

# Rúbrica

## Tema 2

2

Sea  $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  una transformación lineal definida por que

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}.$$

Determine:

1. La matriz asociada a la transformación lineal, respecto a la base canónica de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
2. El núcleo de la transformación.
3. La imagen de la transformación.
4. Si  $f$  es un isomorfismo.

	Resuelve de forma satisfactoria
Determinar la matriz asociada a la transformación lineal	5
Determinar el núcleo de la transformación lineal	5
Determinar la imagen de la transformación lineal	6
Indicar si es o no un isomorfismo	4

Respuesta enviada por el Profesor Nelson Cordoba

Sea la aplicación lineal  $f : M_2(\square) \rightarrow M_2(\square)$  definida por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz de la aplicación respecto a la base canónica de  $M_2(\square)$
- b) Calcular  $\text{Ker}(f)$ , una base y su dimensión.
- c) Calcular la dimensión de  $\text{Im}(f)$
- d) Determine si es inyectiva, sobreyectiva e isomorfismo

**Solución**

Se considera la base canónica de  $M_2(\mathbf{R})$ ,  $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

calcula la matriz de la aplicación lineal  $f$  hallando las imágenes de estos vectores respecto de la base canónica

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1, 0)_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0)_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_C$$

Colocando por columnas estas imágenes se obtiene la matriz de la aplicación  $f$

$$f_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El núcleo de la aplicación lineal  $f$  está formado por los siguientes vectores

$$\text{Ker}(f) = \left\{ A \in M_2(\mathbf{R}) \mid f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix}$$

La matriz  $A$  pertenecerá al núcleo si se verifica

$$f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 0=0 \\ x=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0, z=-t, \forall t \in \mathbb{R}$$

Es decir,  $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  siendo  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  una base de

$\text{Ker}(f)$  y por tanto,  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$

c) Para determinar la dimensión de  $\text{Im}(f)$  basta estudiar el rango de la matriz de la aplicación

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 3$$

c)  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$  no es inyectiva

$\dim(\text{Im}(f)) = 3 \neq 4 = \dim(M_2(\mathbb{R})) \Rightarrow f$  no es sobreyectiva

Por lo tanto no es isomorfismo

## Tema 3

3

Sea  $f : M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(X, Y) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = X^t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} Y.$$

1. Demuestre que  $f$  define un producto interno en  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ .

2. Utilice este producto interno para encontrar la proyección ortogonal de  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sobre el  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

	Resuelve de forma satisfactoria
Verificar que $f$ define un producto interno	12
Encontrar la proyección ortogonal de	8

Una matriz A tiene como subespacios propios a los conjuntos  $E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

$E_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  y  $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x + z = 0 \text{ y } x + 2w = 0 \right\}$ . Determine:

1. El orden de la matriz.
2. Si la matriz es diagonalizable.
3. Si la matriz es simétrica.

	<b>Resuelve de forma satisfactoria</b>
Indicar la dimensión de la matriz	3
Determinar que la dimensión del espacio $E_3$ es dos	7
Justificar si la matriz es diagonalizable	5
Justificar que no puede ser simétrica	5

- Dado que los espacios propios son subespacios de  $R^4$  se tiene que la matriz es de orden 4.

- Dado que  $E_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  entonces se tiene que A es una matriz diagonalizable.

- $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -5$  indica que la matriz no es simétrica.

<b>Inadecuado</b>	<b>En desarrollo</b>	<b>Satisfactorio</b>	<b>Avanzado</b>
En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas	Demuestra satisfactoriamente
0	0 < Calificación ≤ 8	8 < Calificación < 20	20