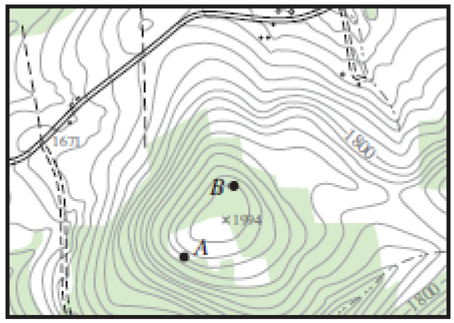
Escuela Superior Politécnica del Litoral

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES Docentes: **Elvis Aponte- Ángel Guale-Nelson Córdova**– Fecha: 30 de junio de 2025. Horario: 11:30 – 13:30

Tema 5 (20 puntos)

La la superficie de una montaña se modela mediante la ecuación $h(x, y) = 5000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$.

Un montañista se encuentra en el punto $(500,300,4390)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?



i) ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?
ii) ¿Cuál es el valor de la rapidez máxima en ese punto?
iii) ¿En qué dirección debes moverte para descender más rápidamente?
iv) ¿Cuál es el valor de la rapidez mínima en ese punto?
v) ¿En qué dirección no hay variación de altura?

Solución

La dirección de ascenso más rápido viene dada por el gradiente de h en $(x, y) = (500, 300)$:

1.

$$\nabla h(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (-0.002x, \ -0.008y).$$

2. En $(500, 300)$:

$$\nabla h(500, 300) = (-1, \ -2.4).$$

3. La dirección unitaria es

$$\mathbf{u} = \frac{(-1, \ -2.4)}{\sqrt{(-1)^2 + (-2.4)^2}} = \frac{(-1, \ -2.4)}{\sqrt{6.76}} \approx (-0.385, \ -0.923).$$

Respuesta: Moverse en la dirección $\langle -1, -2.4 \rangle$ (o su unidad $\approx \langle -0.385, -0.923 \rangle$) para ascender con la máxima rapidez.

Para $h(x,y) = 5000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$ en $(500,300)$, $\nabla h = (-1,-2.4)$, $\|\nabla h\| = \sqrt{6.76} \approx 2.6$

.

b) Rapidez máxima:

$$\|\nabla h\| \approx 2.6.$$

c) Dirección de descenso más rápido:

$$-\nabla h = (1, 2.4) \quad (\text{o unidad } (0.385, 0.923)).$$

d) Rapidez mínima (descenso máximo):

$$-\|\nabla h\| \approx -2.6.$$

e) Dirección sin variación (gradiente ortogonal):

$$v \cdot \nabla h = 0 \implies v = (2.4, -1) \quad \big(\text{unidad } (0.923, -0.385)\big).$$

Rúbrica

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe relacionar elementos del cálculo vectorial con situaciones reales de aplicación del gradiente.	El estudiante interpreta que en la dirección del gradiente es la máxima derivada direccional.	El estudiante calcula bien el gradiente y su norma relacionando correctamente los valores obtenidos.	El estudiante interpreta correctamente la derivada direccional para el caso mínimo y calcula lo solicitado.	El estudiante describe correctamente el vector hacia donde debe ir para que la altura se mantenga constante.
	0-5	6-10	11-14	15-20