

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**EXAMEN SEGUNDO PARCIAL PA0 I AÑO 2025**

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, ....., al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que **NO** puedo usar calculadora; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y que, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.**

*"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".*

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**Tema 1 (20 puntos)** Una empresa de logística mide la **eficiencia operativa** en función de dos variables de decisión:

- x: número relativo de turnos adicionales (puede ser negativo si se reducen).
- y: nivel de incentivos otorgados a los empleados (escala adimensional).

La eficiencia global se modela como:  $f(x, y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2)$

- a) Determina los puntos críticos y clasificalos.
- b) Interprete los resultados óptimos.

### Solución

1. Cálculo de los puntos críticos

$$f_x(x, y) = e^{x+y} \cdot 1 \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (2x) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 + 2x) = 0$$

$$f_y(x, y) = e^{x+y} \cdot 1 \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (-4y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y) = 0.$$

2. Obtenemos dos ecuaciones que se tienen que cumplir simultáneamente. El factor con la exponencial es nunca nulo así que lo podemos cancelar en ambas. Nos quedan las ecuaciones

$$x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \quad , \quad x^2 - 2y^2 - 4y = 0$$

3. Las ecuaciones son no lineales, pero son parecidas. Entonces restando la primera de la segunda nos queda  $2x + 4y = 0$  esto es  $x = -2y$ . Luego  $x^2 = 4y^2$  y reemplazando esto en la segunda ecuación queda  $4y^2 - 2y^2 - 4y = 0$ , es decir

$$2y^2 - 4y = 0. \text{ Se factoriza como } 2y(y - 2) = 0,$$

4. que ser  $y = 0$  o bien  $y = 2$ . Cuando  $y = 0$ , debe ser también  $x = 0$ .

Obtenemos  $P_1 = (0,0)$ . Y

5. Cuando  $y = 2$  debe ser  $x = -4$ , obtenemos el punto  $P_2 = (-4,2)$ .

6. Análisis de los puntos críticos

$$f_{xx}(x, y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 + 2x + 2), f_{yy}(x, y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y - 4),$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 + 2x).$$

Tenemos

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En (0,0) tenemos un punto silla pues:

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= e^0(2 + 0 + 0 - 0) = 2 \\
 f_{yy} &= e^0(-4 - 0 + 0 - 0) = -4 \\
 f_{xy} &= e^0(0 + 0 - 0) = 0 \\
 H &= 2(-4) - 0 = -8 < 0
 \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos el otro punto crítico  $P_2 = (-4, 2)$  donde

$$Hf(P_2) = \begin{pmatrix} e^{-2} \cdot (2) & 0 \\ 0 & e^{-2} \cdot (-4) \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2e^{-2} < 0 \quad \text{y} \quad \det(Hf(P_1)) = (e^{-2})^2(6 \cdot 12 - 8 \cdot 8) = -e^{-4} \cdot 8 < 0,$$

$f$  tiene una silla en  $P_2 = (-4, 2)$ .

Interpretación:

- **No hay máximos ni mínimos relativos**, ya que **ambos puntos críticos son de silla**.
- Esto sugiere que la eficiencia operativa:
  - **No se maximiza ni minimiza de forma clara** al variar solo las combinaciones de turnos e incentivos.
  - Podría depender de restricciones adicionales o factores externos no modelados.

**Interpretación práctica:**

- En  $(0, 0)$ : eficiencia neutra, sin turnos ni incentivos adicionales.
- En  $(-4, 2)$ : reducir turnos  $(-4)$  e incentivar  $(2)$  **no garantiza mejora sostenida**.

### RÚBRICA

| Capacidades<br>deseadas                                                                                              | Desempeño                                                                   |                                                                                              |                                                                                                                             |                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                      | Inicial                                                                     | En desarrollo                                                                                | Desarrollado                                                                                                                | Excelente                                                                                                                                                        |
| El estudiante es capaz de resolver problemas utilizando optimización sin restricción y optimización con restricción. | El estudiante reconoce que debe optimizar, pero no aplica el procedimiento. | El estudiante plantea el procedimiento en la región abierta y encuentra los puntos críticos. | El estudiante. plantea el procedimiento encuentra los puntos críticos y calcula el determinante hessiano, pero no concluye. | El estudiante. plantea el procedimiento encuentra los puntos críticos determinando su carácter y justifica su decisión. Da una interpretación de los resultados. |
|                                                                                                                      | 0-1                                                                         | 2-10                                                                                         | 11-15                                                                                                                       | 16-20                                                                                                                                                            |

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**Tema 2 (20 puntos)**

Dada la función  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^2}$

1. Hallar  $P_2(xy)$ , el polinomio de Taylor de segundo grado de  $f$  en  $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ .
2. Utilice  $P_2(x, y)$  para aproximar  $\sqrt{(2.02)^3 + (0.97)^2}$

**Solución:**

1. Tenemos que:

$$f(2, 1) = \sqrt{2^3 + 1^2} = 3$$

$$D_1f(x, y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^2}}, \quad D_1f(2, 1) = 2$$

$$D_2f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^3 + y^2}}, \quad D_2f(2, 1) = \frac{1}{3}$$

$$D_{11}f(x, y) = \frac{3x^4 + 12xy^2}{4(x^3 + y^2)^{3/2}}, \quad D_{11}f(2, 1) = \frac{2}{3}$$

$$D_{12}f(x, y) = \frac{-3x^2y}{2(x^3 + y^2)^{3/2}}, \quad D_{12}f(2, 1) = -\frac{2}{9}$$

$$D_{22}f(x, y) = \frac{x^3}{(x^3 + y^2)^{3/2}}, \quad D_{22}f(2, 1) = \frac{8}{27}$$

$$P_2(x, y) = f(2, 1) + [(x - 2)D_1f(2, 1) + (y - 1)D_2f(2, 1)]$$

$$+ \frac{1}{2}[(x - 2)^2D_{11}f(2, 1) + 2(x - 2)(y - 1)D_{12}f(2, 1) + (y - 1)^2D_{22}f(2, 1)]$$

$$= 3 + \left[2(x - 2) + \frac{1}{3}(y - 1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x - 2)^2 + 2\left(-\frac{2}{9}\right)(x - 2)(y - 1) + \frac{8}{27}(y - 1)^2\right], \text{ es}$$

decir

$$P_2(x, y) = 3 + 2(x - 2) + \frac{1}{3}(y - 1) + \frac{1}{3}(x - 2)^2 - \frac{2}{9}(x - 2)(y - 1) + \frac{8}{27}(y - 1)^2$$

2. Para  $(x, y) = (2.02, 0.97)$  y  $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ , tenemos  $x - 2 = 0.02, y - 1 = -0.03, y = 3.0304$

$$\sqrt{(2.02)^3 + (0.97)^2} \approx P_2(2.02, 0.97) = 3.030$$

**RÚBRICA**

| Capacidades<br>deseadas                                       | Desempeño                                                                         |                                                                                                                                 |                                                                                                                                           |                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                               | Inicial                                                                           | En desarrollo                                                                                                                   | Desarrollado                                                                                                                              | Excelente                                                                                                                                |
| El estudiante sabe obtener el polinomio de Taylor de orden 2. | El estudiante plantea la fórmula de Taylor de primer y determina los incrementos. | El estudiante plantea la fórmula de Taylor de primer orden y las derivadas con respecto a las variables x e y correspondientes. | El estudiante evalúa en el punto indicado A todas las derivadas parciales y plantea la ecuación del polinomio de Taylor de segundo orden. | El estudiante obtiene la aproximación pedida reemplazando los incrementos y llegando al resultado exacto o deja expresado en fracciones. |
|                                                               | 0-5                                                                               | 6-8                                                                                                                             | 9-15                                                                                                                                      | 15-20                                                                                                                                    |

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**Tema 3 (20 puntos)**

Evaluar la integral  $\iint_D (x^2 + y^2)^3 dA$  donde  $D$  es la región del primer cuadrante encerrada por las hipérbolas:  $xy = 2, xy = 3, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4$

**Solución:**

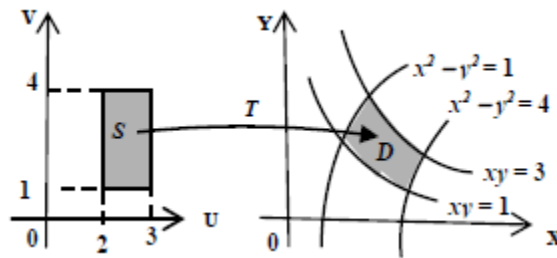
Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$u = xy, v = x^2 - y^2$$

Hallemos la región  $S$  del plano  $UV$  que corresponde a la región  $D$  del plano  $XY$

$$xy = 2 \Rightarrow u = 2, xy = 3 \Rightarrow u = 3,$$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow v = 1, x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow v = 4$$



De acuerdo a las ecuaciones tenemos:

$$4u^2 + v^2 = 4x^2y^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{4u^2 + v^2}$$

Además:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2) = -2\sqrt{4u^2 + v^2}$$

Luego:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{-2\sqrt{4u^2 + v^2}}$$

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + y^2)^3 dA &= \iint_S (\sqrt{4u^2 + v^2})^3 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\
 &= \iint_S (4u^2 + v^2)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{4u^2 + v^2}} dudv \\
 &= \frac{1}{2} \iint_S (4u^2 + v^2) dudv = \frac{1}{2} \int_2^3 \int_1^4 (4u^2 + v^2) dv du \\
 &= \frac{1}{2} \int_2^3 \left[ 4u^2 v + \frac{1}{3} v^3 \right]_1^4 du = \frac{1}{2} \int_2^3 (12u^2 + 21) du = \frac{97}{2}
 \end{aligned}$$

### RÚBRICA

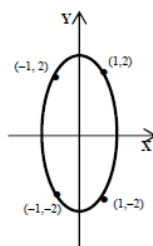
| Capacidades<br>deseadas                                                                                               | Desempeño                                                     |                                                                                                                                                                                 |                                                                                                  |                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                       | Inicial                                                       | En desarrollo                                                                                                                                                                   | Desarrollado                                                                                     | Excelente                                                                    |
| El estudiante es capaz de aplicar integrales dobles al cálculo de áreas de una región utilizando cambios de variable. | El estudiante trata de dibujar la región, pero comete errores | El estudiante hace un gráfico de la región general y grafica el dominio de integración y aplica correctamente un cambio de variable y encuentra la nueva región de integración. | El estudiante encuentra la nueva región de integración y reemplaza correctamente en la integral. | El estudiante calcula la integral correctamente llegando al valor requerido. |
|                                                                                                                       | 0-2pts.                                                       | 3-8 pts.                                                                                                                                                                        | 9-15 pts.                                                                                        | 15-20 pts.                                                                   |

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**Tema 4 (20 puntos)**

Hallar el máximo y el mínimo de la función  $f(x, y) = 6xy$  sobre la elipse  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

**Solución :** Aquí, la curva de restricción es la elipse



$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Entonces buscamos para la función  $f(x, y) = 6xy$  los extremos sobre esta curva.

$$(1) \begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = \lambda x & (2) \\ 6x = \lambda \frac{y}{4} & (3) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 & (4) \end{cases}$$

Despejando  $\lambda$  en (2):  $\lambda = \frac{6y}{x}$  y reemplazando en (3): el valor de cero no aplica

$$6x = \frac{6y}{x} \frac{y}{4} \Rightarrow y^2 = 4x^2$$

Reemplazando este valor en (4):  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{8} = 1 \Rightarrow$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

Tenemos cuatro puntos críticos:

$$(-1, -2), (-1, 2), (1, -2) \text{ y } (1, 2)$$

Comprobación

| $(x, y)$  | $(-1, -2)$ | $(-1, 2)$ | $(1, -2)$ | $(1, 2)$ |
|-----------|------------|-----------|-----------|----------|
| $f(x, y)$ | 12         | -12       | -12       | 12       |

El máximo es 12 y es alcanzado en los puntos  $(-1, -2)$  y  $(1, 2)$ .

El mínimo es  $-12$  y es alcanzado en los puntos  $(-1, 2)$  y  $(1, -2)$ .

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**RÚBRICA**

| Capacidades<br>deseadas                                                                                               | Desempeño literal                  |                                                                                          |                                                                                          |                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                       | Inicial                            | En Desarrollo                                                                            | Desarrollado                                                                             | Excelente                                                                                                                             |
| El estudiante debe saber plantear y resolver problemas de optimización de funciones escalares sujeta a restricciones. | No sabe cómo plantear el problema. | Identifica la función objetivo y las restricciones.<br>O Plantea la función Lagrangeana. | Optimiza la función Lagrangiana, resuelve el sistema de ecuaciones, pero comete errores. | El estudiante justifica adecuadamente que en dicho punto se alcanza el óptimo solicitado comparando con otro valor de la restricción. |
|                                                                                                                       | 0                                  | 1-6                                                                                      | 7 - 14                                                                                   | 15-20                                                                                                                                 |

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES**  
**Docentes: Elvis Aponte— Nelson Córdova Rosas—Ángel Guale— Fecha: 25 de agosto del 2025.**  
**Horario: 11:30 – 13:30**

**Tema 5 (20 puntos)**

Suponiendo las hipótesis del Teorema de Green, evalúa la integral de línea

$$\oint_C (3x - y)dx + (2y + x^2)dy,$$

donde C es el contorno del rectángulo con vértices en (0,0), (4,0), (4,2), y (0,2).

**Solución**

Las funciones componentes

$$\begin{array}{ll} M(x, y) = 3x - y & \\ N(x, y) = 2y + x^2 & \end{array} \quad \text{implica que} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x - y) = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + x^2) = 2x \end{array}$$

Según el Teorema de Green:

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\oint_C (3x - y)dx + (2y + x^2)dy = \iint_R (2x - (-1))dA = \iint_R (2x + 1)dA$$

La región R es el rectángulo con x desde 0 hasta 4 y y desde 0 hasta 2.

$$\begin{aligned} \iint_R (2x + 1)dA &= \int_0^4 \int_0^2 (2x + 1)dydx = \int_0^4 (2x + 1) \cdot y|_0^2 dx = \\ &= \int_0^4 2(2x + 1)dx = 2[x^2 + x]|_0^4 = 2(16 + 4) = 2 \cdot 20 = 40. \end{aligned}$$

**RÚBRICA**

| Capacidades<br>deseadas                                            | Desempeño                                                              |                                                                             |                                                                                                |                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                    | Inicial                                                                | En desarrollo                                                               | Desarrollado                                                                                   | Excelente                                                                                                                                                      |
| El estudiante aplica el teorema de Green a campos bidimensionales. | El estudiante menciona, pero no escribe ni esboza el teorema de Green. | El estudiante plantea al usar Green calcula las derivadas correspondientes. | El estudiante aplica el Teorema correctamente pero no calcula la integral doble correctamente. | El estudiante resuelve la integral doble correctamente, una vez que ha aplicado y verificado correctamente la hipótesis del Teorema de Green y su formulación. |
|                                                                    | 0-1                                                                    | 2-4                                                                         | 5-13                                                                                           | 14-20                                                                                                                                                          |