FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<table>
<tr><td>AÑO:</td><td>2024</td><td>PERÍODO:</td><td>I PAO</td><td>MATERIA:</td><td>Cálculo de una variable</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROFESORES:</td><td colspan="4">Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Carrión L., Cordero M.,
Díaz R., García E., Hernández C., Laveglia F., López E.,
Mejía M., Ramos M., Toledo X., Valdiviezo J.</td></tr>
<tr><td colspan="2">EVALUACIÓN:</td><td colspan="2">TERCERA</td><td>FECHA:</td><td>16/septiembre/2024</td></tr>
</table>

Nombre: ____ *Cédula:* _______________ *Paralelo:* ____

COMPROMISO DE HONOR

Al leer este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o una esferográfica, que los temas voy a desarrollarlos en forma ordenada, que a lo sumo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen, y, NO USARÉ calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajeno al desarrollo del examen. No debo consultar libros, ni notas, ni apuntes adicionales a las que se proporcionen para esta evaluación.

Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y al estar de acuerdo con la declaración anterior, procedo a firmarlo.

____

"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

1. (10 PUNTOS) Dados $X = \mathbb{R}$ y la función $d: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = (2x - y)^2$.

   (a) (6 PUNTOS) Enuncie los axiomas que deben cumplirse para que el par (X, d) constituya un espacio métrico.

   (b) (4 PUNTOS) Verifique que el par (X, d) dado, no conforma un espacio métrico.

2. (15 PUNTOS) Considere la siguiente curva C dada en forma implícita:

$$xy^2 + 2 = cos(\pi y^3) + 4y$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de C en el punto $P(1, 1)$.

3. (25 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{4}(2\,ln(x) - 3)$$

(a) (7 PUNTOS) Determine las coordenadas del (o de los) PUNTO(S) CRÍTICO(S) de f.
(b) (6 PUNTOS) Determine los INTERVALOS DE MONOTONÍA de f.
(c) (6 PUNTOS) Determine los INTERVALOS DE CONCAVIDAD de f.
(d) (6 PUNTOS) Determine las coordenadas del (o de los) PUNTO(S) DE INFLEXIÓN de f.

4. (25 PUNTOS) Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

5. (25 PUNTOS) Dada la región R definida como:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \left(2^{-|x|} \leq y \leq 1\right) \wedge (-2 \leq x \leq 2)\right\}$$

Calcule el volumen V del sólido de revolución que se genera al rotar R alrededor de la recta $y = 0$. Para el efecto, realice lo siguiente:

(a) (5 PUNTOS) Ubique, en el plano cartesiano, puntos relevantes de la región R, grafique los elementos que la limitan, identifíquela claramente; y, bosqueje su reflexión con respecto al eje de rotación.

(b) (10 PUNTOS) Dibuje la(s) franja(s) representativa(s) y su(s) rotación(es); luego, establezca la(s) respectiva(s) expresión(es) para el volumen del (o de los) elemento(s) tridimensional(es) generado(s).

(c) (10 PUNTOS) Plantee y evalúe la(s) integral(es) definida(s) correspondiente(s) al cálculo del volumen V.