RUBRICA DE EXAMEN DE MEJORAMIENTO DE CALCULO VECTORIAL

Tema 1.A CONTINUIDAD y DIFERENCIABLIDAD

$$f_2(x,y) = \begin{cases} xy & si \quad x \geq 0 \text{ ó } y \geq 0 \\ ln(1+xy) & si \quad x < 0 \text{ é } y < 0 \end{cases}$$

- **a) Analice la continuidad en los puntos (1,1) y (-1,0)**
- **b) Determine, si existen las derivadas parciales en (0,0)**
- **c) Es diferenciable en (0,0)?**

Consideremos los recintos del plano en los que se divide el dominio de definición de la función $f_2(x,y)$:

$$D_1\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ o } y \geq 0\} \text{ y } D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y < 0\}.$$

El punto $(1,1)$ está en el interior del conjunto D_1 por tanto

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} xy = 1,$$

que coincide con el valor de la función en $(1,1)$, por lo que $f_2(x,y)$ es continua en $(1,1)$.

Para estudiar la continuidad de la función $f_2(x,y)$ en $(-1,0)$, debemos tener en cuenta que $(-1,0)$ está en la frontera que separa los recintos D_1 y D_2, y por tanto, para calcular el límite de $f_2(x,y)$ en dicho punto debemos calcular los límites siguientes:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(-1,0)\\(x,y)\in D_1}} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} xy = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(-1,0)\\(x,y)\in D_2}} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} ln(1+xy) = ln(1) = 0$$

en consecuencia podemos afirmar que $f_2(x,y)$ es continua en $(-1,0)$ pues

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(-1,0).$$

---

b)

$$f^+_x(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \quad \wedge \quad f^-_x(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f^+_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0h-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \quad \wedge \quad f^-_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+0h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

c

c) **Las derivadas parciales**

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y & ,x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \\ \dfrac{y}{1+xy} & ,x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \end{cases}$$

la cual es continua ambos límites cuando (x,y) tienden a cero dan 0
es decir es continua en (0,0)

$$f_y(x,y)=\begin{cases} x & ,x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \\ \dfrac{x}{1+xy} & ,x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \end{cases}$$

la cual es continua ambos límites cuando (x,y) tienden a cero dan 0
es decir es continua en (0,0)

Tenemos que las derivadas parciales son continuas en (0,0), por lo tanto f es DIFERENCIABLE en (0,0)

Tema 1.B CONTINUIDAD y DIFERENCIABLIDAD

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

d) **Analice la continuidad en los puntos (1,1) y (-1,0)**
e) **Determine, si existen las derivadas parciales en (0,0)**
f) **Es diferenciable en (0,0)?**

a) **(x,y)= (1,1) y en (-1,0)**
La función es continua . utilizando algebra de funciones continuas debido a que el numerador es compuesta de continuas y el denominador es un polinomio continuo y distinto de cero en ambos casos.

b)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{sen(h^3 0^2)}{\left(h^2+0^2\right)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{sen(0^3 h^2)}{\left(0^2+h^2\right)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{sen(h^3k^2)}{\left(h^2+k^2\right)^2}-0-\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\dfrac{sen(h^3k^2)}{\left(h^2+k^2\right)^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(h^3k^2)}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{5}{2}}}\approx\lim_{h\to 0}\frac{h^3k^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{5}{2}}}=No\ existe$$

$usar\ \ k=mh$ queda $L=\dfrac{m^2}{1+m^{\frac{5}{2}}}$, $si\ m=1,\ L=\dfrac{1}{2}$, si $m=0$, $L=0$, el límite no existe.

usando coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{sen(r^3\cos^3\theta\cdot r^2 sen^2\theta)}{\left(r^2\cos^2\theta+r^2sen^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}=\lim_{r\to 0}\frac{sen(r^3\cos^3\theta\cdot r^2 sen^2\theta)}{\left(r^2\cos^2\theta+r^2sen^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}=\lim_{r\to 0}\frac{sen(r^5\cos^3\theta sen^2\theta)}{r^5(r^5\cos^3\theta sen^2\theta)}\cdot(r^5\cos^3\theta sen^2\theta)=(r^5\cos^3\theta sen^2\theta)$$

depende de el ángulo θ, si $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $L\neq 0$

por lo tanto no es diferenciable.

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño literal a)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad de una función escalar de varias variables</td><td>Inicial</td><td>En Desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>No sabe como plantear el problema</td><td>El estudiante aplica la definición de continuidad para los puntos solicitados</td><td>El estudiante halla correctamente los límites en ambos puntos, pero se equivoca al concluir.</td><td>El estudiante calcula el límite y concluye de forma correcta</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1 - 2</td><td>3 - 4</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño literal b)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">El estudiante debe ser capaz de analizar la existencia de las derivadas parciales</td><td>Inicial</td><td>En Desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>No sabe cómo</td><td>El estudiante aplica la definición de</td><td>El estudiante halla correctamente</td><td>El estudiante calcula y determina la</td></tr>
</table>

en funciones escalares de varias variables.	plantear el problema	derivadas parciales para ambas variables.	el límite de ambas derivadas parciales en el punto (0,0), pero se equivoca al concluir.	existencia de ambas derivadas parciales
	0	1 – 2	3 - 4	5

Capacidades deseadas	**Desempeño literal c)**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de analizar la diferenciabilidad de una función escalar de varias variables	No sabe cómo plantear el problema	El estudiante aplica la definición de diferenciabilidad para el punto (0,0)	El estudiante halla correctamente el límite usando los valores obtenidos en el literal anterior, pero se equivoca al concluir.	El estudiante calcula ambos límites y concluye de forma correcta
	0	1 - 2	3- 4	5

Tema 2 (REGLA DE LA CADENA Y/O IMPLÍCITA)

Sean $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = uv^2$, $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

. Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en el punto $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en el punto $x = 2$, $y = 1$.

Solución

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}v^2$$

y de nuevo aplicando esta regla calculamos la segunda derivada,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)v^2 + 2v\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)v^2 + 2v\frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

Sabemos que $x(1, 1) = 2$, $y(1, 1) = 1$, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)\\ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1).\end{aligned}$$

Además por el teorema de Clairaut tenemos, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)$, por lo tanto obtenemos finalmente que, $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) = 8$. ♦

Capacidades deseadas	**Desempeño literal**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar la regla de la cadena de segundo orden para funciones de varias variables	No sabe cómo plantear el problema	Aplica la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial g}{\partial u}$ y evalúa de forma correcta los términos que componen la expresión	Aplica la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ pero se equivoca en la evaluación de algún término de la expresión	El estudiante calcula $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ forma correcta y expresa la respuesta de forma clara
	0	1-6	7-12	13-15

Tema 2 IMPLÍCITA

Sea $z = u(x, y)$ la función definida implícitamente por la $xy + z^2 x^2 - 1 = 0$ en una vecindad del punto $(-2, 4)$ tal que $u(-2, 4) = -3/2$. Calcule la derivada de la función z respecto a x en el punto $(-2, 4)$.

Solución

En primer lugar verificamos que la función $z = u(x, y)$ existe. Sea $f(x, y, z) = xy + z^2 x^2 - 1$.

Entonces $f(-2, 4, -3/2) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(-2, 4, -3/2) = 2zx^2\big|_{x=-2, y=4, z=-3/2} = -12 \neq 0$.

Por el teorema 4.3, la función $z = u(x, y)$ existe tal que

$$xy + u^2(x, y)x^2 - 1 = 0$$

y $$u(-2, 4) = -3/2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2zx^2.$$

Obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-2, 4) = -\frac{y + 2xz^2}{2zx^2}\bigg|_{x=-2, y=4, z=-3/2} = -\frac{5}{12}.$$

Hay otra opción para encontrar el valor $\frac{\partial u}{\partial x}(-2, 4)$. Tomamos la derivada de la igualdad (4.7) con respecto a la variable x:

$$y + 2x^2 u(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2u^2(x, y)x = 0. \tag{4.8}$$

En esta igualdad sustituimos $x = -2$, $y = 4$ y $u(-2, 4) = -3/2$. Entonces

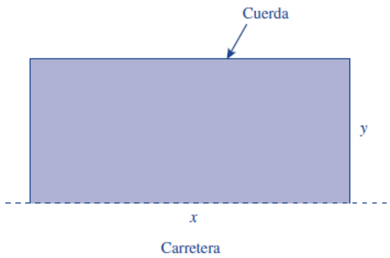
$$4 + 2 \cdot 4 \cdot (-3/2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \cdot (-3/2)^2 \cdot (-2) = 0,$$

desde donde de nuevo obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial x}(-2, 4) = -5/12$. ♦

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
El estudiante debe saber aplicar el teorema de la función implícita, verificando que se presenten las condiciones del mismo en el punto dado.	**Inicial**	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo plantear el problema	Verifica las condiciones de existencia de la función implícita en el punto dado.	El estudiante determina la expresión ´para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ pero se equivoca en el cálculo de ésta.	El estudiante calcula $\frac{\partial z}{\partial x}$ forma correcta y expresa la respuesta de forma clara.
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 3 Optimización(problema aplicado)

Se quiere encerrar un terreno de forma rectangular con uno de sus lados sobre una carretera recta con una cuerda de 100 m de largo. El terreno estará demarcado por la carretera y los otros tres lados por la cuerda (v. figura 5.6). Hallar las dimensiones del terreno de mayor área que puede encerrarse de esta manera.



Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange tenemos:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda, \\ x = 2\lambda, \\ x + 2y = 100, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50, \\ y = 25, \\ \lambda = 25, \end{cases}$$

$$f(50, 25) = 1250.$$

Las dimensiones del terreno que puede encerrarse con una cuerda de 100 m son 50 m de largo por 25 m de ancho y tiene un área de 1250 m^2. Supongamos ahora que la cuerda mide 101 m. Repitiendo el procedimiento tenemos:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda, \\ x = 2\lambda, \\ x + 2y = 101, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{101}{2} \approx 50,5 \\ y = \dfrac{101}{4} \approx 25,25 \\ \lambda = \dfrac{101}{4} \approx 25,25 \end{cases}$$

$$f(50,5, 25,25) \approx 1275.$$

Falta la hessiana

Al repetir el proceso con una cuerda de 99 m de longitud encerramos un terreno de área aproximada 1225 m^2. Es decir, si la cuerda tiene un metro más o un metro menos de largo podríamos encerrar un terreno con área máxima igual a 1225 $\pm$ λ m^2.

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe saber plantear y resolver problemas de optimización de funciones escalares sujeta a restricciones	No sabe cómo plantear el problema	Identifica la función objetivo y las restricciones. Plantea la función Langraniana	Optimiza la función Langraniana, resuelve el sistema de ecuaciones de forma correcta	El estudiante justifica adecuadamente que en dicho punto se alcanza el óptimo solicitado
	0	1-6	7 - 12	13-15

Tema 3 B

Determine los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la elipse dada como la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ y el plano $y + z = 1$

Solución

Queremos maximizar y minimizar $f(x, y, z)$ sujeta a $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ y $h(x, y, z) = y + z - 1 = 0$. Las ecuaciones de Lagrange correspondientes son

(1) $$1 = 2\lambda x$$

(2) $$2 = 2\lambda y + \mu$$

(3) $$3 = \mu$$

(4) $$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

(5) $$y + z - 1 = 0$$

De (1), $x = 1/(2\lambda)$; de (2) y (3), $y = -1/(2\lambda)$. Así, de (4), $(1/(2\lambda))^2 + (-1/(2\lambda))^2 = 2$, lo que implica que $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. La solución $\lambda = \frac{1}{2}$ proporciona el punto crítico $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ y $\lambda = -\frac{1}{2}$ da el punto crítico $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$. Concluimos que $f(1, -1, 2) = 5$ es el valor máximo y $f(-1, 1, 0) = 1$ es el valor mínimo.

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe saber plantear y resolver problemas de optimización de funciones escalares sujeta a restricciones	No sabe cómo plantear el problema	Identifica la función objetivo y las restricciones. Plantea la función Langraniana	Optimiza la función Langraniana, resuelve el sistema de ecuaciones de forma correcta	El estudiante justifica adecuadamente que en dicho punto se alcanza el óptimo solicitado
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 4 A

Aplicar el Teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C x^2 y\,dx + xy^2\,dy$$

donde C es la frontera de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

SOLUCIÓN

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \int_C (x^2 y\,dx + xy^2\,dy) = \iint_D (\,y^2 - x^2)\,dx\,dy.$$

La región D se describe como

$$-2 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 8 - x^2,$$

y en consecuencia

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} (y^2 - x^2)\,dx\,dy = \frac{2816}{7}.$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo interpretar y aplicar el teorema de Green para el cálculo de integrales de línea.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo plantear la integral de línea a través del teorema de Green.	Identifica la curva cerrada y la región plana limita por dicha curva pero aplica mal el teorema de Green.	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva y aplica correctamente el teorema de Green pero no resuelve la integral.	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva y aplica correctamente el teorema de Green resolviendo la integral.
	0	1 - 6 puntos	7 - 12 puntos	13 - 15 puntos

TEMA 4. B

Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2+yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz+xy)\right),$$

a lo largo de la curva definida por:

$$\sigma(t) = \left(\log(t^2-t+1), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(t^3+3t^2-3t)\right), \frac{\cos(t^5-t)-1}{(t^2+t+1)^{4/7}}\right),$$

SOLUCION

un potencial escalar, es decir, $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & e^{xz}(xyz^2+yz) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & xze^{xz} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & e^{xz}(x^2yz+xy) \end{array}\right\}$$

entonces

$$f(x,y,z) = \int xze^{xz}\,dy = xyze^{xz} + \varphi(x,z).$$

Para determinar φ usamos las otras dos ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xz}(xyz^2 + yz) = e^{xz}(yz + xyz^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \varphi(x,z) \equiv \varphi(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xz}(x^2yz + xy) = e^{xz}(xy + x^2yz) + \varphi'(z) \Rightarrow \varphi(z) = \text{cte}.$$

Luego una función potencial es $f(x,y,z) = xyze^{xz}$. Finalmente, como $\sigma(0) = (0,0,0)$, $\sigma(1) = (0,1,0)$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\sigma = f(0,1,0) - f(0,0,0) = 0.$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe identificar la integral de un campo vectorial y determina el trabajo que le toma a dicho campo mover una partícula a lo largo de una trayectoria.	No sabe identificar una integral de línea de un campo vectorial para el cálculo del trabajo que éste realiza a través de una trayectoria.	Calcula el rotacional del campo vectorial y concluye que éste es conservativo, pero no obtiene la expresión correcta para una función potencial.	Calcula el rotacional del campo vectorial y concluye que éste es conservativo, obtiene la expresión correcta para una función potencial, pero comete errores en el cálculo de la integral de línea.	Calcula el rotacional del campo vectorial y concluye que éste es conservativo, obtiene la expresión correcta para una función potencial y finalmente realiza el cálculo de la integral de línea.
	0	1 - 6 puntos	7 -12 puntos	13 - 15 puntos

TEMA 5 A Integral triple

Considérese la integral

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx.$$

(a) Determinar los límites de integración para poder escribir I de la forma

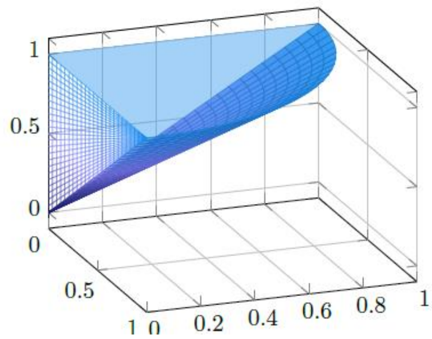
$$I = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx\, dz.$$

(b) Calcular el valor de dicha integral mediante un cambio de variables adecuado.

SOLUCIÓN

la región de integración descrita por

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$$



La integral será

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx\, dz.$$

como

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r \leq z \leq 1.$$

La integral en coordenadas cilíndricas será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 \frac{e^{z^2}}{r} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^z e^{z^2} \, dr \, dz \, d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z e^{z^2} \, dz \, d\theta.$$

El valor final de la integral es $\frac{\pi}{4}(e-1)$.

RÚBRICA Parte (a)

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe aplicar cambios en el orden de integración para integrales triples.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo identificar los límites de cada variable para realizar un cambio de orden de integración.	Identifica los límites de cada variable, pero plantea mal los nuevos límites de integración	Identifica los límites de cada variable e identifica los nuevos límites, pero no plantea la integral.	Identifica los nuevos límites de cada variable y plantea la integral con el cambio de orden de integración.
	0	**1 - 8 puntos**	**9 - 15 puntos**	**16 - 20 puntos**

RÚBRICA Parte (b)

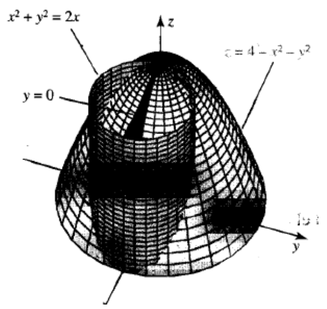
Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**

El estudiante sabe definir cambios de variables adecuado para integrales triples.	No sabe definir un cambio de variables adecuado para resolver la integral triple.	Define un cambio de variables adecuado y calcula el Jacobiano, pero no identifica bien la nueva región de integración.	Aplica correctamente el cambio de variables para integrales triples ubicando bien la región de integración pero comete errores en el cálculo de la integral.	Aplica correctamente el cambio de variables para integrales triples ubicando bien la región de integración y resuelve la integral.
	0	1 - 8puntos	9 - 15 puntos	16 -20 puntos

Tema 5 B

Determine el volumen de la región sólida S, en el primer octante, acotada por arriba por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, como se muestra en la figura 5.

SOLUCIÓN



En coordenadas cilíndricas, el paraboloide es $z = 4 - r^2$ y el cilindro es $r = 2\cos\theta$. La variable z va del plano xy al paraboloide, esto es, desde 0 hasta $4 - r^2$. La figura 6 muestra la "sombra" del sólido en el plano xy; esta figura sugiere que para una θ fija, r va de 0 a 2. Por último, θ toma valores de 0 a $\pi/2$. Así que,

$$V = \iiint_S 1\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{4-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r(4 - r^2)\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

RÚBRICA

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante sabe cómo determinar el volumen de un sólido mediante integrales dobles o integrales triples.</td><td>Inicial</td><td>En desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>No puede hacer un bosquejo del escenario para identificar el sólido limitado por las superficies.</td><td>Realiza un bosquejo de las superficies e identifica el sólido al cual le va a calcular el volumen, pero realiza mal la proyección y comete errores en los límites de integración.</td><td>Realiza un bosquejo de las superficies e identifica el sólido, realiza la proyección y plantea los límites de integración usando integrales dobles o triples, pero comete errores al resolver la integral.</td><td>Realiza un bosquejo de las superficies e identifica el sólido, realiza la proyección y plantea los límites de integración usando integrales dobles o triples. Finalmente resuelve la integral usando algún método para obtener el volumen del sólido.</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1 - 8 puntos</td><td>9 - 15 puntos</td><td>16 - 20 puntos</td></tr>
</table>

TEMA 6A

Hallar el área de las superficie:

De la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ay$ limitada por la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $a > 0$.

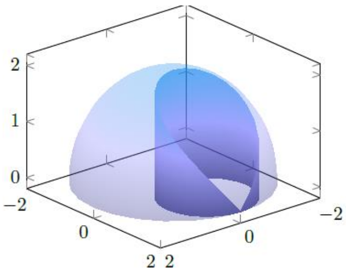
SOLUCION

Para la descripción de la porción de cilindro que se nos pide (ver Figura 52), está claro que la proyección de la figura sobre el plano XY corresponde a la circunferencia que genera el cilindro cuya ecuación en polares es $r = a \operatorname{sen} \theta$. De este modo llegamos a la parametrización

$$\Phi(z, \theta) = (a \operatorname{sen} \theta \cos \theta, a \operatorname{sen}^2 \theta, z), \; \theta \in [0, \pi], \; z \in [0, a|\cos \theta|]$$

donde debido a la simetría sólo hemos incorporado la parte de la superficie para $z \geq 0$. La longitud del vector normal

$$\mathbf{n}(z, \theta) = (a \operatorname{sen}(2\theta), -a \cos(2\theta), 0),$$



que es el integrando para calcular el área, es a. Por tanto

$$A = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{a|\cos \theta|} a \, dz \, d\theta = 4a^2.$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe identificar y sabe cómo calcular el área de una porción de superficie.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe identificar la superficie, ni dS para resolver el problema de área de una superficie.	Identificar la superficie o la superficie paramétrica para obtener dS correctamente, pero realiza mal la proyección para plantear la región de integración.	Identificar la superficie o la superficie paramétrica para obtener dS, realiza la proyección para identificar la región y plantea la integral pero comete errores al resolverla.	Identificar la superficie o la superficie paramétrica para obtener dS, realiza la proyección para identificar la región, plantea la integral y la resuelve correctamente utilizando un método adecuado.
	0	1 - 8 puntos	9 - 15 puntos	16 - 20 puntos

TEMA 6 B

Hallar el área de las superficies

Porción de $x = y^2 + z^2$ en el interior de $y^2 + z^2 = 9$.

La superficie corresponde a un paraboloide circular de eje X limitado por un cilindro del mismo eje. Lo más apropiado es usar coordenadas cilíndricas cambiando z por x, esto es

$$x(u,v) = v^2, \quad y(u,v) = v \operatorname{sen} u, \quad z(u,v) = v \cos u,$$
$$0 \leq v \leq 3, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Así, después de unos cálculos sencillos, llegamos a que

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 v\sqrt{1+4v^2}\, dv\, du = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right).$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe identificar y sabe cómo calcular el área de una porción de superficie.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe identificar la superficie, ni dS para resolver el problema de área de una superficie.	Identificar la superficie o la superficie paramétrica para obtener dS correctamente, pero realiza mal la proyección para plantear la región de integración.	Identificar la superficie o la superficie paramétrica para obtener dS, realiza la proyección para identificar la región y plantea la integral pero comete errores al resolverla.	Identificar la superficie o la superficie paramétrica para obtener dS, realiza la proyección para identificar la región, plantea la integral y la resuelve correctamente.
	0	1 - 8 puntos	9 - 16 puntos	15 - 20 puntos