Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal
I PAO 2021

Examen parcial

5 de julio de 2021

Compromiso de honor

Yo declaro que he sido informado y conozco las normas disciplinarias que rigen a la ESPOL, en particular el Código de Ética y el Reglamento de Disciplina. Al aceptar este compromiso de honor, reconozco y estoy consciente de que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de forma individual; que puedo comunicarme únicamente con la persona responsable de la recepción de la evaluación; y que al realizar esta evaluación no navegaré en otras páginas que no sean las páginas de Aula Virtual; que no recibiré ayuda ni presencial ni virtual; que no haré consultas en libros, notas, ni apuntes adicionales u otras fuentes indebidas o no autorizadas por el evaluador; ni usaré otros dispositivos electrónicos o de comunicación no autorizados. Además, me comprometo a mantener encendida la cámara durante todo el tiempo de ejecución de la evaluación, y en caso de que el profesor lo requiera, tomar una foto de las páginas en las que he escrito el desarrollo de los temas y subirla a Aula Virtual, como evidencia del trabajo realizado, estando consciente que el no subirla, anulará mi evaluación. Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican para la realización de la presente evaluación (incluyendo los requisitos de uso de la tecnología). Estoy consciente que el incumplimiento del presente compromiso, anulará automáticamente mi evaluación y podría ser objeto del inicio de un proceso disciplinario.

Problemas planteados

1. (5 puntos) Haga un análisis de convexidad de la ecuación diferencial

   $$y' = y - t^2 - 1.$$

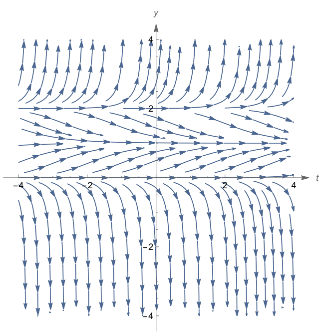
   e indique en cuál región del plano las soluciones son cóncavas hacia arriba, cóncavas hacia abajo o tienen puntos de inflexión.

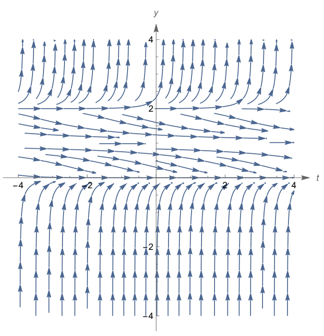
2. *a*) (3 puntos) Halle las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma

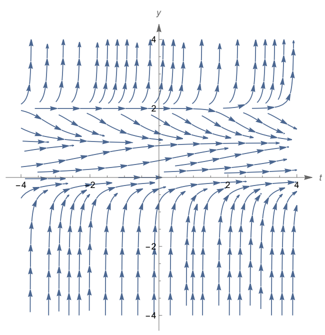
   $$y' = (y-1)(y-2)y^2$$

   y determine la estabilidad de tales soluciones.

   b) (2 puntos) En base a la información obtenida en el literal *a*), decida cuál de los siguientes diagramas de flujo corresponde a la ecuación dada:

(I) 

(II) 

(III) 

3. (8 puntos) La *ley generalizada de enfriamiento de Newton* establece que la tasa de cambio en la temperatura $T = T(t)$ de un objeto ubicado en ambientes de *temperatura variable* $M(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = k(M(t) - T),\ k > 0,\ t > 0.$$

Halle la expresión general para $T(t)$ si la temperatura exterior tiene un comportamiento oscilatorio descrita por

$$M(t) = M_0 + A \operatorname{sen} \omega t,\ t > 0,$$

donde M_0, A y ω son constantes.

4. (8 puntos) En $\mathbb{R}^2$, mantengamos la definición de producto cv de un número por un vector, pero modifiquemos la definición de suma $u + v$ de los vectores $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$ como

$$u + v = (x_1 x_2, y_1 y_2).$$

¿Cuáles axiomas de espacio vectorial continúan válidos y cuáles son violados?

5. (8 puntos) Halle una base para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por la intersección de los hiperplanos

$$\mathbb{H}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\} \text{ y}$$
$$\mathbb{H}_2 = \operatorname{gen}\{(1, 0, 1, 1), (-1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 4)\}.$$

6. (8 puntos) Considere el oscilador armónico forzado y sin amortiguamiento

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_f t,\ m > 0,\ k > 0,$$

donde F_0 es una constante no nula llamada *amplitud forzada* y ω_f es la *frecuencia forzada*. Halle la solución general del movimiento en el caso que $\omega_f \neq \omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

7. *a*) (4 puntos) Demuestre que $\{y_1(t) = t^{-1/2} \operatorname{sen} t, y_2(t) = t^{-1/2} \cos t\}$ es una base para espacio de soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right) y = 0,\ t > 0.$$

   b) (4 puntos) Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right) y = t^{-1/2},\ t > 0$$