FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 1

1. (10 PUNTOS) Un horno aumenta su temperatura inicial de $20\,[°\mathrm{C}]$ a razón de $1.2\,[°\mathrm{C}/min]$ durante una hora. Durante la segunda hora se mantiene la temperatura en cierto valor. Después del minuto 120, el horno se enfría a razón de $1.1\,[°\mathrm{C}/min]$. Si t representa el tiempo en minutos $[min]$, la función de temperatura T está definida por:

$$T(t) = \begin{cases} 1.2t + 20\,, & 0 \le t < 60 \\ A\,, & 60 \le t \le 120 \\ B - 1.1t\,, & 120 < t \le 180 \end{cases}$$

   (a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de temperatura T sea continua para todo tiempo t $[min]$.
   (b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $T(t)$.

2. (10 PUNTOS) Se vende caramelos a $1.50\,[\$/lb]$ por cantidades hasta $10\,[lb]$. Por encima de las $10\,[lb]$ y hasta $20\,[lb]$, se cobra $1.30\,[\$/lb]$ más un recargo. Por encima de las $20\,[lb]$, se cobra $1.10\,[\$/lb]$ más un recargo. Si x representa la cantidad de libras $[lb]$, la función de precio p está definida por:

$$p(x) = \begin{cases} 1.5x\,, & 0 \le x \le 10 \\ 1.3x + A\,, & 10 < x \le 20 \\ 1.1x + B\,, & x > 20 \end{cases}$$

   (a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de precio p sea continua para toda cantidad de libras x.
   (b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $p(x)$.

3. (10 PUNTOS) Se establece un valor fijo de $\$ \, 100$ de impuestos sobre los primeros $\$ \, 10\,000$ de ganancias, un impuesto del $12\,\%$ para ganancias comprendidas entre $\$ \, 10\,000$ y $\$ \, 50\,000$ más un recargo, y del $16\,\%$ sobre el resto de ganancias más un recargo. Si x representa la ganancia en dólares $[\$]$, la función de impuestos I está dada por:

$$I(x) = \begin{cases} 100\,, & 0 \leq x < 10\,000 \\ A + 0.12(x - 10\,000)\,, & 10\,000 \leq x \leq 50\,000 \\ B + 0.16(x - 50\,000)\,, & x > 50\,000 \end{cases}$$

(a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de impuestos I sea continua para toda ganancia x.

(b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $I(x)$.

4. (10 PUNTOS) Se vende rocas decorativas a 2.50 $[\$/lb]$ hasta 500 $[lb]$ inclusive. Por encima de las 500 $[lb]$ y hasta $1\,000$ $[lb]$, se cobra 2 $[\$/lb]$ más un recargo. Por encima de las $1\,000$ $[lb]$, se cobra 1.50 $[\$/lb]$ más un recargo. Si x representa la cantidad de libras $[lb]$, la función de precio p está definida por:

$$p(x) = \begin{cases} 2.5x\,, & 0 \leq x \leq 500 \\ 2x + A\,, & 500 < x \leq 1\,000 \\ 1.5x + B\,, & x > 1\,000 \end{cases}$$

(a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de precio p sea continua para toda cantidad de libras x.

(b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $p(x)$.

5. (10 PUNTOS) El número N de unidades en inventario de una pequeña empresa está dado por:

$$N(t) = 25\left(2\left[\!\left[\frac{t+2}{2}\right]\!\right] - t\right) \quad , \quad 0 \leq t \leq 12$$

donde t es el tiempo medido en meses.

(a) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $N(t)$.

(b) (8 PUNTOS) Por medio de un análisis de discontinuidad en cierto valor t del dominio de N, establezca con qué frecuencia la empresa debe reponer su inventario.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 2

6. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = -2\,cos(\theta) \qquad ; \qquad r_2 = \sqrt{3}$$

(a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P, entre ambas curvas, en el segundo cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P.

7. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = 2 \qquad ; \qquad r_2^2 = 8\,cos(2\theta)$$

(a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P, entre ambas curvas, en el tercer cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P.

8. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = \frac{3}{2} \qquad ; \qquad r_2 = 1 - cos(\theta)$$

(a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P, entre ambas curvas, en el segundo cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P.

9. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = 3 \quad ; \quad r_2 = 2 - 2\,sen(\theta)$$

(a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P, entre ambas curvas, en el cuarto cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P.

10. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1^2 = -\frac{9}{2}cos(2\theta) \quad ; \quad r_2 = \frac{3}{2}$$

(a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P, entre ambas curvas, en el tercer cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_2 en P.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 3

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

11. (14 PUNTOS)

Si una circunferencia, circunscrita a un cuadrado, está expandiendo su perímetro a una razón de $\pi\ [cm/s]$, calcule a qué velocidad se incrementa el área de la superficie del cuadrado cuando el área del círculo es igual a $2\pi\ [cm^2]$.

12. (14 PUNTOS)

Se vende $q\ [kg]$ de sandía a un precio $p(q) = 0.4q + 3\ [\$]$, y , la demanda de la sandía está dada por $D(p) = \frac{1\,000}{p^2}$. Calcule como cambiará la demanda de la sandía respecto a su peso, cuando $q = 10\ [kg]$. Redondee su respuesta con dos decimales.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

13. (14 PUNTOS)

Si una circunferencia, inscrita en un cuadrado, está decrementando su perímetro a una razón de $2\pi\ [cm/s]$, calcule a qué velocidad decrece el área de la superficie del cuadrado cuando el área del círculo es igual a $\pi\ [cm^2]$.

14. (14 PUNTOS)

Se vende $q\ [kg]$ de sandía a un precio $p(q) = 0.3q + 4\ [\$]$, y , la demanda de la sandía está dada por $D(p) = \frac{1\,000}{p^2}$. Calcule como cambiará la demanda de la sandía respecto a su peso, cuando $q = 10\ [kg]$. Redondee su respuesta con dos decimales.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

15. (14 PUNTOS)

    Se inscribe un cuarto de circunferencia en un cuadrado. Si el área de la superficie de este cuadrado crece a razón de $4\ [cm^2/s]$, calcule a qué velocidad se está incrementando el área del cuarto de círculo, cuando la longitud de su arco mide $\pi\ [cm]$.

16. (14 PUNTOS)

    La demanda de autos viene dada por $D(q) = \frac{2\ 000\ 000}{q}\ [\$]$, siendo q la cantidad que se vende. Si su costo es $C(q) = 1\ 000q + 20\ 000\ [\$]$, calcule la utilidad marginal, al vender 100 autos, dado que el ingreso por ventas es $I(D) = 100D + 100\ 000$.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

17. (14 PUNTOS)

    Se circunscribe un cuarto de circunferencia a un cuadrado. Si el área de la superficie de este cuadrado decrece a razón de $4\ [cm^2/s]$, calcule a qué velocidad se está decrementando el área del cuarto de círculo, cuando la longitud de su arco mide $\pi\ [cm]$.

18. (14 PUNTOS)

    La demanda de autos viene dada por $D(q) = \frac{3\ 000\ 000}{q}\ [\$]$, siendo q la cantidad que se vende. Si su costo es $C(q) = 2\ 000q + 22\ 000\ [\$]$, calcule la utilidad marginal, al vender 100 autos, dado que el ingreso por ventas es $I(D) = 100D + 100\ 000$.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 4

19. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(8)$, si:

$$f(x) = 3x + 5sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad x \in [-1, 1]$$

20. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(-8)$, si:

$$f(x) = 3x + 5sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad x \in [-1, 1]$$

21. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(-5)$, si:

$$f(x) = 2x + 7cos(\pi x) \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

22. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(1)$, si:

$$f(x) = 2x + 7cos(\pi x) \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

23. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(-3/2)$, si:

$$f(x) = 2x + \frac{5}{2}cos(2\pi x) \quad ; \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 5

24. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

"Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \frac{(F(x))^4}{4}$ es una antiderivada de $g(x) = (f(x))^3$."

25. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

"Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \left(2\sqrt{F(x)}\right)$ es una antiderivada de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$."

26. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

"Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \frac{(F(x))^3}{3}$ es una antiderivada de $g(x) = (f(x))^2$."

27. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

"Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(F(x))^2}\right)$ es una antiderivada de $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{f(x)}}$."

28. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

"Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = F(5x)$ es una antiderivada de $g(x) = f(5x)$."

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 6

29. (10 PUNTOS) La población mundial actual P es de $6\,000$ millones de personas y la población dentro de t $[años]$ se puede modelizar con:

$$P(t) = A\, e^{t/30}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la población promedio en la tierra para los próximos 30 $[años]$. Considere que $e \approx 2.72$.

30. (10 PUNTOS) La temperatura T en $[°\mathrm{C}]$ de una ciudad muy fría, t $[meses]$ medidos desde el mes de febrero, puede estimarse por la función:

$$T(t) = \frac{t^2}{30}\sqrt{3t^3 + 1}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la temperatura promedio entre los meses de marzo y abril. Redondee su respuesta con dos decimales.

31. (10 PUNTOS) Se inyecta cierta medicina en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad Q $[mg]$ que queda en la sangre, después de t $[horas]$, está dada por:

$$Q(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la cantidad promedio de medicina remanente en la sangre, durante la segunda hora. Considere que $ln(2.5) \approx 0.92$

32. (10 PUNTOS) El costo C de reparación en $[miles\ de\ \$]$ de cierto vehículo, luego de t $[años]$ de haberlo adquirido, puede estimarse por la función:

$$C(t) = \frac{6t}{\sqrt{t^2 + 16}}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine el costo promedio de reparación para el vehículo durante los tres primeros años.

33. (10 PUNTOS) La densidad D de una varilla, cuya longitud x se mide en $[m]$ desde un extremo de la varilla, puede modelizarse por la función:

$$D(x) = x^2\sqrt{x^3 + 1}\ \left[\frac{kg}{m}\right]$$

Si la longitud total es de 2 $[m]$ de longitud, verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la densidad promedio de la varilla. Redondee su respuesta con dos decimales.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 7

34. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 - 3x - 2}\, dx$$

35. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$$

36. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}\, dx$$

37. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\, dx$$

38. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}\, dx$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2020	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	21/septiembre/2020

Tema 8

39. (16 PUNTOS) Dada la región R:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \left(y \leq \frac{1}{x}\right) \wedge \left(y \leq \frac{1}{4}(x+1)^2\right) \wedge \left(y \geq \frac{1}{4}\right)\right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $y = -1$.

40. (16 PUNTOS) Dada la región R:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \left(x \geq \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{2}\right) \wedge \left(y \geq ln(x)\right) \wedge (y \leq 2)\right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje X.

41. (16 PUNTOS) Dada la región R:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (y \leq 10 - x^2) \wedge (y \geq x + 4)\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $x = 3$.

42. (16 PUNTOS) Dada la región R:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (y \geq -1) \wedge \left(y \leq \frac{1}{x^2+1}\right) \wedge (|x| \leq 1)\right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $x = 2$.

43. (16 PUNTOS) Dada la región R:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \left(y \geq \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right) \wedge \left(y \leq log(3x)\right)\right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $y = -1$.