
RÚBRICA DEL TERCER EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL

PAO2 2023-2024

GYE. 14-FEB-2024

1. (15 p.) Considere las rectas en \mathbb{R}^3 dadas por

$$L_1 : \frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{-2},$$
$$L_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+11}{-2} = \frac{1-z}{4}.$$

Determine de ser posible el punto P intersección entre L_1 y L_2 .

- Expresa cada recta en función de un parámetro (2 p. c/u).....4 p.
- Plantea un sistema adecuado de 3 ecuaciones con dos incógnitas.....3 p.
- Resuelve el sistema y obtiene valores correctos de los parámetros...5 p.
- Especifica coordenadas correctas de $P(3, -9, 5)$3 p.

2. (15 p.) Considere la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & , x - y \neq 0 \\ 2x^2 + y & , x - y = 0 \end{cases}$.

a) Determine si f es continua en $(5, 5)$.

- Analiza límite por la ruta o sucesión de la forma $y = x$1 p.
- Analiza límite por la ruta o sucesión de la forma $y \neq x$1 p.
- Determina correctamente que los límites no coinciden en $(5, 5)$2 p.
- Concluye que f no es continua en $(5, 5)$1 p.

b) Calcule f_y en $(5, 5)$.

- Plantea definición de límite para calcular $f_y(5, 5)$1 p.
- Reemplaza datos correctamente.....2 p.
- Calcula correctamente el límite y concluye que no existe.....3 p.

c) Explique si es posible concluir sobre la diferenciabilidad de f en $(5, 5)$ usando alguna de las respuestas obtenidas en a) o en b).

- Explica correctamente que f no es diferenciable en $(5, 5)$ por cuanto no es continua o una de sus derivadas parciales no existe en este punto.....4 p.

3. (20 p.) Dada la función $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)+2xy$, $x, y > 0$, determine el polinomio de Taylor de segundo orden que aproxima a f en una vecindad del punto $(1, 1)$.

- Plantea expresión general del polinomio de Taylor de segundo orden....2 p.
- Evalúa $f(1, 1) = 2 + \ln(2)$2 p.
- Calcula $\nabla f(1, 1) = (3, 3)$4 p.
- Calcula segundas derivadas $f_{xx}(1, 1) = f_{yy}(1, 1) = 0$4 p.
- Calcula derivadas mixtas $f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1) = 1$2 p.
- Reemplaza datos y realiza cálculos correctos.....4 p.
- Especifica polinomio de forma correcta y simplificada.....2 p.

$$P_2(x, y) = \ln(2) - 3 + xy + 2x + 2y.$$

4. (20 p.) Calcule el volumen del sólido acotado por las superficies $z = \frac{5}{2}(x^2 + y^2)$, $z = 5$ y $z = 15$.

- Realiza un bosquejo gráfico del sólido, incluyendo las tres superficies...4 p.
- Identifica una región de proyección adecuada.....4 p.
- Plantea correctamente una o dos integrales de volumen, según sea el plano de proyección elegido, por ejemplo, sobre XY y usando el sistema cilíndrico se requieren dos integrales triples.....6 p.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_5^{15} r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \int_{\frac{5}{2}r^2}^{15} r dz dr d\theta$$

- Resuelve correctamente la o las integrales planteadas y especifica respuesta correcta, $40\pi [u^3]$6 p.

5. (15 p.) Sea C la trayectoria formada por el arco $y = \sqrt{9 - x^2}$, que va desde el punto $P(3, 0)$ hasta el punto $Q(-3, 0)$, y el tramo recto desde Q hasta P . Empleando el teorema de Green, evalúe $\int_C (\arctan(e^x) + y^2)dx + (\text{sen}(y) - x^2)dy$.

- Realiza una gráfica de C e identifica la región R que limita.....3 p.
- Plantea expresión general del teorema de Green.....2 p.
- Calcula $N_x - M_y = -2x - 2y$2 p.
- Especifica límites de la integral doble de acuerdo al sistema de variables elegido, por ejemplo, el sistema polar.....4 p.

$$\int_C (\arctan(e^x) + y^2)dx + (\text{sen}(y) - x^2)dy = \int_0^\pi \int_0^3 (-2r^2)(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta))dr d\theta.$$

- Resuelve la integral doble y especifica respuesta correcta, -364 p.

6. (15 p.) Usando el teorema de la divergencia de Gauss, calcule el flujo que genera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k})$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, orientada hacia el exterior de la región que limita.

- Realiza un bosquejo gráfico de la superficie esférica e identifica el sólido Q que limita.....2 p.
- Plantea expresión general del teorema de Gauss.....2 p.
- Calcula $\text{div}\mathbf{F} = x^2 + y^2 + z^2$2 p.
- Especifica límites de la integral triple de acuerdo al sistema de variables elegido, por ejemplo, el sistema esférico.....4 p.

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^4 \text{sen}(\varphi) d\rho d\varphi d\theta.$$

- Resuelve la integral triple y especifica respuesta correcta, $\frac{4\pi}{5}a^5$5 p.