espol Escuela Superior Politécnica del Litoral

EXAMEN DE MEJORAMIENTO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES Docentes: **Elvis Aponte-Rosa María Díaz -Nelson Córdova Rosas**-– Fecha: 12 de septiembre del 2022. Horario: 11:30 – 13:30

SOLUCION Y RUBRICAS

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____ al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte frontal del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas DEBO DESARROLLARLOS de manera ordenada, en el espacio correspondiente en el cuadernillo de ejercicios.

Firmo como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican a continuación.

Firma: ________________________________

N° cédula: ________________________________

"Como aspirante a ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar"

PREGUNTA 1 (15 puntos)

Utilizando integrales dobles determine el volumen del sólido delimitado por la superficie cónica $z=\sqrt{x^2+y^2}$, y la superficie $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

<u>Solución</u>

La coordenada z se mueve entre $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$

El volumen deber ser expresado como:

$$V=\iint_R \left[\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right] dA$$

Ahora, trabajamos la región de integración R:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-x^2-y^2} \to x^2+y^2=\frac{1}{2} con \;\; z=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Entonces

$$R=\left\{(x,y); 0 \le x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\right\}$$

Pasando a Polares

$$V=\iint_{R'} \left[\sqrt{1-r^2}-r\right] r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left[\sqrt{1-r^2}-r\right] r dr d\theta = \frac{2\pi-\sqrt{2}\pi}{3} u^3$$

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe obtener la integral doble para calcular volúmenes aplicando cambios de variable en coordenadas polares	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante atendiendo el enunciado se da cuenta grafica la situación	El estudiante plantea la integral que da repuesta al tema. Y reconoce R el dominio de integración	El estudiante aplica el cambio de variable polar estableciendo la nueva integral a resolver	El estudiante resuelve la integral en coordenadas polares y emite una conclusión del tema
	0-2	3-7	8-12	13-15

PREGUNTA 2 (15 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=\begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

Solución

Note que para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right)\\ &=\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Y en (0,0) tenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h\left(0-h^4\right)}{\left(0^2+h^2\right)^2}\right)\\ &=-1\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right)\\ &= \frac{-x\left(-x^4+4x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Y $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-x\left(-x^4+4x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se sigue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-h\left(-h^4\right)}{\left(h^2+0^2\right)^2}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

Entonces vemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ por lo tanto la función no es de clase $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe obtener las funciones derivadas parciales y calcular las segundas derivadas parciales en un punto	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante no deriva correctamente	El estudiante plantea la función derivada parcial de x fuera del origen y en el origen	El estudiante plantea la función derivada parcial de y fuera del origen y en el origen	El estudiante calcula las segundas derivadas en el origen y determina que son distintas
	0-2	3-7	8-12	13-15

PREGUNTA 3 (20 puntos)

Determine (justificando) los valores de $\alpha \in \mathbb{R}^+$ para los cuales la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha}\ y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}} & \text{si}(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Es continua en (0,0)

b) Es diferenciable en (0,0)

<u>**Solución**</u>

a) La función es continua en (0,0) si y solo si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

esto es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^{\alpha}\ y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}}=0$$

Usando polares

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\ \text{libre}}}\frac{r^{\alpha}r^2\,|\cos\theta|^{\alpha}\ \sin^2\theta}{r^{2\alpha}}=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\ \text{libre}}} r^{\alpha+2-2\alpha}\,|\cos\theta|^{\alpha}\ \sin^2\theta$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta \text{ libre}}} r^{2-\alpha}\,|\cos\theta|^{\alpha}\,\sin^2\theta$$
$$= 0$$

si y solo si $\quad 2-\alpha > 0$ esto es $\; 0<\alpha<2$

b) Es diferenciable en (0,0)

Primero calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{|h|^{\alpha}\;0^2}{\left(h^2+0^2\right)^{\alpha}} = 0$$

de manera similar

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{|0|^{\alpha}\;h^2}{\left(0^2+h^2\right)^{\alpha}} = 0$$

luego, la función es diferenciable si y solo si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Es decir $\quad \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^{\alpha}\;y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

En polares

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta \text{ libre}}}\frac{r^{\alpha}r^2\,|\cos\theta|^{\alpha}\,\sin^2\theta}{\left(r^{2\alpha}\right)r} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta \text{ libre}}} r^{\alpha+2-2\alpha-1}\,|\cos\theta|^{\alpha}\,\sin^2\theta$$
$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta \text{ libre}}} r^{1-\alpha}\,|\cos\theta|^{\alpha}\,\sin^2\theta = 0$$

si y solo si $\quad 1-\alpha>0$ esto es $\quad 0<\alpha<1.$

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante comprende y sabe aplicar el concepto de continuidad y diferenciabilidad a funciones de varias variables	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante solo coloca la definición de continuidad o diferenciabilidad	El estudiante plantea la continuidad y encuentra las condiciones para que la función sea continua	El estudiante plantea la diferenciabilidad, pero no llega correctamente al límite o no emite la conclusión correcta	El estudiante calcula los límites y encuentra las condiciones para la existencia de Alpha para continuidad y diferenciabilidad
	0-2	3-10	11-15	16-20

PREGUNTA 4 (15 puntos)

Sea P una función de producción dada por $P = f(l,k) = 0.54l^2 - 0.02l^3 + 1.89k^2 - 0.09k^3$ donde l y k son las cantidades de mano de obra y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encuentre los valores de l y k que maximizan P.

Solución: Para encontrar los puntos críticos se resuelve el sistema $P_l = 0$ y $P_k = 0$:

$$\begin{aligned} P_l &= 1.08l - 0.06l^2 & P_k &= 3.78k - 0.27k^2 \\ &= 0.06l(18 - l) = 0 & &= 0.27k(14 - k) = 0 \\ l &= 0, l = 18 & k &= 0, k = 14 \end{aligned}$$

Hay cuatro puntos críticos: (0, 0), (0, 14), (18, 0) y (18, 14).

Ahora se aplica la prueba de la segunda derivada a cada punto crítico. Se tiene

$$P_{ll} = 1.08 - 0.12l \qquad P_{kk} = 3.78 - 0.54k \qquad P_{lk} = 0$$

Así,

$$D(l,k) = P_{ll}P_{kk} - [P_{lk}]^2$$
$$= (1.08 - 0.12l)(3.78 - 0.54k)$$

En (0, 0),

$$D(0,0) = 1.08(3.78) > 0$$

Como $D(0,0) > 0$ y $P_{ll} = 1.08 > 0$, existe un mínimo relativo en (0, 0). En (0, 14),

$$D(0,14) = 1.08(-3.78) < 0$$

Puesto que $D(0,14) < 0$, no existe ningún extremo relativo en (0, 14). En (18, 0),

$$D(18,0) = (-1.08)(3.78) < 0$$

Como $D(18,0) < 0$, no existe ningún extremo relativo en (18, 0). En (18,14),

$$D(18,14) = (-1.08)(-3.78) > 0$$

Puesto que $D(18,14) > 0$ y $P_{ll} = -1.08 < 0$, se tiene un máximo relativo en (18, 14). Por lo tanto, la producción máxima se obtiene cuando $l = 18$ y $k = 14$.

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante es capaz de aplicar los teoremas de Optimización encontrar los puntos críticos clasificarlos para resolver problemas	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No plantea y no aplica los teoremas	Plantea las ecuaciones, pero no calcula bien las derivadas parciales	Calcula correctamente los puntos críticos, pero no los clasifica aun que entrega una respuesta	Resuelve correctamente aplicando los teoremas clasificando los puntos críticos y entregando una respuesta al problema
	0	3-7	8-12	13-15

PREGUNTA 5 (20 puntos)

Una caja de joyas ha de construirse de materiales que cuestan \$1 por pulgada cuadrada para el fondo, \$2 por pulgada cuadrada para los costados, y \$5 por pulgada cuadrada para la tapa. Si el volumen total debe ser 96 pulg^2, ¿qué dimensiones minimizarán el costo total de construcción?

Solución

Sea x pulgadas la profundidad de la caja, y el largo, y z el ancho, claramente x, y, z son todas positivas. Entonces el volumen de la caja es $V = xyz$ y el costo total de construcción está dado por:

$$C = 1yz + 2(2xy + 2xz) + 5yz = 6yz + 4xy + 4xz$$

Se desea minimizar $C = 6yz + 4xy + 4xz$ sujeta a $V = xyz = 96$. Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} C_x &= \lambda V_x \quad \Leftrightarrow \quad 4y + 4z = \lambda(yz) \\ C_y &= \lambda V_y \quad \Leftrightarrow \quad 6z + 4x = \lambda(xz) \\ C_z &= \lambda V_z \quad \Leftrightarrow \quad 6y + 4x = \lambda(xy) \end{aligned}$$

$$y \quad xyz = 96$$

Despejando λ

$$\frac{4y+4z}{yz} = \frac{6z+4x}{xz} = \frac{6y+4x}{xy} = \lambda$$

Multiplicando por xyz

$$\begin{aligned} 4xy + 4xz &= 6yz + 4yx \\ 4xy + 4xz &= 6yz + 4xz \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} 4xz &= 6yz \\ 4xy &= 6yz \quad \Rightarrow \quad 4x = 6y \quad \text{y} \quad 4x = 6z \quad \text{y} \quad 4y = 4z \\ 4yx &= 4xz \end{aligned}$$

Sustituyendo en la cuarta ecuación

$$x\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right)=96$$

$$\frac{4}{9}x^3=96$$

$$x^3=216 \quad \text{por lo cual} \quad x=6$$

y, además

$$y=z=\frac{2}{3}(6)=4$$

Por tanto, el costo mínimo se alcanza cuando la caja de joyas mide "6" pulgadas de profundidad con una base cuadrada de "4" pulgadas por lado.

Comparación con otro punto de la restricción

x=96, y=1, z=1 implica $C=6(1)(96)+4(1)(1)+4(1)(96)=964$

x=6, y=4, z=4 implica $C=6(4)(4)+4(6)(4)+4(6))4)=288$

por lo tanto, es un mínimo.

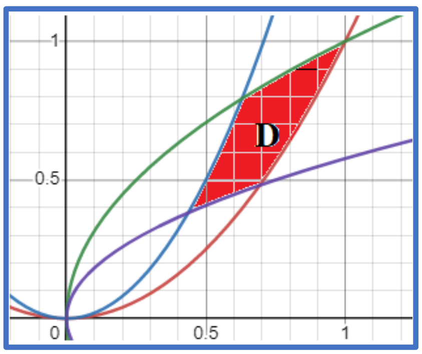
Capacidades deseadas	**Desempeño literal**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe saber plantear y resolver problemas de optimización de funciones escalares sujeta a restricciones	No sabe cómo plantear el problema	Identifica la función objetivo y las restricciones. Plantea la función Lagrangiana	Optimiza la función Lagrangiana, resuelve el sistema de ecuaciones, pero comete errores	El estudiante justifica adecuadamente que en dicho punto se alcanza el óptimo solicitado comparando con otro valor de la restricción
	0	1-6	7 - 14	15-20

PREGUNTA 6 (15 puntos)

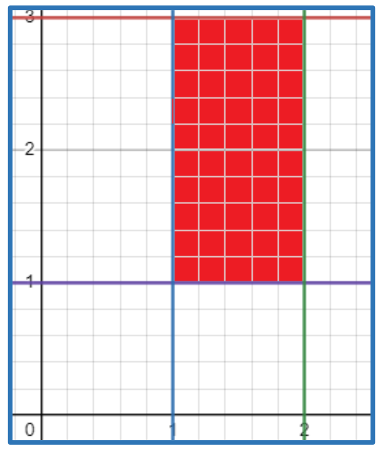
Calcule el área de la región plana finita limitada por las cuatro parábolas $y = x^2, y = 2x^2, x = y^2$ y $x = 3y^2$, utilizando integrales dobles y cambio de variables. Realice las gráficas correspondientes.

Solución

Sea D la región plana limitada por las 4 parábolas



Región D



Rectángulo R

Sea el cambio siguiente $u = \dfrac{y}{x^2}$ $\quad y \quad$ $v = \dfrac{x}{y^2}$

Entonces, la región "D" corresponde al rectángulo "R" en el plano "uv" dado por

$$1 \le u \le 2 \quad y \quad 1 \le v \le 3$$

$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 1/y^2 & -2x/y^3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{x^2y^2} = 3u^2v^2$ tenemos que el valor absoluto del jacobiano es

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3u^2v^2}$$

Y, por tanto, el área de "D" está dada por

$\iint_D dxdy = \iint_R \dfrac{1}{3u^2v^2}dudv \ = \dfrac{1}{3}\int_1^2 \dfrac{du}{u^2}\int_1^3 \dfrac{dv}{v^2} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{9}$ unidades cuadradas

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe calcular una integral doble mediante un cambio de variables adecuado	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede establecer bien la región de integración original ni escoger un cambio de variables adecuado	Establece bien la región de integración original, escoge bien el cambio de variables, pero comete errores al calcular el Jacobiano o plantear la nueva región de integración	Desarrolla bien el ejercicio hasta calcular el Jacobiano pero plantea mal la integral final o comete errores al calcularla	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor de la integral doble solicitada.
	0-4	5-10	11-14	15