espol **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**

AÑO: **2024**

PERIODO: **SEGUNDO TERMINO**

MATERIA: **Álgebra lineal**

PROFESORES: Laveglia Franca, Martin Carlos, Pastuizaca María Nela, Ramírez John, Sánchez Joffre, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

EVALUACIÓN: Tercera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

FECHA: 06 de febrero de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ………..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** __________________ ***PARALELO:*** ______

1. ***(20 Puntos)***

   A continuación, encontrará 3 afirmaciones, donde debe determinar si estas son verdaderas o falsas. En cada caso debe justificar su elección, bien sea presentando alguna demostración, contraejemplo o cálculo.

   a. Sean A y B matrices cuadradas de orden n, si A y B son semejantes, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.

   b. Sea A una matriz cuadrada de orden n. A es diagonalizable si y solo si A es simétrica.

   c. Si $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de un K- espacio vectorial V, entonces para cada $v \in V$ existen escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$.

2. (20 Puntos)

Considere el espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$. Donde $V = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in M_{2x2}/a\,,b \in \mathbb{R}\right\}$ con las operaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 + 1 \\ a_1 + a_2 + 1 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(a+1) - 1 \\ \alpha(a+1) - 1 & \alpha b \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a. Determine si el conjunto $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de V.

b. En caso afirmativo, determine el vector coordenada de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ respecto a β.

3. ***(20 Puntos)***

Construir, en caso de ser posible, una Transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(T) = gen\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ y la imagen sea $\pi = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + 2y - 3z = 0\right\}$.

4. (20 Puntos)

Sea $V = M_{2x2}$ con las operaciones usuales. Se define en V el producto interno

$\langle A, B\rangle = traza(B^t A)$. Determinar:

a. $H^{\perp}$ donde $H = \{A \in M_{2x2} / A + A^t = 0_{2x2}\}$.

b. La proyección de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sobre $H^{\perp}$.

5. (20 Puntos)

Sea $T: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ una transformación lineal con regla de correspondencia:

$$T(a + bx) = (2a + 3b) + 3(a - 2b)x.$$

Encuentre, de ser posible, una base β respecto de la cual la representación matricial de T sea una matriz diagonal. Si β existe, determine la matriz asociada a T respecto de β.