ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

espol

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2025	**PERIODO:**	PAE
MATERIA:	Álgebra Lineal	**PROFESOR:**	Carlos M. Martín B.
EVALUACIÓN:	Primera	**FECHA:**	Viernes 28 de marzo de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar una calculadora, únicamente un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada. ***Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.***

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ____ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ___________________________ ***PARALELO:*** _________

TEMAS

1.- **Considere la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Encuentre una base y determine la dimensión para el Núcleo de A y para la Imagen de A.

2.- Considere las bases del espacio vectorial $\mathbb{P}_1$:

$$B_1 = \{9 + x, -4 + 5x\}$$

$$B_2 = \{2 + x, -1 + 3x\}$$

a) Encuentre la matriz de cambio de base $C_{B1 \to B2}$

b) Si se conoce que $[v]_{B1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, encuentre v y $[v]_{B2}$

3.- Considere el espacio vectorial real $\mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / \ b > 0 \right\}$ con las operaciones:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + 1 \\ b_1 \, b_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 1 + \alpha \\ b^{\alpha} \end{pmatrix}$$

a) Encuentre el vector nulo de $\mathbb{V}$ y el inverso del vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Pruebe que para cualquier real α y que para dos vectores arbitrarios $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ se cumple que $\alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)$

4.- Considere el espacio vectorial $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$. Sean los subespacios de $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \right\}$$

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \right\}$$

a) Encuentre una base y determine la dimensión de $\mathbb{H} \cap \mathbb{W}$

b) ¿Es directa la suma $\mathbb{H} + \mathbb{W}$? Justifique su respuesta

c) ¿Es $\mathbb{H} \cup \mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$? Justifique su respuesta

5.- La siguiente proposición es VERDADERA, pruébela usando REDUCCIÓN AL ABSURDO: "Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial tal que $\boldsymbol{dim}\ \mathbb{V} = \boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \cdots, \boldsymbol{v_k}\}$ un conjunto LI en $\mathbb{V}$, con $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$. Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\boldsymbol{u} \notin \boldsymbol{gen}(\boldsymbol{S})$. Entonces $\boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{u}\}$ es también LI en $\mathbb{V}$"

La siguiente proposición es FALSA, proporcione un contraejemplo: "Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial tal que $\boldsymbol{dim}\ \mathbb{V} = \boldsymbol{n}$. Sea $\boldsymbol{S}$ un conjunto de vectores no nulos tal que $|\boldsymbol{S}| \geq \boldsymbol{n}$. Entonces $\mathbb{V} = \boldsymbol{gen}(\boldsymbol{S})$"