

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 1

1. (10 PUNTOS) Un horno aumenta su temperatura inicial de $20 [^{\circ}\text{C}]$ a razón de $1.2 [^{\circ}\text{C}/\text{min}]$ durante una hora. Durante la segunda hora se mantiene la temperatura en cierto valor. Después del minuto 120, el horno se enfría a razón de $1.1 [^{\circ}\text{C}/\text{min}]$. Si t representa el tiempo en minutos $[\text{min}]$, la función de temperatura T está definida por:

$$T(t) = \begin{cases} 1.2t + 20, & 0 \leq t < 60 \\ A, & 60 \leq t \leq 120 \\ B - 1.1t, & 120 < t \leq 180 \end{cases}$$

- (a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de temperatura T sea continua para todo tiempo t $[\text{min}]$.
- (b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $T(t)$.
2. (10 PUNTOS) Se vende caramelos a $1.50 [$/\text{lb}]$ por cantidades hasta $10 [\text{lb}]$. Por encima de las $10 [\text{lb}]$ y hasta $20 [\text{lb}]$, se cobra $1.30 [$/\text{lb}]$ más un recargo. Por encima de las $20 [\text{lb}]$, se cobra $1.10 [$/\text{lb}]$ más un recargo. Si x representa la cantidad de libras $[\text{lb}]$, la función de precio p está definida por:

$$p(x) = \begin{cases} 1.5x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 1.3x + A, & 10 < x \leq 20 \\ 1.1x + B, & x > 20 \end{cases}$$

- (a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de precio p sea continua para toda cantidad de libras x .
- (b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $p(x)$.

3. (10 PUNTOS) Se establece un valor fijo de \$ 100 de impuestos sobre los primeros \$ 10 000 de ganancias, un impuesto del 12 % para ganancias comprendidas entre \$ 10 000 y \$ 50 000 más un recargo, y del 16 % sobre el resto de ganancias más un recargo. Si x representa la ganancia en dólares [\$], la función de impuestos I está dada por:

$$I(x) = \begin{cases} 100, & 0 \leq x < 10\,000 \\ A + 0.12(x - 10\,000), & 10\,000 \leq x \leq 50\,000 \\ B + 0.16(x - 50\,000), & x > 50\,000 \end{cases}$$

- (a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de impuestos I sea continua para toda ganancia x .
- (b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $I(x)$.
4. (10 PUNTOS) Se vende rocas decorativas a 2.50 [\$/lb] hasta 500 [lb] inclusive. Por encima de las 500 [lb] y hasta 1 000 [lb], se cobra 2 [\$/lb] más un recargo. Por encima de las 1 000 [lb], se cobra 1.50 [\$/lb] más un recargo. Si x representa la cantidad de libras [lb], la función de precio p está definida por:

$$p(x) = \begin{cases} 2.5x, & 0 \leq x \leq 500 \\ 2x + A, & 500 < x \leq 1\,000 \\ 1.5x + B, & x > 1\,000 \end{cases}$$

- (a) (8 PUNTOS) Calcule los VALORES NUMÉRICOS de A y B para que la función de precio p sea continua para toda cantidad de libras x .
- (b) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $p(x)$.
5. (10 PUNTOS) El número N de unidades en inventario de una pequeña empresa está dado por:

$$N(t) = 25 \left(2 \left\lceil \frac{t+2}{2} \right\rceil - t \right), \quad 0 \leq t \leq 12$$

donde t es el tiempo medido en meses.

- (a) (2 PUNTOS) Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función $N(t)$.
- (b) (8 PUNTOS) Por medio de un análisis de discontinuidad en cierto valor t del dominio de N , establezca con qué frecuencia la empresa debe reponer su inventario.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 2

6. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = -2 \cos(\theta) \quad ; \quad r_2 = \sqrt{3}$$

- (a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P , entre ambas curvas, en el segundo cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P .

7. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = 2 \quad ; \quad r_2^2 = 8 \cos(2\theta)$$

- (a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P , entre ambas curvas, en el tercer cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P .

8. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad r_2 = 1 - \cos(\theta)$$

- (a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P , entre ambas curvas, en el segundo cuadrante.
(b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P .

9. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1 = 3 \quad ; \quad r_2 = 2 - 2 \operatorname{sen}(\theta)$$

- (a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P , entre ambas curvas, en el cuarto cuadrante.
- (b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_1 en P .

10. (16 PUNTOS) Dadas las curvas en coordenadas polares:

$$r_1^2 = -\frac{9}{2} \cos(2\theta) \quad ; \quad r_2 = \frac{3}{2}$$

- (a) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas, tanto polares como rectangulares, del punto de intersección P , entre ambas curvas, en el tercer cuadrante.
- (b) (10 PUNTOS) Calcule la pendiente de la recta normal a la curva r_2 en P .

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 3

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

11. (14 PUNTOS)

Si una circunferencia, circunscrita a un cuadrado, está expandiendo su perímetro a una razón de π [cm/s], calcule a qué velocidad se incrementa el área de la superficie del cuadrado cuando el área del círculo es igual a 2π [cm²].

12. (14 PUNTOS)

Se vende q [kg] de sandía a un precio $p(q) = 0.4q + 3$ [\$], y , la demanda de la sandía está dada por $D(p) = \frac{1\ 000}{p^2}$. Calcule como cambiará la demanda de la sandía respecto a su peso, cuando $q = 10$ [kg]. Redondee su respuesta con dos decimales.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

13. (14 PUNTOS)

Si una circunferencia, inscrita en un cuadrado, está decrecentando su perímetro a una razón de 2π [cm/s], calcule a qué velocidad decrece el área de la superficie del cuadrado cuando el área del círculo es igual a π [cm²].

14. (14 PUNTOS)

Se vende q [kg] de sandía a un precio $p(q) = 0.3q + 4$ [\$], y , la demanda de la sandía está dada por $D(p) = \frac{1\ 000}{p^2}$. Calcule como cambiará la demanda de la sandía respecto a su peso, cuando $q = 10$ [kg]. Redondee su respuesta con dos decimales.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

15. (14 PUNTOS)

Se inscribe un cuarto de circunferencia en un cuadrado. Si el área de la superficie de este cuadrado crece a razón de $4 \text{ [cm}^2/\text{s]}$, calcule a qué velocidad se está incrementando el área del cuarto de círculo, cuando la longitud de su arco mide $\pi \text{ [cm]}$.

16. (14 PUNTOS)

La demanda de autos viene dada por $D(q) = \frac{2\,000\,000}{q}$ [\$], siendo q la cantidad que se vende. Si su costo es $C(q) = 1\,000q + 20\,000$ [\$], calcule la utilidad marginal, al vender 100 autos, dado que el ingreso por ventas es $I(D) = 100D + 100\,000$.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

17. (14 PUNTOS)

Se circunscribe un cuarto de circunferencia a un cuadrado. Si el área de la superficie de este cuadrado decrece a razón de $4 \text{ [cm}^2/\text{s]}$, calcule a qué velocidad se está decrementando el área del cuarto de círculo, cuando la longitud de su arco mide $\pi \text{ [cm]}$.

18. (14 PUNTOS)

La demanda de autos viene dada por $D(q) = \frac{3\,000\,000}{q}$ [\$], siendo q la cantidad que se vende. Si su costo es $C(q) = 2\,000q + 22\,000$ [\$], calcule la utilidad marginal, al vender 100 autos, dado que el ingreso por ventas es $I(D) = 100D + 100\,000$.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 4

19. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(8)$, si:

$$f(x) = 3x + 5\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) ; x \in [-1, 1]$$

20. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(-8)$, si:

$$f(x) = 3x + 5\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) ; x \in [-1, 1]$$

21. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(-5)$, si:

$$f(x) = 2x + 7\cos(\pi x) ; x \in [0, 1]$$

22. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(1)$, si:

$$f(x) = 2x + 7\cos(\pi x) ; x \in [0, 1]$$

23. (10 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(-3/2)$, si:

$$f(x) = 2x + \frac{5}{2}\cos(2\pi x) ; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 5

24. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA O FALSA:

“Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \frac{(F(x))^4}{4}$ es una antiderivada de $g(x) = (f(x))^3$.”

25. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA O FALSA:

“Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \left(2\sqrt{F(x)}\right)$ es una antiderivada de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.”

26. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA O FALSA:

“Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \frac{(F(x))^3}{3}$ es una antiderivada de $g(x) = (f(x))^2$.”

27. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA O FALSA:

“Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(F(x))^2}\right)$ es una antiderivada de $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{f(x)}}$.”

28. (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA O FALSA:

“Si f es una función continua en un intervalo (a, b) y F es una antiderivada en dicho intervalo, entonces $G(x) = F(5x)$ es una antiderivada de $g(x) = f(5x)$.”

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 6

29. (10 PUNTOS) La población mundial actual P es de 6 000 millones de personas y la población dentro de t [años] se puede modelizar con:

$$P(t) = A e^{t/30}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la población promedio en la tierra para los próximos 30 [años]. Considere que $e \approx 2.72$.

30. (10 PUNTOS) La temperatura T en [°C] de una ciudad muy fría, t [meses] medidos desde el mes de febrero, puede estimarse por la función:

$$T(t) = \frac{t^2}{30} \sqrt{3t^3 + 1}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la temperatura promedio entre los meses de marzo y abril. Redondee su respuesta con dos decimales.

31. (10 PUNTOS) Se inyecta cierta medicina en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad Q [mg] que queda en la sangre, después de t [horas], está dada por:

$$Q(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la cantidad promedio de medicina remanente en la sangre, durante la segunda hora. Considere que $\ln(2.5) \approx 0.92$

32. (10 PUNTOS) El costo C de reparación en [*miles de \$*] de cierto vehículo, luego de t [*años*] de haberlo adquirido, puede estimarse por la función:

$$C(t) = \frac{6t}{\sqrt{t^2 + 16}}$$

Verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine el costo promedio de reparación para el vehículo durante los tres primeros años.

33. (10 PUNTOS) La densidad D de una varilla, cuya longitud x se mide en [*m*] desde un extremo de la varilla, puede modelizarse por la función:

$$D(x) = x^2 \sqrt{x^3 + 1} \left[\frac{kg}{m} \right]$$

Si la longitud total es de 2 [*m*] de longitud, verificando previamente la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES y su aplicación respectiva, determine la densidad promedio de la varilla. Redondee su respuesta con dos decimales.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 7

34. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 - 3x - 2} dx$$

35. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

36. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} dx$$

37. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 - x^2 + 2x - 2} dx$$

38. (14 PUNTOS) Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} dx$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| AÑO: | 2020 | PERÍODO: | PRIMER TÉRMINO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESOR: | |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 21/septiembre/2020 |

Tema 8

39. (16 PUNTOS) Dada la región R :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(y \leq \frac{1}{x} \right) \wedge \left(y \leq \frac{1}{4}(x+1)^2 \right) \wedge \left(y \geq \frac{1}{4} \right) \right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $y = -1$.

40. (16 PUNTOS) Dada la región R :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(x \geq \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{2} \right) \wedge (y \geq \ln(x)) \wedge (y \leq 2) \right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje X .

41. (16 PUNTOS) Dada la región R :

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y \leq 10 - x^2) \wedge (y \geq x + 4) \}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $x = 3$.

42. (16 PUNTOS) Dada la región R :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y \geq -1) \wedge \left(y \leq \frac{1}{x^2 + 1} \right) \wedge (|x| \leq 1) \right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $x = 2$.

43. (16 PUNTOS) Dada la región R :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(y \geq \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) \right) \wedge (y \leq \log(3x)) \right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, que se genera al rotar R alrededor del eje $y = -1$.