

|                    |                                                                                                                                                          |                 |               |                 |                         |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------|-----------------|-------------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2025                                                                                                                                                     | <b>PERÍODO:</b> | II PAO        | <b>MATERIA:</b> | Cálculo de una variable |
| <b>PROFESORES:</b> | Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Burbano J., Cabezas J., Cordero M., Díaz R., García E., Laveglia F., Mancero M., Solís J., Toledo X., Valdiviezo J. |                 |               |                 |                         |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                                                                                                                                                  |                 | <b>FECHA:</b> | 09/febrero/2026 |                         |

1. (20 PUNTOS) Para cada literal, obtenga la familia de antiderivadas:

(a) (6 PUNTOS)  $\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$

**Solución:**

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN:

$$u = 9 - 4x^2$$

$$du = -8x dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{-8x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{8} \left( \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx = -\frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C ; C \in \mathbb{R}$$

(b) (7 PUNTOS)  $\int \frac{1}{6} x e^{-\frac{1}{3}x} dx$

**Solución:**

Se aplica la PROPIEDAD DE LINEALIDAD:

$$\int \frac{1}{6} x e^{-\frac{1}{3}x} dx = \frac{1}{6} \int x e^{-\frac{1}{3}x} dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

|                          |                                                                                                                       |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u = x$<br><br>$du = dx$ | $dv = e^{-\frac{1}{3}x} dx$<br><br>$v = -3 \int e^{-\frac{1}{3}x} \left(-\frac{1}{3}\right) dx = -3e^{-\frac{1}{3}x}$ |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$\int x e^{-\frac{1}{3}x} dx = -3x e^{-\frac{1}{3}x} + 3 \int e^{-\frac{1}{3}x} dx$$

$$\int x e^{-\frac{1}{3}x} dx = -3x e^{-\frac{1}{3}x} + 3 \left( -3e^{-\frac{1}{3}x} \right) + K$$

$$\frac{1}{6} \int x e^{-\frac{1}{3}x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{K}{6}; K \in \mathbb{R}$$

Se realiza el reemplazo:

$$C = \frac{K}{6}$$

$$\therefore \int \frac{1}{6} x e^{-\frac{1}{3}x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{3}x} + C = -\frac{1}{2} (x+3) e^{-\frac{1}{3}x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

(c) (7 PUNTOS)  $\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx$

**Solución:**

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\frac{2x+3}{x^2-x-2} = \frac{2x+3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$2x+3 = A(x+1) + B(x-2)$$

$$x=2 \rightarrow 7 = 3A + B(0) \rightarrow A = \frac{7}{3}$$

$$x=-1 \rightarrow 1 = 3(0) - 3B \rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx = \int \left( \frac{\frac{7}{3}}{x-2} - \frac{\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx$$

Se aplica la PROPIEDAD DE LINEALIDAD y la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN en ambas integrales:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx = \frac{7}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\begin{array}{l|l} u = x - 2 & t = x + 1 \\ du = dx & dt = dx \\ \int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + K_1; K_1 \in \mathbb{R} & \int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + K_2; K_2 \in \mathbb{R} \\ \\ \int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + K_1; K_1 \in \mathbb{R} & \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + K_2; K_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se realiza el reemplazo:

$$C = K_1 + K_2$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx = \frac{7}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C ; C \in \mathbb{R}}$$

2. (20 PUNTOS) Sea el conjunto  $X = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  y la función  $f: X \mapsto \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

- (a) (10 PUNTOS) Demuestre que  $x = 1$  es un punto de acumulación del conjunto  $X$ , considerando que es un subconjunto del espacio métrico euclidiano en  $\mathbb{R}$ , con la misma función distancia; y, utilizando las definiciones pertinentes.
- (b) (10 PUNTOS) Redefina la función  $f$  para que sea continua en  $x = 1$ , justificando su procedimiento.

**Solución:**

El dominio de la función racional  $f$  comprende a todos los números reales, a excepción de los valores que generan ceros en el denominador; es decir:

$$X = \text{dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Considerando el conjunto  $X$  y la definición de la misma función distancia del espacio métrico euclidiano, para que  $x = c = 1$  sea un punto de acumulación de este conjunto, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} \forall r > 0, \overset{\circ}{B}(c, r) \cap X &\neq \emptyset \\ \forall r > 0, \overset{\circ}{B}(1, r) \cap X &\neq \emptyset \\ \forall r > 0, \overset{\circ}{B}(1, r) \cap \{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\} &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Con base en la definición de bola abierta reducida, se establecen sus elementos:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}(1, r) &= \{x \in \mathbb{R} / 0 < d(x, 1) < r\} \\ \overset{\circ}{B}(1, r) &= \{x \in \mathbb{R} / 0 < |x - 1| < r\} \\ \overset{\circ}{B}(1, r) &= \{(1-r, 1) \cup (1, 1+r)\} \end{aligned}$$

Al representar el conjunto  $X = \text{dom } f$  y la bola abierta reducida en la recta numérica, se puede concluir que son intersecantes:



Luego:

$$\forall r > 0, \{(1-r, 1) \cup (1, 1+r)\} \cap \{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\} \neq \emptyset$$

$$\forall r > 0, \{(1-r, 1) \cup (1, 1+r)\} \neq \emptyset$$

Del análisis anterior se desprende que  $x = 1$  sí es un punto de acumulación para el conjunto  $X$ .

La continuidad en  $x = 1$  exige que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Como la función originalmente no estaba definida en  $x = 1$  y el límite en dicho punto resultó ser igual a  $\frac{1}{2}$ , se presenta una discontinuidad removible en este punto y se puede redefinir la función, para que sea continua en  $x = 1$ , de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & (x \neq -1) \wedge (x \neq 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & (x \neq -1) \wedge (x \neq 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

**3. (20 PUNTOS) Sea la función de variable real  $f$  definida por tramos, tal que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 1 \\ 1 - \ln(x), & x > 1 \end{cases}$$

**(a) (12 PUNTOS) Determine los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea derivable en  $x = 1$ .**

**(b) (8 PUNTOS) Analice, utilizando sus conocimientos de cálculo diferencial, la monotonía de  $f$  en el intervalo  $(1, +\infty)$ .**

**Solución:**

Para que  $f$  sea derivable en  $x = 1$ , también debe ser continua en dicho elemento del dominio. Por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [1 - \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} [ax + b] = a + b$$

$$1 = a + b = a + b$$

Por la condición de derivabilidad que se especifica en el enunciado, las derivadas laterales deben coincidir, tomando en cuenta que la regla de correspondencia de la primera derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ -\frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Debe cumplirse que:

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$-\frac{1}{(1^+)} = a$$

$$\boxed{\therefore a = -1}$$

De la ecuación que se obtuvo por la continuidad de la función:

$$a + b = 1$$

$$b = 1 - a$$

$$b = 1 - (-1)$$

$$\boxed{\therefore b = 2}$$

Para el análisis de la monotonía de  $f$ , se utilizará el teorema correspondiente (Teorema de monotonía), debiendo obtener la primera derivada en el intervalo requerido, para luego determinar su signo y concluir sobre su comportamiento.

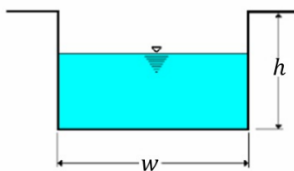
Cuando  $x > 1$ ,  $f(x) = 1 - \ln(x)$ , siendo la primera derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

Nótese que la expresión de  $f'(x)$  en el intervalo  $(1, +\infty)$  tiene valores que siempre resultarán negativos; es decir,  $f'(x) < 0$ .

$$\boxed{\therefore f \text{ es estrictamente decreciente en } (1, +\infty).$$

4. (20 PUNTOS) En cierta obra de ingeniería hidráulica, se desea diseñar un canal abierto (sin tapa), cuya sección transversal interior es rectangular con dimensiones  $w$  y  $h$  (en metros), tal como se observa en la figura.



Si para asegurar la capacidad de flujo se requiere una sección transversal interior cuya área fija  $A$  sea  $18 \text{ m}^2$ :

- (a) (6 PUNTOS) Establezca una expresión para el perímetro  $P$  de la sección interior, a ser recubierta por concreto, en términos de una de sus dimensiones.  
(b) (14 PUNTOS) Determine, realizando el respectivo análisis, las dimensiones  $w^*$  y  $h^*$  que minimizan  $P$ ; y, por tanto, el material de recubrimiento, verificando además que se trata de un valor mínimo. Luego, calcule el perímetro óptimo  $P^*$ .

**Solución:**

Se plantea la expresión para el cálculo del perímetro  $P$  de la sección transversal interior, considerando su forma rectangular:

$$P(w, h) = w + 2h; \quad w > 0, h > 0$$

A partir de la condición dada en el problema, se obtiene la siguiente restricción:

$$A = wh = 18 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{18}{w}; \quad w > 0$$

Se plantea el perímetro a optimizar, en términos de una sola variable:

$$P(w) = w + 2\left(\frac{18}{w}\right) = w + \frac{36}{w}; \quad w > 0$$

Para el proceso de optimización, se analiza la existencia de puntos críticos, estableciéndose que no se presentan puntos críticos fronterizos por la forma en la que está definido el dominio de la función; tampoco existen puntos críticos singulares ya que el único valor que lleva a la no existencia de la derivada es el de  $w = 0$ , pero está excluido del dominio de la función.

Luego, se deberá analizar la existencia de puntos críticos estacionarios, obteniendo la derivada de la función e igualándola a cero:

$$P'(w) = 1 - \frac{36}{w^2}$$

$$P'(w) = 1 - \frac{36}{w^2} = 0$$

$$\frac{36}{w^2} = 1 \rightarrow w^2 = 36 \rightarrow |w| = 6$$

$$\boxed{\therefore w^* = 6 \text{ m}}$$

Se obtiene la otra dimensión de la sección:

$$h^* = \frac{18}{w^*} = \frac{18}{6}$$

$$\boxed{\therefore h^* = 3 \text{ m}}$$

Para verificar que se trata de un valor extremo mínimo para el perímetro, se utilizará el criterio de la segunda derivada.

La segunda derivada de la función, obtenida al derivar la primera, es:

$$P'(w) = 1 - 36 w^{-2}$$

$$P''(w) = (-2)(-36)w^{-3} = \frac{72}{w^3}$$

Al evaluar la dimensión  $w^* = 6 \text{ m}$  en la segunda derivada, se establece  $P''(6) > 0$ ; con lo cual, se verifica que se ha obtenido un valor mínimo para el perímetro.

Finalmente, el perímetro óptimo  $P^*$  requerido se calcula como:

$$P^* = w^* + 2h^* = 6 + 2(3) = 12 \text{ m}$$

$$\boxed{\therefore P^* = 12 \text{ m}}$$

5. (20 PUNTOS) Considere la región  $\Omega$  acotada por las funciones  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ; y, las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$ .
- (a) (6 PUNTOS) Bosqueje la región  $\Omega$  en el plano cartesiano adjunto, identificando puntos característicos y etiquetas adecuadas.
  - (b) (6 PUNTOS) Dibuje la(s) franja(s) representativa(s) y establezca la(s) expresión(es) para el cálculo de su(s) área(s).
  - (c) (8 PUNTOS) Plantee y evalúe la(s) integral(es) definida(s) correspondiente(s) para el cálculo del área  $A$  de la región.

**Solución:**

Se igualan las funciones presentes para determinar las coordenadas de los puntos de intersección:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 x^2 &= x^3 \\
 x^3 - x^2 &= 0 \\
 x^2(x - 1) &= 0 \\
 (x^2 = 0) \vee (x = 1) \\
 (x = 0) \vee (x = 1)
 \end{aligned}$$

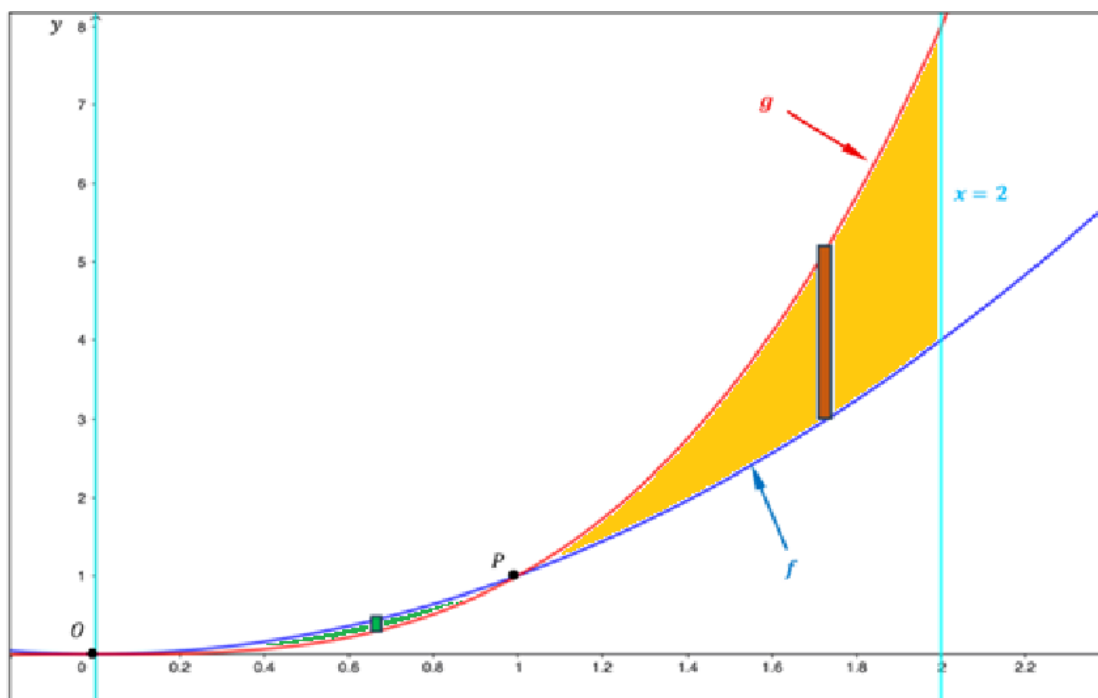
Se puede evaluar en forma indistinta en la función  $f$ , o en la función  $g$ , para obtener las ordenadas:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= g(0) = 0 \\
 f(1) &= g(1) = 1
 \end{aligned}$$

Los puntos de intersección de ambas funciones son:

$$\begin{aligned}
 O(0, 0) \\
 P(1, 1)
 \end{aligned}$$

A continuación, se bosqueja la región  $\Omega$  en el plano cartesiano:



Se identifican claramente dos subregiones  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , a partir de las cuales se genera la región  $\Omega$ , siendo  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , cuya área se requiere calcular.

Se dibujan dos franjas representativas, una en cada subregión; y, se establecen las expresiones para calcular sus respectivas áreas:

$$\begin{array}{l|l} dA_1 = (y_{sup} - y_{inf})dx & dA_2 = (y_{sup} - y_{inf})dx \\ dA_1 = (x^2 - x^3)dx ; x \in [0, 1] & dA_2 = (x^3 - x^2)dx ; x \in [1, 2] \end{array}$$

Para calcular el área  $A$  de la región  $\Omega$ , se requiere sumar las áreas de ambas subregiones, planteando las correspondientes integrales definidas y aplicando la PROPIEDAD ADITIVA:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)dx$$

$$A = \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^2$$

$$A = \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - 0 \right] + \left[ \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$A = 4 + \frac{1 - 8 + 1}{3} + \frac{-1 - 1}{4} = 4 - 2 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore A = \frac{3}{2} u^2}$$