Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO:	2024	**PERÍODO:**	I PAO	**MATERIA:**	Cálculo de una variable
PROFESORES:	Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Carrión L., Cordero M., Díaz R., García E., Hernández C., Laveglia F., López E., Mejía M., Ramos M., Toledo X., Valdiviezo J.				
EVALUACIÓN:	PRIMERA		**FECHA:**	01/julio/2024	

Examen:	50
Lección:	35
Quiz:	10
Deber:	5
Total:	100

1. (6 PUNTOS) Para cada literal, obtenga $\frac{d^2y}{dx^2}$ y exprésela en forma simplificada:

(a) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{y = x^{\pi} + \pi^{x}\ ;\ \ x > 0}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\pi}) + \frac{d}{dx}(\pi^{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \pi x^{\pi-1} + \pi^{x} ln(\pi)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pi \cdot \frac{d}{dx}(x^{\pi-1}) + ln(\pi) \cdot \frac{d}{dx}(\pi^{x})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pi \cdot (\pi - 1)x^{\pi-2} + ln(\pi) \cdot \pi^{x} ln(\pi)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \pi(\pi - 1)x^{\pi-2} + \pi^{x} ln^2(\pi)}$$

(b) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{y = arcsen(x)\ ;\ \ x \in (-1, 1)}$

Solución:

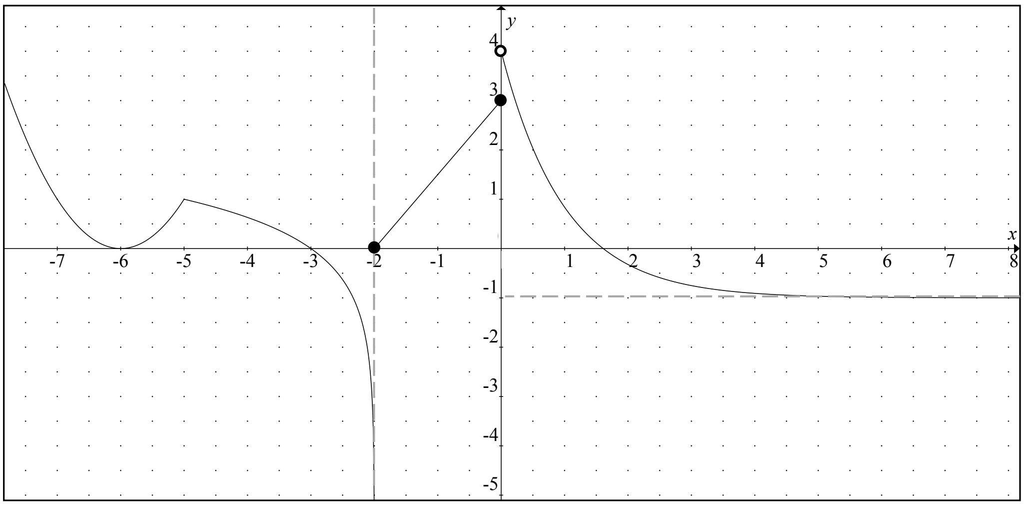
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (\cancel{-}\cancel{2}x)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = x(1 - x^2)^{-3/2} = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}}$$

2. (5 PUNTOS) Dada la gráfica de la función de variable real f.



Calcule el valor de L, siendo:

$$\boldsymbol{L = \frac{\left[\left(\lim_{x \to 0^-} f(x)\right) - \left(\lim_{x \to -4^+} f(x-1)\right)\right]^2}{f'\left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)}}$$

Solución:

Cuando x se acerca a 0 tomando valores ligeramente menores, esto es, x se acerca a 0 por la izquierda, se observa gráficamente que la función es continua por la izquierda, por lo que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 3$$

La expresión $\lim_{x \to -4^+} f(x-1)$ es igual a $\lim_{x \to -5^+} f(x)$. Cuando x se acerca a -5 tomando valores ligeramente mayores, esto es, x se acerca a -5 por la derecha, se observa gráficamente que la función es continua por la derecha, por lo que:

$$\lim_{x \to -4^+} f(x-1) = \lim_{x \to -5^+} f(x) = f(-5) = 1$$

Observe gráficamente que la función tiene una asíntota horizontal en $y = -1$, cuando x tiende a $+\infty$, por lo que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

Debido al cálculo previo, el valor $f'\left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$ representa la evaluación de la primera derivada de la función en $x = -1$, por lo que:

$$f'\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = f'(-1)$$

El elemento del dominio $x = -1$ pertenece a un segmento de recta cuya pendiente m se puede calcular tomando en consideración los pares ordenados que son extremos de dicho segmento, $P_1(-2, 0)$ y $P_2(0, 3)$, por lo que:

$$m = \frac{3-0}{0-(-2)} = \frac{3}{2}$$

Dado que la pendiente de la recta tangente $m_T|_{x=-1}$ es igual a la primera derivada de la función evaluada en ese punto y ésta coincide con la pendiente m, se establece que:

$$f'(-1) = m_T|_{x=-1} = m = \frac{3}{2}$$

Reemplazando:

$$L = \frac{\left[\left(\lim_{x\to 0^-} f(x)\right) - \left(\lim_{x\to -4^+} f(x-1)\right)\right]^2}{f'\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)}$$

$$L = \frac{(3-1)^2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\therefore L = \frac{8}{3}}$$

3. **(6 PUNTOS) A partir de las funciones derivables f y g se define la nueva función de variable real h tal que:**

$$\boldsymbol{h(x) = (f\circ g)(x) - (g\circ f)(x)}$$

Si $f(-2) = 3$, $f(4) = 2$, $g(2) = -1$, $g(4) = -2$, $f'(-2) = 4$, $f'(4) = 2$, $g'(2) = 5$, $g'(4) = -3$, obtenga la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la función h cuando $x_0 = 4$.

Solución:

Nótese que: $\quad h(x) = f\big(g(x)\big) - g\big(f(x)\big)$

Aplicando la regla de la cadena a cada función compuesta:

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) - g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

Se evalúa h' para obtener la pendiente de la recta tangente m_T:

$$
\begin{gathered}
h'(4) = f'\big(g(4)\big) \cdot g'(4) - g'\big(f(4)\big)f'(4) \\
h'(4) = f'(-2) \cdot g'(4) - g'(2)f'(4) \\
h'(4) = (4)(-3) - (5)(2) \\
h'(4) = -12 - 10 \\
m_T = h'(4) = -22
\end{gathered}
$$

Para obtener la ecuación de la recta tangente, se requiere calcular la ordenada y_0 correspondiente a $x_0 = 4$:

$$
\begin{gathered}
y_0 = h(x_0) = h(4) \\
y_0 = f\big(g(4)\big) - g\big(f(4)\big) \\
y_0 = f(-2) - g(2) \\
y_0 = 3 - (-1) \\
y_0 = 4
\end{gathered}
$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a h, cuando $x_0 = 4$ es:

$$\boxed{y - 4 = -22(x - 4)}$$

La pendiente de la recta normal m_N se calcula así:

$$
\begin{gathered}
m_N = -\frac{1}{m_T} \\
m_N = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{-}22} \\
m_N = \frac{1}{22}
\end{gathered}
$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a h, cuando $x_0 = 4$ es:

$$\boxed{y - 4 = \frac{1}{22}(x - 4)}$$

4. (5 PUNTOS) Sea la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y el número $c \in \mathbb{R}$, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

$$\text{“}\textit{Si } \lim_{x \to c} f(x) = f(c)\textit{, entonces } \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \textit{ existe.”}$$

Justificando su respuesta, demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

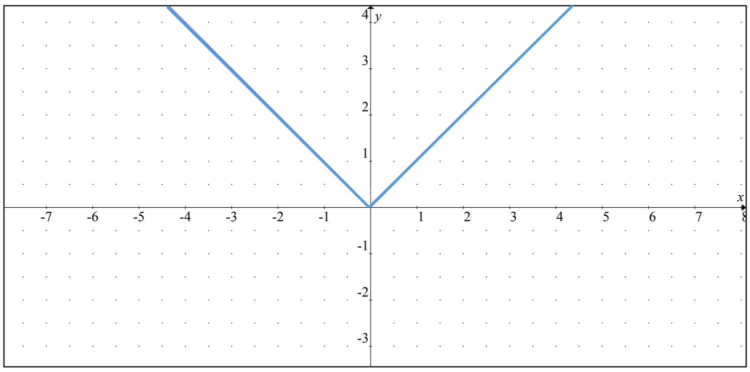
Solución:

La proposición compuesta dada tiene a la condicional como operador lógico. En el antecedente se especifica la definición de continuidad de f en el punto $x = c$, mientras que, en el consecuente se especifica la definición de derivabilidad de la función f en el punto $x = c$.

Del teorema *"Derivabilidad implica continuidad"* se conoce que la continuidad es una condición necesaria, pero no es una condición suficiente para la derivabilidad; por lo tanto, se establece que la proposición dada es FALSA.

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo. Considere la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida así:

$$f(x) = |x|$$



Observe que al ser f la función valor absoluto, es continua para todo valor $c \in \mathbb{R}$. Pero, dado que las derivadas laterales no son iguales en el punto $c = 0$, la primera derivada de la función f no existe en dicho punto.

Nótese que:

$$\underbrace{f\ es\ continua\ en\ c = 0}_{Verdadero} \rightarrow \underbrace{f\ es\ derivable\ en\ c = 0}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ Se verifica, a partir del contraejemplo construido, el valor de verdad FALSO de la proposición.

5. **(6 PUNTOS) Dada la función de variable real f, determine el intervalo abierto donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo, siendo:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 10x^2 - x + 2}$$

Exprese la respuesta obtenida mediante el concepto topológico de bola abierta.

Solución:

Se deriva por primera vez la función polinomial dada:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 20x - 1$$

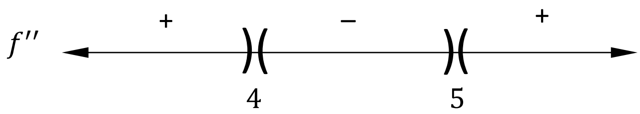
Se deriva por segunda vez la función polinomial dada:

$$f''(x) = x^2 - 9x + 20$$

Para que la gráfica de la función sea cóncava hacia abajo, debe cumplirse que $f''(x) < 0$, por lo que debe resolverse la inecuación cuadrática correspondiente:

$$x^2 - 9x + 20 < 0$$
$$(x-4)(x-5) < 0$$

Considerando los valores críticos de la inecuación y los intervalos que se definen en la recta numérica, se identifica el signo de la segunda derivada en cada intervalo:



Por lo que:

$$(x-4)(x-5) < 0 \quad \rightarrow \quad 4 < x < 5$$

$$\boxed{\therefore\ f\ es\ cóncava\ hacia\ abajo\ en\ el\ intervalo\ abierto\ (4,5)}$$

Nótese que el intervalo obtenido corresponde a una bola abierta centrada en $\frac{9}{2}$ y de longitud de radio $\frac{1}{2}$. Observe:

$$4 < x < 5$$
$$4 - \frac{9}{2} < x - \frac{9}{2} < 5 - \frac{9}{2}$$
$$-\frac{1}{2} < x - \frac{9}{2} < \frac{1}{2}$$
$$\left|x - \frac{9}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ f\ es\ cóncava\ hacia\ abajo\ en\ la\ bola\ abierta\ B\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

Lo cual también puede ser expresado así:

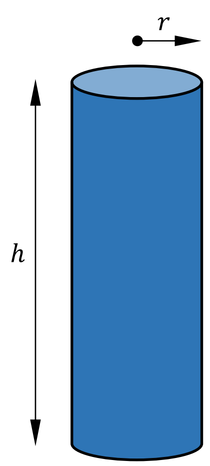
$$\boxed{\therefore\ f\ es\ cóncava\ hacia\ abajo\ en\ el\ entorno\ N_{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)}$$

6. **(8 PUNTOS) Se tiene una varilla cilíndrica de metal, la cual se expande cuando se calienta. Después de $t\ segundos$, el radio de la sección transversal de la varilla mide $x\ cm$ y su largo (altura de la varilla cilíndrica) mide $10x\ cm$. Si el área de la sección transversal de la varilla aumenta a una razón constante de $0.01\pi\ cm^2/s$:**

   (a) (2 PUNTOS) Calcule la razón de cambio de la longitud del radio de la sección transversal de la varilla, cuando $x = 2\ cm$.
   (b) (3 PUNTOS) Calcule la razón de cambio del volumen de la varilla, cuando $x = 2\ cm$.
   (c) (3 PUNTOS) Calcule la razón de cambio del área de la superficie lateral de la varilla, cuando $x = 2\ cm$.

Solución:

Se bosqueja una varilla de forma cilíndrica, se definen las variables pertinentes y se establece la información conocida de las mismas.



Sean:

A_{ST}: Área de la sección transversal de la varilla (círculo)
r: Longitud del radio de la sección transversal de la varilla
V: Volumen de la varilla (cilindro)
h: Longitud de la altura de la varilla
A_L: Área de la superficie lateral de la varilla (rectángulo)

Después de $t\ segundos$:

$$r = x\ cm \qquad h = 10x\ cm \qquad \frac{dA_{ST}}{dt} = 0.01\pi\ cm^2/s$$

Con base en los datos proporcionados, se requiere conocer:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=2\ cm} \qquad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=2\ cm} \qquad \left.\frac{dA_L}{dt}\right|_{x=2\ cm}$$

Se establecen relaciones entre las variables:

$$A_{ST} = \pi r^2 = \pi(x)^2 = \pi x^2$$
$$V = \pi r^2 h = \pi(x)^2(10x) = 10\pi x^3$$
$$A_L = 2\pi r h = 2\pi(x)(10x) = 20\pi x^2$$

Se deriva implícitamente A_{ST}, para despejar y obtener $\frac{dx}{dt}$ en el instante indicado:

$$\frac{dA_{ST}}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{dA_{ST}}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=2} = \frac{1}{2\cancel{\pi}(2)}(0.01\cancel{\pi}) = \frac{1}{2(2)(100)}$$

$$\boxed{\therefore \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=2} = \frac{1}{400} = 0.0025 \ cm/s}$$

Luego, cuando $x = 2\,cm$, la longitud del radio de la sección transversal de la varilla se está incrementando a razón de $0.0025\ cm$ por cada $segundo$ transcurrido.

Se deriva implícitamente V y se reemplaza $\frac{dx}{dt}$ para obtener $\frac{dV}{dt}$ en el instante indicado:

$$\frac{dV}{dt} = 30\pi x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=2} = 3\cancel{0}\pi(2)^2\left(\frac{1}{40\cancel{0}}\right) = 3\pi(4)\left(\frac{1}{40}\right)$$

$$\boxed{\therefore \left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=2} = \frac{3}{10}\pi \ cm^3/s = 0.3\pi \ cm^3/s}$$

Así, cuando $x = 2\,cm$, el volumen de la varilla se está incrementando a razón de $0.3\pi\ cm^3$ por cada $segundo$ transcurrido.

Se deriva implícitamente A_L y se reemplaza $\frac{dx}{dt}$ para obtener $\frac{dA_L}{dt}$ en el instante indicado:

$$\frac{dA_L}{dt} = 40\pi x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dA_L}{dt}\right|_{x=2} = 4\cancel{0}\pi(2)\left(\frac{1}{40\cancel{0}}\right)$$

$$\boxed{\therefore \left.\frac{dA_L}{dt}\right|_{x=2} = \frac{1}{5}\pi \ cm^2/s = 0.2\pi \ cm^2/s}$$

Finalmente, cuando $x = 2\,cm$, el área de la superficie lateral de la varilla se está incrementando a razón de $0.2\pi\ cm^2$ por cada $segundo$ transcurrido.

7. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{arctan^2(x) + x}{1 + x^2}}$$

Utilizando diferenciales, calcule el VALOR APROXIMADO de $f(0.01)$ con dos cifras decimales.

Solución:

Para aproximar el valor de $f(0.01)$ mediante el uso de diferenciales, se empleará la siguiente expresión:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Se obtiene la derivada de la función y se establecen los elementos por reemplazar:

$$f(x) = \frac{arctan^2(x) + x}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2)\frac{d}{dx}(arctan^2(x) + x) - [arctan^2(x) + x]\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2)\left[\frac{2\ arctan(x)}{1 + x^2} + 1\right] - [arctan^2(x) + x](2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\ arctan(x) + 1 + x^2 - 2x[arctan^2(x) + x]}{(1 + x^2)^2}$$

Los elementos a considerar para la aproximación, son:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 = 0 \\ \Delta x = 0.01 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x_0 + \Delta x = 0.01$$

Reemplazando en la expresión dada, se tiene que:

$$f(0 + 0.01) \approx f(0) + f'(0)(0.01)$$

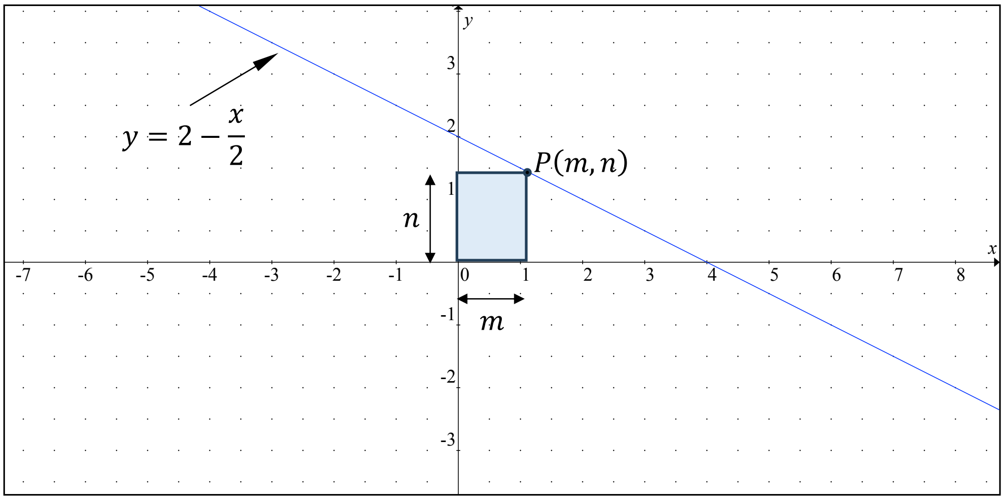
$$f(0.01) \approx \frac{0 + 0}{(1 + 0)^2} + \frac{0 + 1 + 0 - 0}{(1 + 0)^2}(0.01) \approx 0 + 1(0.01) \approx 0.01$$

Por lo tanto, el valor aproximado de $f(0.01)$ es 0.01.

8. (8 PUNTOS) Empleando cálculo diferencial, determine las dimensiones del rectángulo que puede inscribirse en la región del primer cuadrante acotada por la función $y = 2 - \frac{x}{2}$ y los ejes coordenados; de manera tal que el área de su superficie sea máxima. Luego, calcule dicha área máxima.

Solución:

Para representar geométricamente el problema, se bosqueja, en el plano cartesiano, la gráfica de la función lineal, inscribiendo un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados en la región acotada que se ha especificado y asignando variables para las longitudes de sus lados:



Se establece la función objetivo a optimizar, la cual depende de dos variables:

$$A(m, n) = (l_1)(l_2) = mn$$

Se expresa el área en términos de una sola variable con la respectiva restricción del dominio para que el rectángulo exista:

$$y = 2 - \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad n = 2 - \frac{m}{2}$$

$$A(m) = m\left(2 - \frac{m}{2}\right) = 2m - \frac{m^2}{2} \quad ; \quad m \in (0, 4)$$

Se identifican puntos críticos:

PCF: Por la definición realizada, la función de área no tiene puntos críticos de frontera.

Se deriva por primera vez la función objetivo para analizar la existencia de puntos críticos estacionarios o singulares:

$$A'(m) = 2 - m$$

PCS: La función tampoco tiene puntos críticos singulares, porque la derivada es una función lineal.

PCE: Se analiza la existencia de posibles puntos críticos estacionarios:

$$A'(m) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 2$$

Se deriva por segunda vez la función para aplicar el criterio de la segunda derivada y corroborar que en el punto crítico estacionario se presenta un valor extremo máximo:

$$A''(m) = -1$$

$$A''(2) = -1 < 0 \quad \rightarrow \quad se\ presenta\ un\ valor\ extremo\ máximo\ para\ A\ en\ m = 2.$$

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo con área de superficie máxima, son:

$$l_1 = m = 2\ u$$

$$l_2 = n = 2 - \frac{m}{2} = 2 - 1 = 1\ u$$

En consecuencia, el área máxima $A_{máx}$ del rectángulo inscrito es:

$$\boxed{A_{máx} = (2)(1) = 2\ u^2}$$