espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2025	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Segunda	Fecha:	25 de agosto de 2025

1. Un resorte de coeficiente de elasticidad $k = 1$ Newton/metro anclado a una pared por un extremo sostiene a un bloque de masa 0,5 kilogramos el cual se desliza sobre una superficie con coeficiente de rozamiento $b = 0{,}2$ Newtons/metro. Suponga que el bloque se encuentra originalmente en reposo a 1 metro del punto de equilibrio.
   (a) (2 puntos) Halle una ecuación diferencial que modele este fenómeno.
   (b) (4 puntos) Hallar la posición del bloque al cabo de 10 segundos.
   (c) (4 puntos) Suponga que durante todo el movimiento también actúa sobre el bloque una tercera fuerza constante de magnitud 0,5 Newton en la dirección positiva del movimiento. Determine la posición del objeto transcurridos 10 segundos.

Solución:

(a) La ecuación diferencial es

$$0,5\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$$

(b) La ecuación característica de la ecuación es $0{,}5r^2 + 0,2r + 1 = 0$, la cual es equivalente a $5r^2 + 2r + 10 = 0$ y tiene raíces complejas $r_1 = -1/5 + 7/5i$ y $r_2 = -1/5 - 7/5i$. De aquí, se obtiene que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = c_1 e^{-1/5t}\cos(7/5t) + c_2 e^{-1/5t}\operatorname{sen}(7/5t).$$

También

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{5}e^{-1/5t}(c_1\cos(7/5t) + c_2\operatorname{sen}(7/5t)) + e^{-1/5t}(-7/5c_1\operatorname{sen}(7/5t) + 7/5c_2\cos(7/5t)).$$

Luego,

$$x(0) = c_1, \quad \dot{x}(0) = -1/5c_1 + 7/5c_2$$

y de aquí se obtiene que $c_1 = 1$ y $c_2 = 1/7$. Así, el modelo que modela el fenómeno es

$$x(t) = e^{-1/5t} \cos(7/5t) + 1/7e^{-1/5t} \operatorname{sen}(7/5t).$$

La posición a los 10 segundos será

$$x(10) = e^{-2}(\cos 14 + 1/7 \operatorname{sen} 14)\,(m) \approx 0,038\,(m).$$

(c) En esta nueva situación, la posición $x(t)$ del bloque satisface el la ecuación

$$0,5\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x = 0,5 \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$$

Es inmediato que $x_p(t) \equiv 1/2$ es un solución particular de esta ecuación, por lo tanto, su solución general será

$$x(t) = c_1 e^{-1/5t} \cos(7/5t) + c_2 e^{-1/5t} \operatorname{sen}(7/5t) + 1/2,$$

y $\dot{x}(t)$ es como antes. En particular,

$$x(0) = c_1 + 1/2 \quad \dot{x}(0) = -1/5c_1 + 7/5c_2.$$

Por tanto, $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 1/14$. Es decir,

$$x(t) = 1/2e^{-1/5t} \cos(7/5t) + 1/14e^{-1/5t} \operatorname{sen}(7/5t) + 1/2,$$

Al cabo de 10 segundos el bloque estará en la posición

$$x(10) = (e^{-2}(1/2 \cos 14 + 1/14 \operatorname{sen}(14)) + 1/2)\,(m) \approx 0,52\,(m)$$

Rúbrica:

Plantea correctamente el PVI que modela el fenómeno.	1–2 puntos
Resuelve el problema de valor inicial y usa su solución para determinar la posición del bloque	1–4 puntos
Plantea el nuevo problema de valor inicial considerando la fuerza externa constante y lo resuelve	1–4 puntos

2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -x_2 + 3x_3, 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4).$$

(a) (4 puntos) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ de tal forma que la matriz asociada a T con respecto a $\mathcal{B}$ sea diagonal.

(b) (4 puntos) Halle el las dimensiones del núcleo y la imagen de T.

(c) (4 puntos) Halle una base para la imagen de T.

Solución:

(a) Si $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces

$$\begin{aligned} Te_1 &= -2e_1 + 2e_4, \\ Te_2 &= -e_1 - e_2 + 2e_4, \\ Te_3 &= e_1 + 3e_2 + 2e_3 - 2e_4, \\ Te_4 &= -e_1 + e_4. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz A asociada a T con respecto a $\mathcal{A}$ es

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(tI_4 - A) &= \begin{vmatrix} t+2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & t+1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-2) \begin{vmatrix} t+2 & 1 & 1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ -2 & -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-2)(t+1) \begin{vmatrix} t+2 & 1 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-2)(t+1)[(t+2)(t-1) + 2] \\ &= t(t-2)(t+1)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios de A son

$$\begin{aligned} t &= 0, \\ t &= 2, \\ t &= -1 \quad \text{(multiplicidad 2)}. \end{aligned}$$

Para hallar los vectores propios $v = (v_1, v_2, v_3)$ de A debemos resolver la ecuación

$$Av = tv$$

o, la ecuación equivalente

$$(tI_4 - A)v = v,$$

es decir

$$\begin{cases} (t+2)v_1 + v_2 - v_3 + v_4 & = 0, \\ (t+1)v_2 - v_3 & = 0, \\ (t-2)v_3 & = 0, \\ -2v_1 - 2v_2 + 2v_3 + (t-1)v_4 & = 0. \end{cases}$$

- Para $t = 0$, obtenemos
$$v_4 = -2v_1,\ v_2 = v_3 = 0,$$
entonces,
$$E_0 = \text{gen}\{(1,0,0,-2)\}.$$
- Para $t = 2$, obtenemos
$$v_2 = v_3,\ v_1 = v_4 = 0,$$
entonces,
$$E_2 = \text{gen}\{(0,1,1,0)\}.$$
- Para $t = -1$, obtenemos
$$v_1 + v_2 + v_4 = 0,\ v_3 = 0,$$
entonces,
$$E_{-1} = \text{gen}\{(1,-1,0,0),(0,1,0,-1)\}.$$

Finalmente, podemos tomar

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-2),(0,1,1,0),(1,-1,0,0),(0,1,0,-1)\}.$$

En esta base, la matriz de T es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Esta información podemos obtenerla directamente de $[T]_{\mathcal{B}}$: como esta matriz tiene solo un 0 en la diagonal, su nulidad es 1, lo que implica que $\dim \mathrm{N}(T) = 1$. En consecuencia, $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$ (también se deduce del hecho que hay tres números no nulos en la diagonal de $[T]_B$).

(c) Una imagen para T puede obtenerse de la base $\mathcal{B}$. Se tiene que $(1,0,0,-2)$ genera a $\mathrm{N}(T)$ (pues $\mathrm{N}(T) = E_0$), por lo que $\{T(0,1,1,0), T(1,-1,0,0), T(0,1,0,-1)\}$ generan $\mathrm{Im}(T)$. Como cada uno de los vectores $(1,-1,0,0)$, $(1,-1,0,0)$ y $(0,1,0,-1)$ son vectores propios de T, podemos concluir que
$$\{(0,1,1,0),(1,-1,0,0),(0,1,0,-1)\}$$
es una base de $\mathrm{Im}(T)$.

Rúbrica:

Halla una base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal.	1–4 puntos
Halla las dimensiones de núcleo y la imagen de T	1–4 puntos
Halla una base para la imagen de T	1–4 puntos

3. (10 puntos) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y_1' &= -6y_1 - y_2, \quad y_1(0) = 2 \\ y_2' &= y_1 - 8y_2, \quad y_2(0) = 4 \end{aligned}$$

Solución: La matriz asociada a este sistema es

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p_A(t) = \det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t+6 & 1 \\ -1 & t+8 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} t+7 & -t-7 \\ -1 & t+8 \end{bmatrix} = (t+7)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & t+8 \end{vmatrix} = (t+7)^2.$$

Por tanto, $t = -7$ es el único valor propio de A y tiene multiplicidad 2. Los vectores propios asociados a este valor son exactamente los vectores no nulos que son soluciones del sistema

$$(A + 7I_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

esto es, son los múltiplos no nulos de $(1,1)$. Por tanto, una solución para el sistema dado es

$$\gamma_1(t) = e^{-7t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ e^{-7t} \end{bmatrix}.$$

Sabemos que existe una segunda solución de la forma

$$\gamma_2(t) = e^{-7t}(v_1 + tv_2),$$

donde v_2 es un vector propio asociado a -7 y v_1 satisface

$$(A + 7I_2)v_1 = v_2.$$

Si hacemos $v_2 = (1,1)$, entonces v_1 satisface el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuyas soluciones son de la forma $(x_2 + 1, x_2)$ Luego, podemos hacer $v_1 = (2,1)$. Por tanto,

$$\gamma_2(t) = e^{-7t}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{-7t}(2+t) \\ e^{-7t}(1+t) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la solución general del sistema es

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{-7t} & e^{-7t}(2+t) \\ e^{-7t} & e^{-7t}(1+t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Queremos hallar (c_1, c_2) de manera que γ satisfaga $\gamma(0) = (2,4)$, esto es tal que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

equivalentemente

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, el problema de valor inicial planteado es

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{-7t} & e^{-7t}(2+t) \\ e^{-7t} & e^{-7t}(1+t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1–2 puntos
Calcula correctamente los vectores propios	1–3 puntos
Halla una base para el espacio de soluciones	1–3 puntos
Resuelve el PVI	1–2 puntos

4. (8 puntos) Se sabe que $y_1(t) = \operatorname{sen} t^2$ es solución de la ecuación diferencial

$$ty'' - y' + 4t^3 y = 0, \ t > 0.$$

Halle la solución general de esta ecuación.

Solución: Primero dividimos la ecuación por t para obtener la ecuación equivalente:

$$y'' - \frac{1}{t}y' + 4t^2 y = 0, \ t > 0.$$

Una segunda solución y_2 linealmente independiente de y_1 es dada por

$$y_2(t) = v(t)y_1(t), \ t > 0,$$

donde

$$v(t) = \int \frac{e^{-\int(-\frac{1}{t})\,dt}}{\operatorname{sen}^2 t^2}\,dt = \int \frac{t}{\operatorname{sen}^2 t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{1}{2}\int \csc^2 u\,du = -\frac{1}{2}\cot t^2.$$

Luego, $y_2(t) = -\frac{1}{2}\cot t^2 \operatorname{sen} t^2 = -\frac{1}{2}\cos t^2$. Por tanto, la solución general de la ecuación planteada es

$$y(t) = c_1 \operatorname{sen} t^2 + c_2 \cos t^2.$$

5. (10 puntos) Resuelva el prolema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}\operatorname{sen} 5t, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = -2.$$

Solución: Este problema puede resolverse usando coeficientes indeterminados, pero es más fácil usar transformadas de Laplace. Sea $Y = \mathcal{L}\{y\}$. Aplicamos transformadas de Laplace a ambos lados de la ecuación planteada:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 29\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen} 5t\},$$

así

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4(sY - y(0)) + 29Y = \frac{5}{(s+2)^2+5^2}$$

$\iff$

$$s^2Y - 5s + 2 + 4sY - 20 + 29Y = \frac{5}{(s+2)^2+5^2}$$

$\iff$

$$(s^2+4s+29)Y = \frac{5}{(s+2)^2+5^2} + 5s + 18$$

$\iff$

$$Y = \frac{5}{((s+2)^2+5^2)^2} + \frac{5s+18}{(s+2)^2+5^2}$$

$\iff$

$$\frac{5}{((s+2)^2+5^2)^2} + 5\frac{s+2}{(s+2)^2+5^2} + \frac{8}{5}\frac{5}{(s+2)^2+5^2}.$$

Therefore,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{((s+2)^2+5^2)^2}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+5^2}\right\} + \frac{8}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^2+5^2}\right\}$$

$\iff$

$$y = -\frac{1}{10}e^{-2t}t\cos 5t + \frac{1}{50}e^{-2t}\operatorname{sen} 5t + 5e^{-2t}\cos 5t + \frac{8}{5}e^{-2t}\operatorname{sen} 5t.$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1–2 puntos
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–3 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–3 puntos
Resuelve el PVI.	1–2 puntos