Escuela Superior Politécnica del Litoral
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas
Departamento de Matemáticas

Año: 2016	Período: Primer Término
Materia: Diseño de Experimentos	Profesor: Francisco Vera
Evaluación: Primera	Fecha: 28 de junio de 2016

1. Un investigador desea estudiar el efecto de 2 factores, X y Z, en una variable de respuesta Y. El factor X tiene 3 niveles (A, B, C), mientras que Z tiene dos niveles (N, S). Para realizar este estudio, él define el siguiente modelo
$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$
donde $i = 1, 2, 3$ según el nivel de X; $j = 1, 2$ según el nivel de Z, y $k = 1, 2$ porque hay dos observaciones por cada tratamiento, un total de $N = 12$ observaciones. Aunque solo hay 6 tratamientos, el modelo que propone el investigador tiene 12 parámetros, por lo que está sobreparametrizado. Para resolver este problema, él decide eliminar algunos parámetros, haciendo $\alpha_3 = 0$, $\gamma_2 = 0$, y $\delta_{12} = \delta_{22} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$ (6 restricciones).
   (a) (10 puntos) Exprese el modelo del investigador como uno de los modelos de regresión vistos en clases, de la forma $Y_i = \beta_0 + \cdots + \varepsilon_i$. Describa la equivalencia entre los parámetros del modelo de regresión y los parámetros del modelo de este investigador.
   (b) (10 puntos) Escriba la matriz de diseño $\mathbf{X}$ para el modelo de regresión del literal anterior y escriba las matrices $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ y la matriz $\mathbf{H}$.
   (c) (10 puntos) El investigador decide eliminar parámetros de más de otra manera: haciendo que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\delta_{11} + \delta_{12} = 0$, $\delta_{21} + \delta_{22} = 0$, $\delta_{31} + \delta_{32} = 0$, $\delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} = 0$ y $\delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32} = 0$. Demuestre que el modelo de regresión correspondiente a este nuevo modelo es equivalente a realizar el cambio de variable con la función 'contr.sum' en los dos factores X y Z en su modelo del litereal anterior.
2. (20 puntos) Suponga que el vector aleatorio n-variado $\mathbf{Y}$ sigue una distribución normal multivariada con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$, donde $\boldsymbol{\beta}$ es un vector p-variado de parámetros. Sea $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$. Demuestre que $E[\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y}] = (n - p)\sigma^2$
3. (10 puntos) Verifique que el diseño de bloques incompletos con $a = 8$, $r = 8$, $k = 4$ y $b = 16$ no existe.
4. (20 puntos) Diseñe un experimento de bloques incompletos con 8 tratamientos y 14 bloques de 4 observaciones cada uno.
5. (20 puntos) Construya un cuadrado greco-latino 5x5.