

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la
Producción**

Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al
control de su estabilidad

ING-2761

PROYECTO INTEGRADOR

Previo la obtención del Título de:

INGENIERO MECÁNICO

Presentado por:

Jorge Guillermo García Arreaga

René Javier Erazo Rojas

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año: 2025

DEDICATORIA

A todos aquellos que creen en lo que soy, y en lo que quiero ser. Ellos, al igual que yo, merecemos aquello que tanto soñamos.

- **Jorge García.**

Doy gracias a Dios, mi guía, refugio y fortaleza en cada paso de este camino. Dedico todo mi esfuerzo a mis padres, cuyo amor incondicional, sacrificios y enseñanzas me han convertido en la persona que soy. A mi hermana, cuyo cariño fue mi mayor motivación para seguir adelante. A mis abuelitos, por su ternura, sabiduría y palabras llenas de aliento, que me brindaron fuerzas cuando más lo necesité. A Chiwi, mi fiel compañero de cuatro patitas, por su silenciosa y cálida compañía que hizo mis jornadas de estudio y trabajo más llevaderas. Y, por supuesto, a mis amigos Billy, Axel, Pepe, Steven, Peña, Valeria y Romina, por acompañarme en la alegría y en la adversidad.

A todos ustedes, gracias por formar parte de mi vida y de mis sueños.

- **René Erazo**

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a quienes han alumbrado con la luz de su conocimiento, los oscuros tramos de ignorancia en nuestro camino. Al PhD. Jorge Hurel, por su visión al proponer este proyecto y brindarnos las herramientas para que se lleve a cabo. Y al PhD. Francis Loayza, por guiarnos en el proceso.

Al profesor Jorge Salazar, por ayudarnos a resolver uno de los problemas principales que teníamos en el péndulo. Y finalmente, a nuestro gran amigo, Abhishek, quien, desde la India, nos brindó su apoyo y su conocimiento, con el único ánimo de ayudarnos.

- **Jorge García & René Erazo**

DECLARACIÓN EXPRESA

"Los derechos de titularidad y explotación, me(nos) corresponde conforme al reglamento de propiedad intelectual de la institución; (*nombre de los participantes*) y doy(damos) mi(nuestro) consentimiento para que la ESPOI realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual"



Jorge Guillermo García Arreaga



René Javier Erazo Rojas

EVALUADORES

.....
PhD. Francis Roderich Loayza Paredes

.....
PhD. Jorge Luis Hurel Ezeta

RESUMEN

El péndulo invertido doble es un sistema dinámico complejo, es un carro que se mueve en una pista, con dos eslabones conectados en serie, y se estabilizan por la acción de un actuador. Sirve para modelar sistemas inestables, y facilita el aprendizaje de estrategias de control. El objetivo es construir un prototipo con un controlador para analizar su estabilidad ante perturbaciones.

El desarrollo del proyecto consistió en realizar el modelo matemático del mecanismo y a su vez, construir el prototipo. Se usó un motor JGB37-520, 3 encoders E6B2-CW2Z, un Arduino MEGA2560 para adquisición de datos y acrílico para los eslabones. Posteriormente, se estimaron los parámetros del mecanismo y del motor para coincidir la simulación con la realidad a través de una experimentación. Se calculó el espacio de estados para diseñar un controlador LQR. El entorno virtual utilizada fue Simulink en Matlab, a través de este software se verificó la controlabilidad del sistema y finalmente, se implementó el controlador a la planta real para realizar el análisis dinámico.

Los parámetros del motor coincidieron un 95%, mientras que las del mecanismo solo un 75%. Cuando se ejecutó la simulación con estos valores, y una condición inicial de (0 metros, 0.087 rad, 0.087 rad), el sistema se estabilizó en 5 segundos, con picos de voltaje de 15 voltios; sin embargo, cuando se implementó en la realidad, el sistema necesitaba 40 voltios para que el actuador realice la acción de estabilización. Se concluye que el sistema es totalmente controlable a través del tiempo, y su respuesta dinámica real coincide con la dirección que toma en la simulación; sin embargo, la respuesta del sistema era lenta debido a las limitaciones del actuador.

Palabras Clave: Péndulo invertido doble; LQR; Simulink; Arduino; Estimar parámetros.

ABSTRACT

The double inverted pendulum is a complex dynamic system, it is a cart that moves on a track, with two links connected in series, and is stabilized by the action of an actuator. It is used to model unstable systems and facilitate the learning of control strategies. The objective is to build a prototype with a controller to analyze its stability against disturbances.

The development of the project consisted of making the mathematical model of the mechanism and in turn, building the prototype. A JGB37-520 motor, 3 E6B2-CW2Z encoders, and an Arduino MEGA2560 for data acquisition and acrylic for the links were used. Subsequently, the parameters of the mechanism and the motor were estimated to match the simulation with reality through experiments. The state space was calculated to design an LQR controller. The virtual environment used was Simulink in Matlab, through this software the controllability of the system was verified and finally, the controller was implemented in the real plant to perform the dynamic analysis.

The motor parameters matched 95%, while those of the mechanism matched only 75%. When the simulation was run with these values, and an initial condition of (0 meters, 0.087 rad, 0.087 rad), the system stabilized in 5 seconds, with voltage peaks of 15 volts; however, when implemented, the system needed 40 volts for the actuator to perform the stabilization action. It is concluded that the system is fully controllable over time, and its real dynamic response matches the direction it takes in the simulation; however, the system response was slow due to the limitations of the actuator.

Keywords: *Double inverted pendulum; LQR; Simulink; Arduino; Estimate parameters.*

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN.....	I
<i>ABSTRACT</i>	II
ÍNDICE GENERAL	III
ABREVIATURAS.....	VI
SIMBOLOGÍA	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABLAS.....	XI
ÍNDICE DE PLANOS.....	XII
CAPÍTULO 1.....	1
1. Introducción	1
1.1 Descripción del problema	1
1.2 Justificación del problema.....	2
1.3 Objetivos.....	3
1.3.1 Objetivo General.....	3
1.3.2 Objetivos Específicos	3
1.4 Marco Teórico.....	3
1.4.1 Retroalimentación de un sistema de control.....	3
1.4.2 Algoritmo Software in Loop (SiL) y Hardware in Loop (HiL)	4
1.4.3 Modelos matemáticos.....	6
1.4.4 Ecuación de Lagrange para describir espacios de estado.	6
1.4.5 Espacios de estado.	7
1.4.6 Actuadores mecánicos.	8
1.4.7 Sensores	8

2.	METODOLOGÍA	10
2.1	Selección de componentes eléctricos y mecánicos	11
2.1.1	Riel de movimiento	11
2.1.2	Carro móvil	12
2.1.3	Tarjeta de adquisición de datos	12
2.1.4	Sensores de posición	13
2.1.5	Eslabón.....	16
2.1.6	Bases y soportes	17
2.1.7	Motor actuador.....	18
2.1.8	Driver controlador y fuente de alimentación	18
2.1.9	Polea y correa dentada.....	19
2.2	Ensamble del prototipo.	20
2.3	Modelo matemático del sistema	21
2.4	Estimación de parámetros.	25
2.4.1	Estimación de parámetros del actuador.	26
2.4.2	Estimación de parámetros de la planta.....	27
2.5	Selección de controlador	29
2.6	Sistema de control de la planta.....	32
CAPÍTULO 3.....		35
3.	RESULTADOS Y ANÁLISIS	35
3.1	Estimación de parámetros	35
3.1.1	Estimación de parámetros del motor	35
3.1.2	Estimación de parámetros del mecanismo	38
3.2	Sintonización de controlador.....	41
3.3	Respuesta de simulación.....	44
3.4	Implementación en la planta real.	47

3.5	Análisis de costos.....	48
3.6	Discusión de resultados.....	50
CAPÍTULO 4.....		53
4.	Conclusiones Y Recomendaciones	53
4.1	Conclusiones	53
4.2	Recomendaciones	54
BIBLIOGRAFÍA.....		55
APÉNDICES.....		58

ABREVIATURAS

ESPOL	Escuela Superior Politécnica del Litoral
FIMCP	Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción
PDI	Péndulo Doble Invertido
ESP	Electronic Stability Program (Programa Electrónico de estabilidad)
SiL	Software in the Loop
HiL	Hardware in the Loop
FT	Función de transferencia
DC	Direct Current (Corriente directa)
RPM	Revoluciones Por Minuto
PPR	Pulsos Por Revolución
FCEM	Fuerza Contra Electromotriz
PID	Proporcional, Integral, Derivativo
LQR	Linear Quadratic Regulator (Regulador Cuadrático Lineal)
SS	State Space (Espacio de estado)
MATLAB	Matrix Laboratory
CAD	Computed – aided design (Diseño asistido por computadora)
IBT	Intersystem Bonding Termination (Terminación de conexión entre sistemas)
SIT	System Identification Toolbox

SIMBOLOGÍA

θ_1, θ_2	Theta (Posición angular de cada eslabón)
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$	Velocidad angular de cada eslabón
$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$	Aceleración angular de cada eslabón
θ_0	Posición lineal del carro
$\dot{\theta}_0$	Velocidad lineal del carro
$\ddot{\theta}_0$	Aceleración del carro
L_1, L_2	Longitud total de cada eslabón
l_1, l_2	Longitud desde la base hasta el centro de masa de cada eslabón
u	Fuerza generada por el actuador
t	Tiempo
$y(t)$	Señal de salida
$z(t)$	Perturbaciones del sistema de control
$y_m(t)$	Variable medida del sensor
$v_c(t)$	Variable de regulación de señal
$v_a(t)$	Variable de salida del actuador
$e(t)$	Error del proceso en el sistema de control
L	Lagrangiano
T	Energía cinética
V	Energía potencial
q	Coordenadas generalizadas del espacio de estado
\dot{q}	Velocidades generalizadas del espacio de estado
n	Grados de libertad del sistema
$x(t)$	Vector de estados
$A(t)$	Matriz de estados
$B(t)$	Matriz de entrada
$C(t)$	Matriz de salida
$D(t)$	Matriz de transmisión directa
$v(t)$	Voltaje suministrado al circuito

V	Voltios (Unidad de voltaje)
$i(t)$	Corriente suministrada al circuito
A	Amperios
R	Resistencia de armadura
Ω	Ohm
$L(t)$	Inductancia
H	Henrio (Unidad de inductancia)
π	Pi (Constante = 3.14159265...)
$\omega_s(t)$	Velocidad angular del eje de un motor DC
$T(m)$	Par mecánico
J	Inercia del eje del motor
I_1, I_2	Inercia de cada eslabón
K_e	Constante FCEM del motor
K_t	Constante de torque del motor
b	Fricción viscosa de la base móvil
r	Radio de la polea
m_0, m_1, m_2	Masa de los componentes del sistema
kg	Kilogramos (Unidad de masa)
g	Gramos (Unidad de masa)
m	Metros (Unidad de longitud)
N	Newtons (Unidad de fuerza)
rad	Radianes (Unidad de posición angular)
s	Segundos (Unidad de tiempo)
τ_{min}	Torque mínimo
f_r	Coefficiente de fricción entre el riel y el carro.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Mecanismo de péndulo doble invertido	1
Figura 1.2. Relación del ciclo de caminata bípeda con péndulo invertido	2
Figura 1.3. Sistema de control de lazo cerrado	4
Figura 1.4. Sistema de control de lazo abierto	4
Figura 1.5. Diagrama de bloques de Software in Loop (SiL)	5
Figura 1.6. Diagrama de bloques de Hardware in Loop (HiL).....	5
Figura 1.7. Diagrama de bloques de espacios de estados	7
Figura 1.8. Diagrama de actuador mecánico de corriente directa	8
Figura 2.1 Diagrama de flujo de metodología.....	10
Figura 2.2. OB2020 – V SLOT.....	11
Figura 2.3. Carro – Placa deslizante	12
Figura 2.4. Arduino MEGA 2560.....	13
Figura 2.5. Sensor E6B2 – CW2E	16
Figura 2.6. Eslabón de acrílico para el PDI	16
Figura 2.7. Base que sostiene los eslabones en el carro	17
Figura 2.8. Base que sostiene el encoder	17
Figura 2.9. Motor JGB37 - 520	18
Figura 2.10. Puente H, IBT2 – 43A.....	19
Figura 2.11. Polea GT2 – W6 – 20T – 6.35mm	19
Figura 2.12. Ensamble del prototipo del PDI	20
Figura 2.13. Diagrama de conexiones eléctricas.....	21
Figura 2.14. Diagrama de bloques para simulación de parámetros de motor	26
Figura 2.15. Diagrama de bloques para experimentación del motor	26
Figura 2.16. Diagrama de bloques para simulación de parámetros del mecanismo	27
Figura 2.17. Diagrama de bloques para parámetros del mecanismo real	28
Figura 2.18. Subsistema de conexiones del sistema Real - PDI	28
Figura 2.19. Diagrama de bloques para controlador LQR	31
Figura 2.20. Diagrama de bloques para planta simulada	32

Figura 2.21. Diagrama de bloques para planta real.....	33
Figura 3.1. Velocidad (rad/seg) VS tiempo (s) del motor sin iteraciones	36
Figura 3.2. Velocidad (rad/seg) VS tiempo (s) del motor con interacciones	37
Figura 3.3. Theta 0 (m) VS tiempo (s) – Después de estimar parámetros	38
Figura 3.4. Theta 1 (rad) VS tiempo (s) – después de iteraciones	39
Figura 3.5. Theta 2 (rad) VS tiempo (s) – después de iteraciones	39
Figura 3.6. Posición Theta 0 (m) VS tiempo (s).....	44
Figura 3.7. Posición Theta 1 (rad) VS tiempo (s).....	44
Figura 3.8. Posición Theta 2 (rad) VS tiempo (s).....	45
Figura 3.9. Voltaje (V) VS tiempo (s)	46
Figura 3.10. Señal de voltaje de planta real	47
Figura 3.11. Distribución del precio del producto.....	49
Figura 3.12. Diagrama de bloques con controlador mixto	52

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1. Características estáticas y dinámicas del sensor	9
Tabla 2.1. Ventajas y desventajas de sensores de posición	14
Tabla 2.2. Criterios de selección para sensores de posición.....	14
Tabla 2.3. Comparación por pares de criterios de selección de sensores	15
Tabla 2.4. Matriz de decisión para la selección del sensor de posición	15
Tabla 2.5. Términos principales del sistema.....	22
Tabla 2.6. Ecuaciones de desplazamiento del sistema	22
Tabla 2.7. Ecuaciones de velocidad del sistema	23
Tabla 2.8. Ecuaciones de energía cinética y potencial.....	23
Tabla 2.9. Ecuaciones para sistema de Rayleigh.....	24
Tabla 2.10. Ventajas y desventajas de controladores	29
Tabla 2.11. Criterios para selección de controlador	30
Tabla 2.12. Comparación por pares para criterios de selección de controlador	30
Tabla 2.13. Matriz de decisión para selección de controlador.....	31
Tabla 3.1. Parámetros estimados del motor	37
Tabla 3.2. Parámetros estimados del mecanismo.....	40
Tabla 3.3. Código de controlabilidad	42
Tabla 3.4. Condiciones de penalización para matriz Q	43
Tabla 3.5. Costo del proyecto.....	48
Tabla 3.6. Costo del PDI de Quanser.....	50

ÍNDICE DE PLANOS

PLANO 1	Soporte para encoder
PLANO 2	Soporte para motor 775
PLANO 3	Soporte de carro – encoder
PLANO 4	Carro móvil
PLANO 5	Eslabones
PLANO 6	Encoder E6B2 – CW2E
PLANO 7	Perfil de deslizamiento de 1 metro de longitud
PLANO 8	Motor 775
PLANO 9	Ensamble final de péndulo invertido doble
PLANO 9	Diagrama Esquemático

CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Descripción del problema

El problema del péndulo doble invertido (PDI) es un ejemplo comúnmente usado en el campo de la ingeniería mecánica y de control para describir un sistema caótico. Principalmente por su naturaleza compleja y altamente inestable. El sistema del PDI lo componen dos barras articuladas, con rótulas en sus uniones que forman ángulos, θ_1 , y θ_2 , respectivamente. Están conectadas en serie a un carro móvil, que puede desplazarse a una posición, θ_0 , en sentido horizontal por la acción de una fuerza externa, $u(t)$. De esta manera, el carro busca mantener en posición vertical ambas barras, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Esto se evidencia en la Figura 1.1.

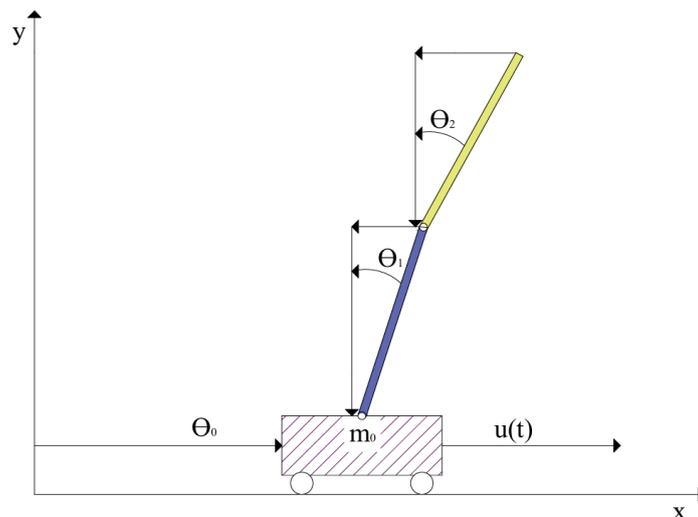


Figura 1.1. Mecanismo de péndulo doble invertido

Cabe destacar que el PDI es un sistema sub – actuado, ya que cuenta con dos partes que se mueven libremente; y una parte que se mueve de manera controlada usando un actuador. Es decir, la posición angular de ambos eslabones se controla mediante la interacción dinámica que tiene con el carro móvil. Para esto, se toman en cuenta parámetros clave, como la longitud y la inercia de las barras, la constante de torque y velocidad del motor – actuador, su voltaje, su resistencia, etc.

Precisamente por esto, la comprensión del sistema dinámica del PDI requiere de la aplicación de técnicas avanzadas de control no lineal. Además, inmiscuye la implementación de algoritmos que sean capaces de adaptarse a situaciones reales, donde la estabilidad sea crucial.

1.2 Justificación del problema

En la actualidad, el modelo de estabilización del PDI, se utiliza como base en diversos sistemas de control dinámico y corrección de trayectoria. Por ejemplo, los Programas Electrónicos de Estabilidad (ESP). En la actualidad, es usado obligatoriamente en la fabricación de automóviles. De acuerdo con (Luna & Tenesaca, 2007), el ESP permite conservar la dirección deseada del vehículo después de que se haya realizado alguna maniobra crítica de conducción y se haya perdido adherencia entre las llantas y el terreno. El ESP mide la posición angular de dirección y la velocidad de las ruedas para accionar el sistema de frenos y de tracción del vehículo.

Además de sus múltiples usos en la robótica, (Garcia, 1999), ideó un modelo simplificado de la caminata bípeda de robots, basándose en la dinámica del péndulo doble y triple. Tres barras articuladas, se ubican tal como en la Figura 1.2, una masa puntual simula la cadera, y 2 masas más pequeñas, los pies, mientras que una rótula en uno de los eslabones hace la función de una rodilla y permite que oscile para generar pasos. El ciclo comienza con los pies asentados en el terreno. Luego, la barra con la rótula oscila hasta que ambas queden alineadas como en el principio. Finalmente, se pone rígida, emulando un solo eslabón, para realizar un movimiento de compás y después, repetir el ciclo.

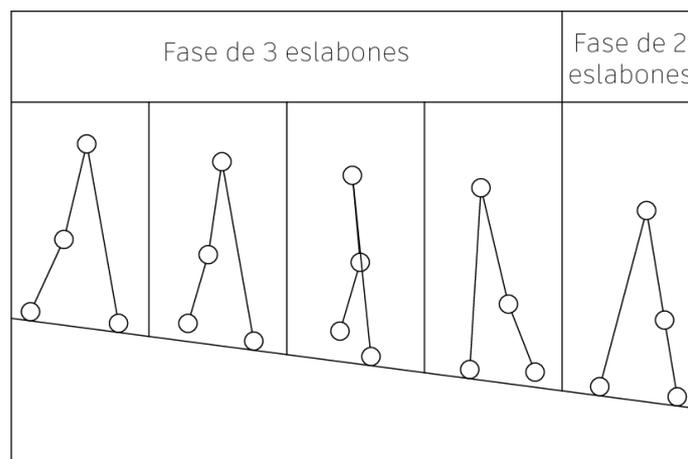


Figura 1.2. Relación del ciclo de caminata bípeda con péndulo invertido.

De tal manera que el problema del PDI, se podría extrapolar a cualquier otro sistema donde se busca garantizar que un cuerpo alcance un estado deseado, mediante la interacción dinámica de sus componentes. Precisamente por esto, la investigación y el desarrollo de algoritmos de control de estabilidad para estos sistemas, tienen un impacto significativo en el progreso tecnológico e industrial, y a su vez, fomentan la innovación.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Construir un prototipo del mecanismo de péndulo invertido doble mediante un controlador digital que regule su estabilidad frente a perturbaciones, con el fin de analizar su comportamiento dinámico.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar un sistema de control utilizando las herramientas de MATLAB y SIMULINK para implementar estrategias de control avanzadas que aseguren la estabilidad del péndulo.
2. Desarrollar y construir un prototipo funcional de péndulo invertido doble, implementando los componentes necesarios para su control y estabilidad, para evaluar el diseño propuesto.
3. Realizar pruebas experimentales del péndulo invertido doble utilizando el prototipo construido, para analizar su comportamiento bajo distintos escenarios de perturbación y validar la efectividad del sistema de control implementado.

1.4 Marco Teórico

1.4.1 Retroalimentación de un sistema de control

Una planta es un conjunto de componentes que interactúan entre sí, con el fin de realizar un objetivo determinado. La planta recibe una señal de entrada, $u(t)$, y emite una señal de salida, $y(t)$. No obstante, cuando está en presencia de perturbaciones, $z(t)$, se interrumpe el estado deseado del sistema, haciendo que sea necesario cuantificarla mediante sensores, con una variable de medida, $y_m(t)$. Posteriormente, se compara con la entrada y repercute en una señal de regulación, $v_c(t)$, que corrija la salida con un actuador, $v_a(t)$, y a su vez, disminuya el error, $e(t)$, del proceso.

Todo este proceso se lo puede evidenciar en el diagrama de bloques de lazo cerrado presentado en la Figura 1.3, precisamente, el principio fundamental de un sistema de control de estabilización es la retroalimentación.

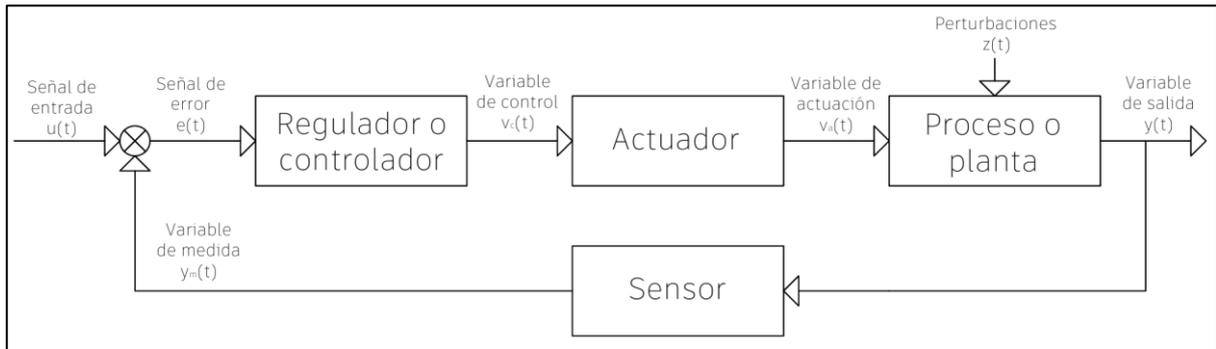


Figura 1.3. Sistema de control de lazo cerrado.

Según comenta, (Abhishek, 2024), en sistemas dinámicos complejos, como es el caso del PDI, se integran los controles de posición, velocidad y aceleración para poder tener un desplazamiento preciso y eficiente. El control de posición hace que un componente llegue a la ubicación correcta, la velocidad regula el ritmo del movimiento y el control de aceleración, provoca transiciones suaves en el cambio de velocidades.

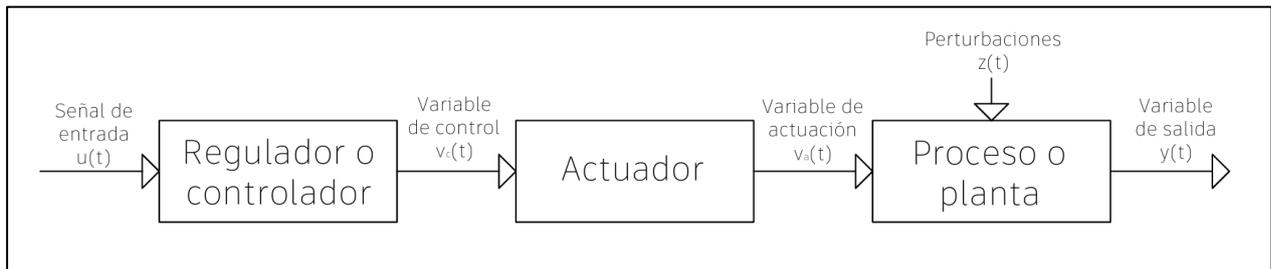


Figura 1.4. Sistema de control de lazo abierto.

Por otro lado, el sistema que se presenta en la Figura 1.4, se presenta un diagrama de bloques de lazo abierto, es decir, no tiene retroalimentación, por lo tanto, no hay componente que midan la salida del sistema, $y(t)$, cabe destacar que, antes la presencia de perturbaciones de gran magnitud, $z(t)$, el sistema nunca alcanzará su estado deseado.

1.4.2 Algoritmo Software in Loop (SiL) y Hardware in Loop (HiL)

El SiL y el HiL son pruebas avanzadas para validar códigos en sistemas de estabilización durante el desarrollo de proyectos. El SiL se implementa en etapas tempranas, prueba el sistema en un entorno virtual, mediante la simulación de entradas y salidas de la planta a través de su modelo matemático, para luego implementar el sistema de control y validarlo; tal como se muestra en la Figura 1.5, uno de los softwares más utilizados es Matlab, a pesar de que también existen otros, como SciLab o Modelica. De acuerdo con

(Quiroz, 2020) una de las ventajas de este algoritmo es que no necesita de ningún prototipo físico para ser implementado, permite anticipar errores en la experimentación y hace que el código sea más eficiente.

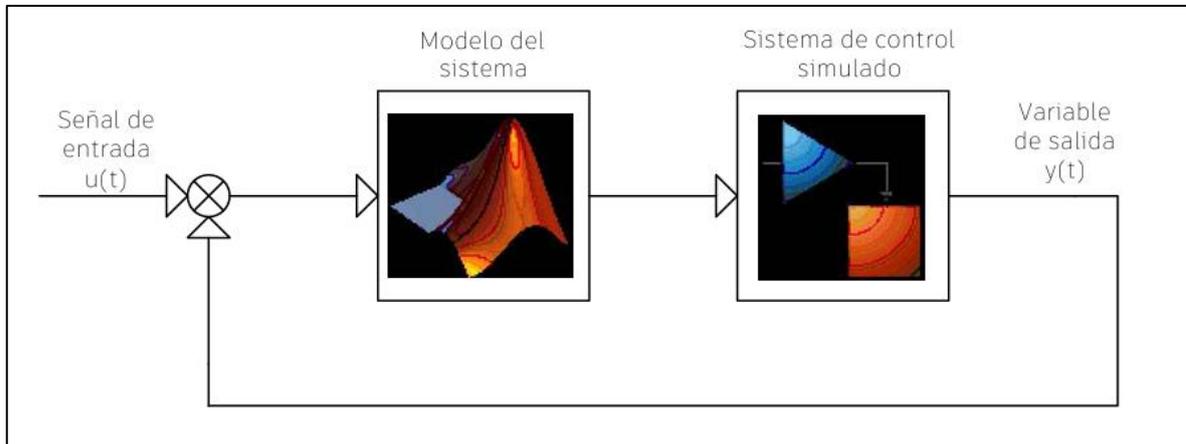


Figura 1.5. Diagrama de bloques de Software in Loop (SiL)

Por el contrario, el HiL se lo implementa en etapas intermedias. En este punto, las ecuaciones del sistema son integradas a los componentes y controles físicos. Esto mejora la calidad de las pruebas al momento de validar el código. Para este algoritmo, la planta física necesita una tarjeta de adquisición de datos para recibir y enviar la señal eléctrica que va a ser retroalimentada en el sistema para tener la respuesta deseada. Tal como se observa en la Figura 1.6. la tarjeta de adquisición de datos que se usa comúnmente para implementar la comunicación es Arduino; según (Palanisamy, 2022) esta es recomendada para proyectos de pequeño alcance, no obstante, para proyectos de naturaleza industrial, un PLC o un microcontrolador más robusto es lo ideal.

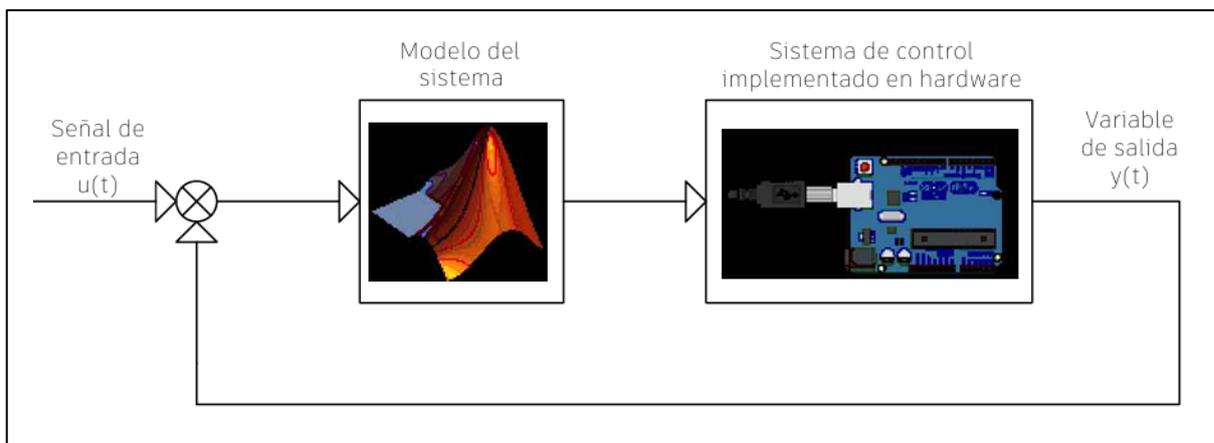


Figura 1.6. Diagrama de bloques de Hardware in Loop (HiL)

1.4.3 Modelos matemáticos.

El modelo matemático de un sistema dinámico, son las ecuaciones eléctricas y mecánicas que describen su comportamiento con precisión y sirven para realizar predicciones cuando el sistema se encuentre en una circunstancia en particular. Es necesario tener en cuenta que, un modelo matemático NO es único para un sistema, sino que depende en gran medida del enfoque y la perspectiva que el usuario ponga sobre la planta.

De acuerdo con (Guevara, 2016), a veces es más conveniente usar un cierto modelo matemático en lugar de otros; por ejemplo, para sistemas de respuesta transitoria, donde sólo hay una entrada, y una salida que no varían en el tiempo, lo más recomendado es usar una función de transferencia (FT). En este caso, si el sistema es estable, la respuesta del sistema tiende a cero, cuando el tiempo tiende a infinito. Por otro lado, para problemas como el PDI, donde las entradas y las salidas evolucionan a través del tiempo, lo recomendado es usar ecuaciones en espacios de estado.

1.4.4 Ecuación de Lagrange para describir espacios de estado.

Las ecuaciones de Lagrange son utilizadas para describir la trayectoria dinámica de un sistema como el PDI. Principalmente por sus múltiples grados de libertad, ya que este análisis matemático, logra simplificarlo mediante un balance de energía cinética y potencial. Este análisis se lo denomina Lagrangiano y se lo representa en la (Ec. 1.1). Según comenta (Gaona & Niño, 2022), utilizar las leyes de mecánica clásica de Newton para describir sistemas dinámicos complejos sería computacionalmente poco eficiente. Esto es debido a alto número de variables y ecuaciones complejas que involucraría.

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (1.1)$$

En esta ecuación, L es el Lagrangiano, T es la energía cinética y V es la energía potencial. Mientras que las variables independientes son: q , que son las coordenadas generalizadas; \dot{q} , son las velocidades generalizadas y t , que es el tiempo. De tal modo que, usando coordenadas generalizadas se facilita el análisis dinámico ya que se adaptan a las restricciones del sistema y reducen las variables; en comparación a que si se usan las coordenadas cartesianas (x, y, z)

Sin embargo, es necesario tener en cuenta que todo nace del principio de mínima acción, que describe a todas las posibles trayectorias que un sistema puede tomar al moverse o desplazarse de un punto a otro y se describe mediante la (Ec. 1.2), también es conocida como la función de disipación del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Donde las variables son las mismas que las de ecuación de energía de Lagrange, sin embargo, el sufijo “i” tiene el siguiente rango: $(1 \geq i \geq n)$ donde, n , son los grados de libertad que tiene el sistema.

1.4.5 Espacios de estado.

El espacio de estado permite relacionar las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado interno mediante ecuaciones diferenciales linealizadas de orden n . De tal manera que, las variables de estado interno representan de forma compacta el comportamiento pasado que ha tenido el sistema. Sin embargo, a medida que aumenta el tiempo de respuesta, el vector tiene una transición que le permite conocer su comportamiento futuro; dando lugar así, a un espacio de estado que tiene “ n ” dimensiones, de acuerdo con las “ n ” variables de estado que lo conforman.

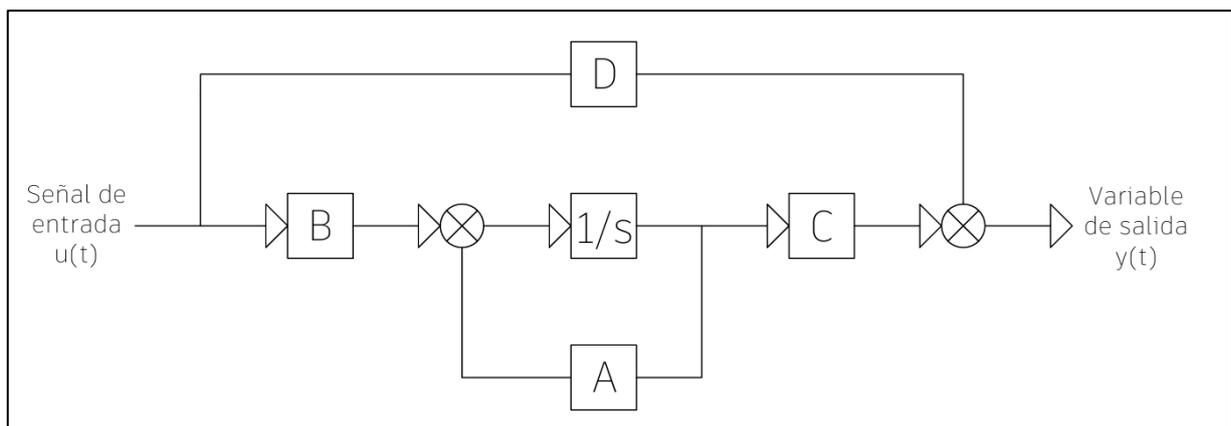


Figura 1.7. Diagrama de bloques de espacios de estado

El diagrama de bloques de la Figura 1.7 se representa un modelo de espacio de estado, y sus ecuaciones correspondientes se presentan en la (Ec. 1.3) y en la (Ec. 1.4).

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1.4)$$

En este sistema de ecuaciones: $x(t)$ es el vector de estados; $A(t)$ es la matriz de estados; $B(t)$ es la matriz de entrada; $u(t)$ es el vector de entradas; $y(t)$ es el vector de salida; $C(t)$ es la matriz de salida; $D(t)$ es la matriz de transmisión directa. Con estas variables se tiene el comportamiento dinámico del sistema y puede traducirse en la trayectoria que sigue el PDI, a través del espacio, en un determinado periodo de tiempo.

1.4.6 Actuadores mecánicos.

Un actuador mecánico, es el componente de la planta que se encarga de convertir la energía eléctrica, en un par mecánico. Este par es transferido a una carga puntual, provocando que cambie su velocidad y su posición. Es decir que, el control de posición y velocidad de la carga se logra mediante el accionamiento directo del actuador mecánico. Por lo tanto, es indispensable conocer las características del sistema equivalente para poder realizar de forma correcta el modelo matemático de toda la planta.

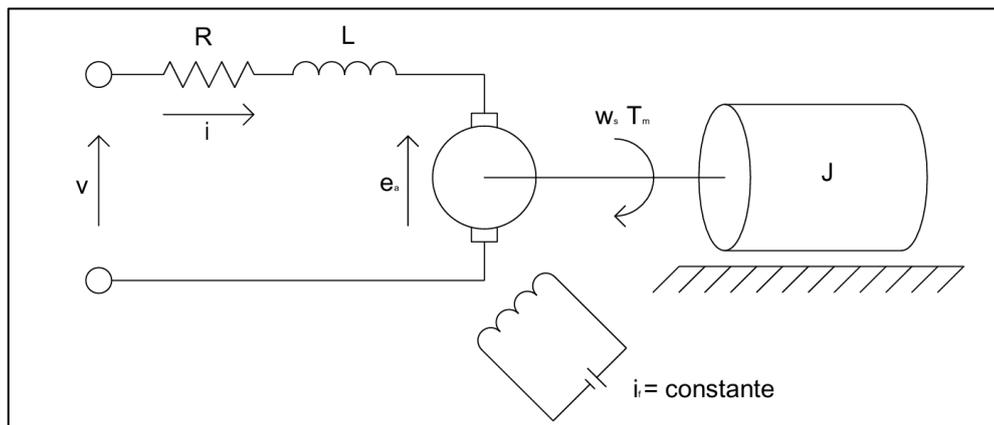


Figura 1.8. Diagrama de actuador mecánico de corriente directa.

Tal como se observa en la Figura 1.8. El sistema tiene componente mecánicos y eléctricos. Un voltaje, $v(t)$, se suministra al circuito, con una corriente, $i(t)$, pasa por una resistencia, R , y una inductancia, L , que almacena la energía magnética. Esto genera una fuerza electromotriz inducida, que es proporcional al producto de la velocidad angular, $\omega_s(t)$, por el par mecánico, $T(m)$, que provoca un movimiento rotatorio en el eje, con un momento de inercia, J .

1.4.7 Sensores

Un sensor es un componente intermediario del sistema, es decir, lee la variable física de interés dentro de la planta y entrega una salida manipulable para el control del actuador.

De acuerdo con (Corona, Abarca, & Mares, 2014), se puede distinguir a un sensor de otro debido a sus características dinámicas y estáticas. En la Tabla 1.1, se puede observar cómo se clasifican:

Tabla 1.1. Características estáticas y dinámicas del sensor

Características dinámicas		Características estáticas	
Tiempo de respuestas:	Periodo transcurrido desde que la magnitud sensada cambia y el sensor lo detecta	Sensitividad:	La entrada mínima que requiere el sistema para que genere una salida
		Rango:	El intervalo entre el valor mínimo y máximo detectable
Histéresis:	Capacidad para seguir la curva de salida ideal a la tendencia de los cambios de variable física	Precisión:	Grado de repetitividad de una medida
		Exactitud:	La diferencia entre la salida del sensor y el valor real
Linealidad dinámica:	Capacidad para seguir la curva de salida cuando la magnitud física, representa cambios repentinos	Linealidad estática	Desviación que representa el sensor entre la curva proporcionada y la salida actual
		Resolución	El cambio más pequeño de la magnitud física que es posible registrar

De tal manera que las características estáticas se refieren a aquellas que no cambian en función del tiempo, o también, a la reacción que tiene el sensor en condiciones de trabajo estable. Por el contrario, las características dinámicas, describen al sensor en situaciones cambiantes, en función del tiempo. Cabe destacar que, el sensor, una vez captada la señal, envía la señal a un dispositivo programable que ejecutará el actuador. En el caso del PDI, se utilizan sensores para obtener lecturas precisas de las condiciones de la planta, principalmente los ángulos de los eslabones y la posición del carro móvil.

CAPÍTULO 2

2. METODOLOGÍA

La metodología para llevar a cabo el proyecto ha sido diseñada para integrar la parte de la simulación, con la parte de la implementación del PDI, como se ilustra en la Figura 2.1.

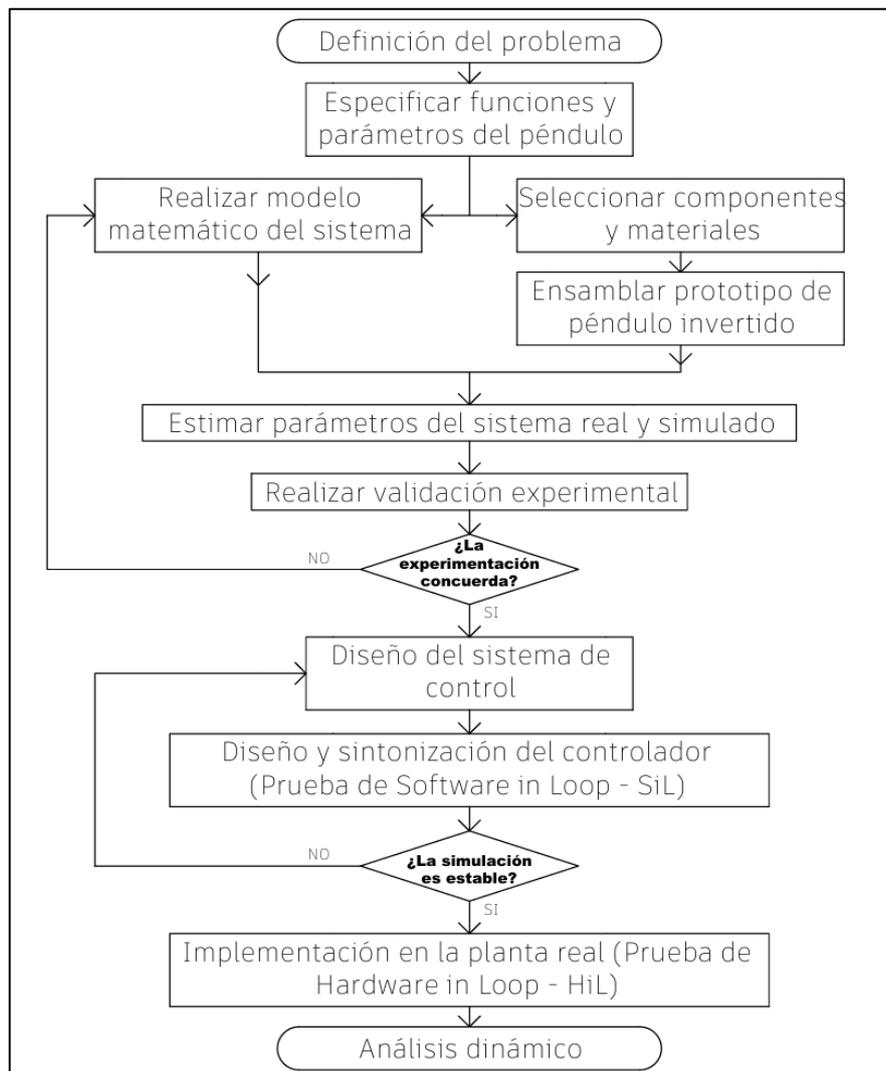


Figura 2.1 Diagrama de flujo de metodología.

En primeras instancias, con la especificación de las funciones y parámetros del péndulo, se estipuló los resultados esperados del péndulo. Posteriormente, se llevó a cabo la construcción del sistema físico mediante la selección de sus componentes y materiales. A su vez, se desarrolló la descripción matemática del PDI, el cual inmiscuye el modelo del sistema carro – péndulo inferior – péndulo superior y el subsistema del motor. Con el

modelo matemático y la planta construida en físico, se realizó una estimación de parámetros que posteriormente se validaron mediante una experimentación, con el fin de asegurar que el modelo sea lo más cercano posible a la realidad.

Después, comienza la etapa de diseñar el sistema de control, donde se evidenció las entradas, salidas y controlador(es) del sistema para garantizar su estabilidad. A continuación, se realizó la sintonización del controlador, para optimizar su comportamiento. Finalmente, se hizo la implementación en la planta real para evaluar su rendimiento y realizar el análisis dinámico, comparando la simulación con la realidad.

2.1 Selección de componentes eléctricos y mecánicos

El diseño del péndulo inmiscuye componentes eléctricos y mecánicos que definieron la configuración de su estructura, su funcionabilidad y diseño. A continuación, se enlistan los componentes que conforman el sistema, además de las razones principales de su elección. Todos los planos pertinentes se encuentran en el Apéndice A.

2.1.1 Riel de movimiento

El riel es el componente en el cual se va a mover el carro, se escogió el perfil OB2020 – V Slot, debido a su disponibilidad en el mercado ecuatoriano. Además de que es comúnmente usado en aplicaciones que requieren movimientos lineales precisos, como impresoras 3D y máquinas CNC. De acuerdo con el distribuidor (Rambal, 2024), permite el montaje de ruedas, sin ranurarse ni torcerse, haciendo que las líneas de desplazamiento sean más limpias, esto se puede observar en la Figura 2.2. Cabe destacar que está fabricado de aluminio negro anodizado, es decir, es robusto ante cargas pesadas, ya que tiene una resistencia de 1300 lb/in².

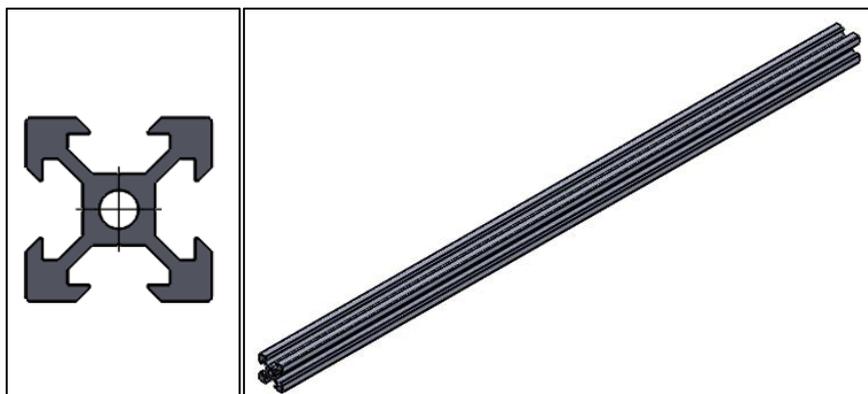


Figura 2.2. OB2020 – V SLOT

2.1.2 Carro móvil

Se escogió una placa deslizante por su disponibilidad, y especialmente, por su compatibilidad con el perfil OB2020 – V Slot, que se mencionó anteriormente. De acuerdo con el distribuidor (Rambal, 2024), su material es de aluminio 6061 – T5, con una resistencia a la tracción de 190 MPa y sus ruedas están hechas de Delrin, un termoplástico de alta calidad, que presenta buena resistencia a esfuerzos mecánicos. Tal como se puede observar en la Figura 2.3, este carro tiene la particularidad de tener 2 ranuras en los extremos, por los cuales se puede colocar una correa dentada de hasta 10mm.

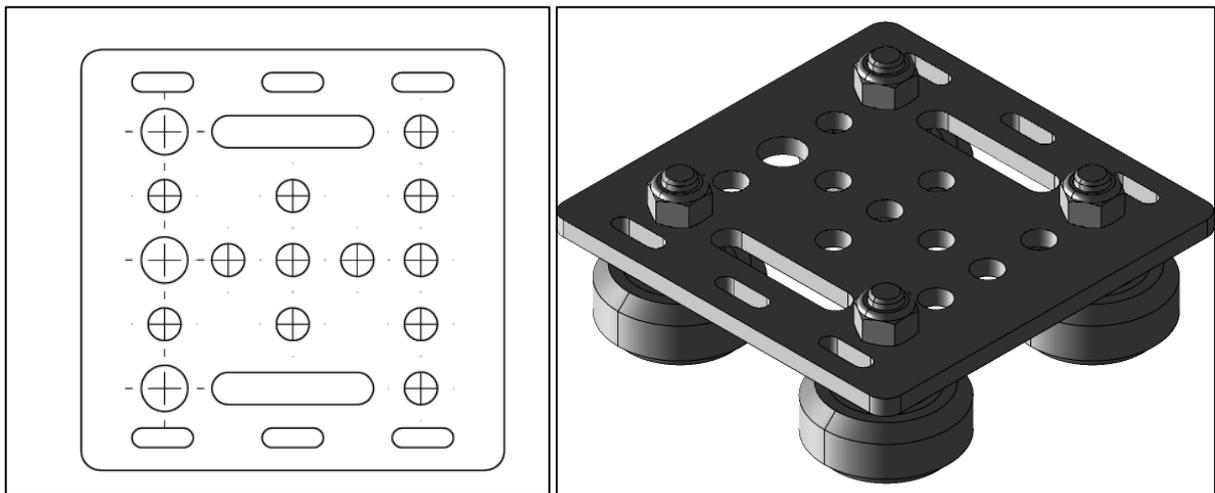


Figura 2.3. Carro – placa deslizante

2.1.3 Tarjeta de adquisición de datos

Para la selección de este componente se tuvo en cuenta que el ambiente de simulación y control será Simulink y Matlab. Se escogió la tarjeta Arduino MEGA 2560, (Figura 2.4) debido a su compatibilidad con el ambiente de programación.

Por otro lado, existen librerías como “Simulink Support Package for Arduino Hardware”; “Instrument Control Toolbox”; “Control System Toolbox”; etc, que permiten programar con más facilidad. Otro aspecto importante es que el Arduino MEGA 2560 cuenta con 54 pines; 15 de ellos son para salidas PWM, 4 salidas de tipo UART y un oscilador 16 MHz (ARDUINO, 2024). La distribución de los pines se encuentra en el Apéndice D del presente informe.

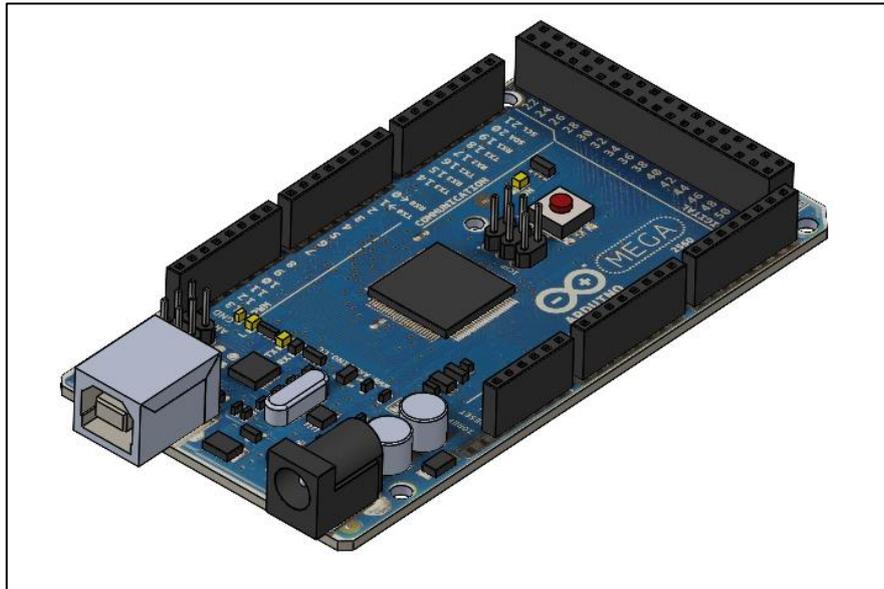


Figura 2.4. Arduino MEGA 2560.

2.1.4 Sensores de posición

Existe una amplia gama de tipos de sensores de posición utilizados en la industria, no obstante, se redujo a 3 opciones que permitan la adquisición de datos fiables, tanto de la posición angular de los eslabones, como de la posición lineal del carro. Estas son: potenciómetros, sensores ópticos incrementales, y sensores magnéticos.

- Los potenciómetros son los más comunes, consiste en una perilla que gira alrededor de una pista resistiva, el giro hace que se altere la tensión en sus terminales de salida, haciendo posible la lectura del desplazamiento.
- Los sensores ópticos incrementales, se denominan “encoders” y utilizan un fotodetector, que emite una señal de posición acorde a la variación de luz que recibe una rejilla en su interior.
- Los sensores magnéticos, utilizan el principio de efecto Hall para su funcionamiento, consiste en un sensor que detecta el cambio en el campo magnético, creado por un imán que se desplaza en su interior.

En la Tabla 2.1, se pueden observar las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

Tabla 2.1. Ventajas y desventajas de sensores de posición.

Sensor	Ventajas	Desventajas
Potenciómetro	<ul style="list-style-type: none"> • Económico • Diseño sencillo y ligero • Son comúnmente usados, es decir, fácil adquisición en el mercado 	<ul style="list-style-type: none"> • Se desgastan con mucha facilidad • Las vibraciones alteran su lectura • Alcanzan altas temperaturas en operaciones prolongadas
Sensor óptico	<ul style="list-style-type: none"> • Precisión y resolución de alta gama • Salida digital sin ruido • Alta velocidad de respuesta 	<ul style="list-style-type: none"> • Son de gran tamaño • La presencia de polvo puede afectar el sensor óptico
Sensor magnético	<ul style="list-style-type: none"> • Alta resistencia a impactos y choques severos • Diseño robusto 	<ul style="list-style-type: none"> • Alta histéresis • No puede estar cerca de materiales que emitan campos magnéticos considerables • Costoso

Los criterios seleccionados fueron los siguientes:

Tabla 2.2. Criterios de selección para sensores de posición

Criterio	Denominación	Significado
Lectura precisa	A	Es la capacidad de medir el valor requerido con exactitud, si el sensor presenta errores de histéresis, de linealidad, o errores de repetibilidad, entonces bajará su puntuación.
Costo	B	Es el precio del sensor en el mercado local, o en su defecto, el precio de importación, en caso de que el sensor no se encuentre con facilidad.
Sensibilidad de daños	C	Es la adaptabilidad que presente el sensor para trabajar ante condiciones anormales de temperatura, vibración, impactos inesperados, etc.
Facilidad de integración	D	Evalúa el diseño del sensor y su facilidad para integrarse dentro del sistema, es decir, la posición del cableado, su peso, etc.

A continuación, se presenta una tabla que enfrenta cada uno de los criterios entre ellos, con el fin de ponderarlos y ordenarlos de acuerdo con su importancia en el proyecto del

péndulo invertido doble. Este método se denomina comparación por pares, y sirve para la matriz de selección les dé más importancia a los criterios con más peso.

Tabla 2.3. Comparación por pares de criterios de selección de sensores

Comparación por pares			A	B	C	D
A	VS	B	X			
A	VS	C	X			
A	VS	D				X
B	VS	C		X		
B	VS	D				X
C	VS	D			X	
PUNTUACIÓN			2	1	1	3
PONDERACIÓN			0.33	0.17	0.17	0.33

La Tabla 2.3 indica que los criterios A y D, es decir, lectura precisa y facilidad de integración, tienen un mayor peso para decidir qué sensor usar, antes los criterios restantes, B y C: costo y sensibilidad de daños.

Finalmente, para elegir el sensor que se usó en el proyecto, se dispone de la matriz de decisión en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4. Matriz de decisión para la selección del sensor de posición.

Criterio	%	Potenciómetro		Sensor óptico		Sensor magnético	
		Nota	Puntaje	Nota	Puntaje	Nota	Puntaje
Lectura precisa	33	2	0.66	5	1.65	4	1.32
Costo	17	5	0.85	3	0.51	2	0.34
Sensibilidad a daños	17	2	0.34	4	0.68	5	0.85
Facilidad de integración	33	5	1.65	4	1.32	2	0.66
Total	100	14	3.5	16	4.16	13	3.17

Tal como se puede observar en la Tabla 2.4, la opción ganadora es el sensor óptico incremental, para la construcción del prototipo, específicamente se usó el modelo E6B2 – CW2E (Figura 2.5) con resolución de 1000 P/R. Cabe destacar que, el modelo E6B2 – CW2E, tiene una salida de 3 voltios aproximadamente, lo cual significa que es compatible

con el Arduino MEGA 2560. Se puede observar su Datasheet con la información más relevante en el Apéndice C.

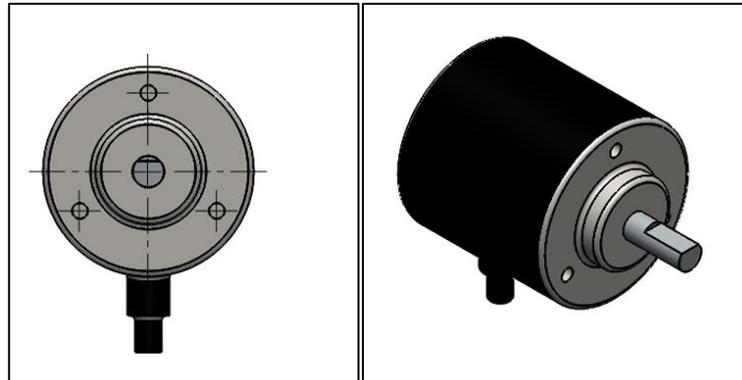


Figura 2.5. Sensor E6B2 – CW2E

2.1.5 Eslabón

El péndulo se realizó con una placa de acrílico de espesor 9mm del cual se tenía disponibilidad un retazo de (360 x 360) mm. Ambos eslabones tienen el mismo diseño realizado en Solidworks, tal como se observa en la Figura 2.6, cabe destacar que se realizó agujeros de 8 mm en la parte superior, esto con el fin de unir tonillos de sujeción entre el eslabón y el encoder E6B2 – CW2E. El diseño se maquinó mediante corte láser

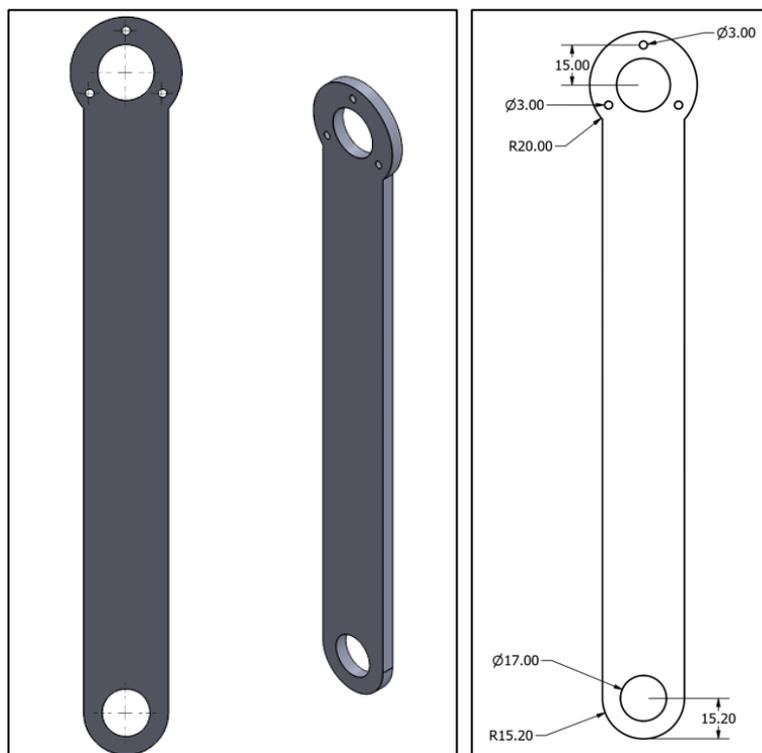


Figura 2.6. Eslabón de acrílico para el péndulo doble invertido

2.1.6 Bases y soportes

De igual manera, para aprovechar la disponibilidad del acrílico a nuestra disposición, se diseñó las placas que iban a sostener los eslabones encima del carro y también, los encoders; uno en cada eslabón y uno más en el extremo del riel, que sirvió para medir la posición lineal. El espesor de 9 mm que tenía sirvió para poder fijarlos a una superficie plana y darle estabilidad al péndulo invertido doble. El proceso de manufactura consistió en corte láser, en las siguientes figuras, se presenta una vista frontal de todas las bases y soportes que se usaron.

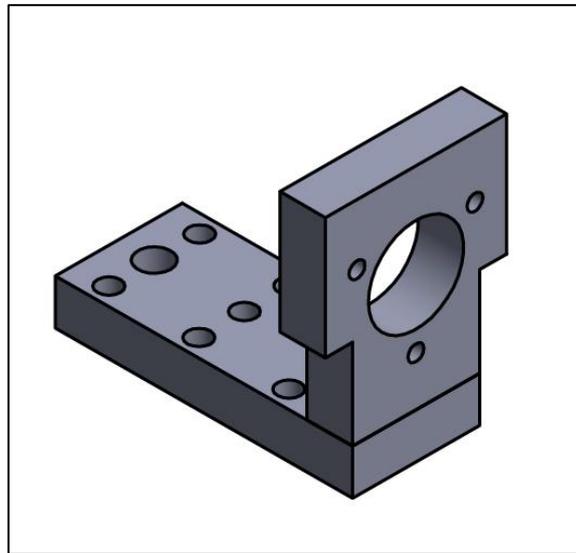


Figura 2.7. Base que sostiene los eslabones en el carro

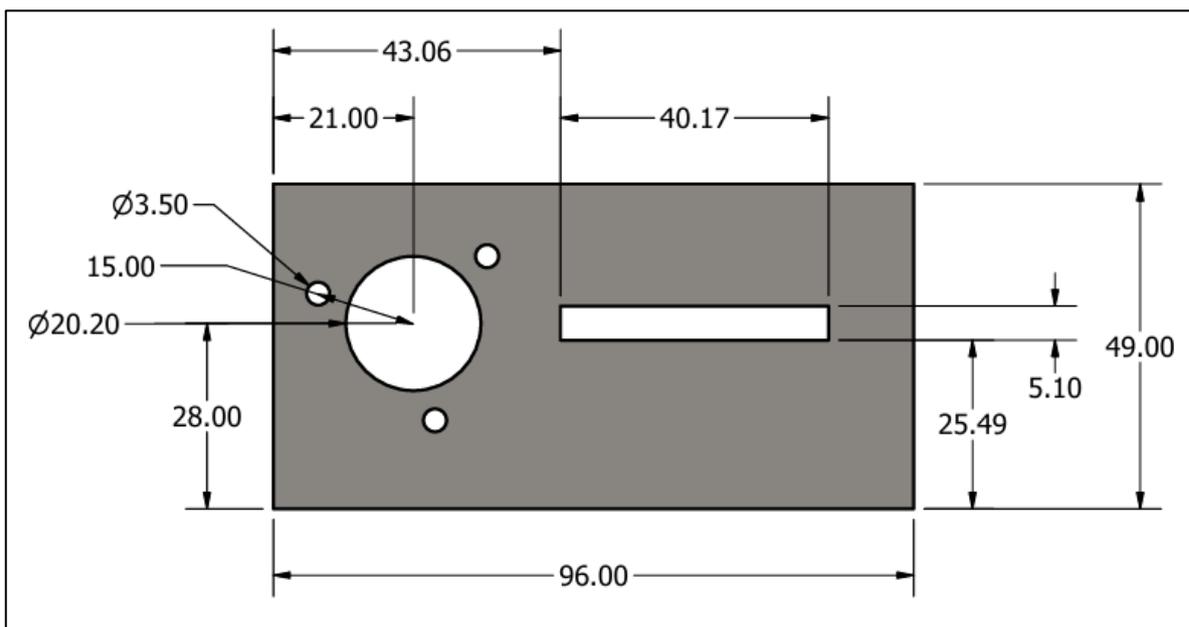


Figura 2.8. Base que sostiene el encoder

2.1.7 Motor actuador

Para la selección de este componente, se tuvo en cuenta la masa de todo el sistema que se iba a mover; es decir, carro – eslabón inferior – eslabón superior, esto también incluye todas las uniones y todos los soportes necesarios que tiene cada componente. Además de la geometría de la rueda del carro. Esto es para calcular el torque mínimo para que el carro salga de su estado de reposo, venciendo las fuerzas de fricción.

El diseño del péndulo es simétrico, es decir, el peso está proporcionalmente distribuido en las 4 ruedas del carro móvil. El torque mínimo se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\tau_{min} = f_r * r = (\mu_s * N) * r \quad (2.1)$$

Donde, μ_s , es el coeficiente de fricción estática entre el caucho de la rueda del auto y el aluminio, N , es el valor de la normal, que es $\frac{1}{4}$ del peso total, y finalmente, r , es el radio de las ruedas del auto.

No obstante, para que el péndulo pueda estar preparado para futuras expansiones (péndulo triple invertido), se seleccionó un motor con un mayor torque del necesario. Para esto, se usó un motor reductor JGB37 – 520 DC 12V (Figura 2.9). De acuerdo con el distribuidor, (NovatronicEc, 2020), este modelo es ideal para la construcción de robots, tiene una velocidad nominal de 960 RPM, con un torque aproximado de 0.3 kg*cm debido a su reducción de 6.25. Para más información referencial de su velocidad, dirigirse al apéndice B.

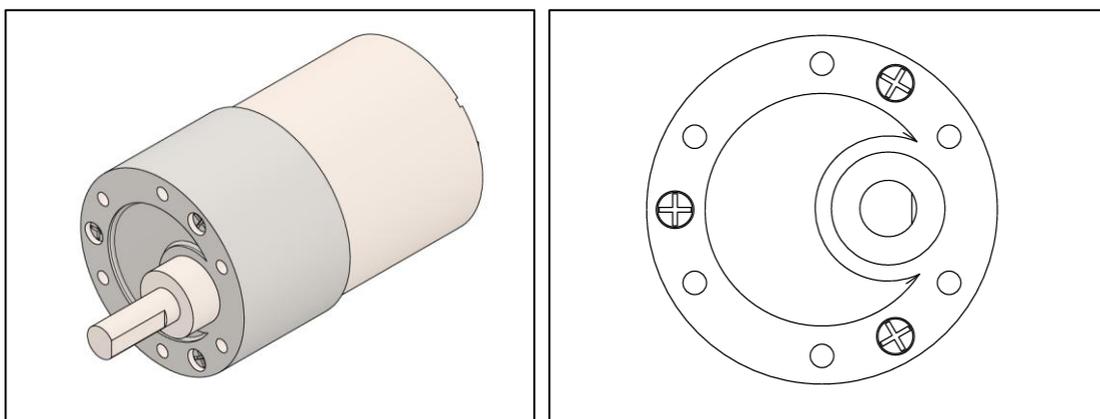


Figura 2.9. Motor JGB37 - 520

2.1.8 Driver controlador y fuente de alimentación

Para poder modificar la velocidad y la dirección del motor se usó un puente H; el modelo escogido depende de la corriente y voltaje suministrado por la fuente. Para la fuente, se

disponía de una fuente de modelo EPS12W0 – 16, con una entrada AC (100 – 240 V ~ 0.5A) y una salida DC (15 V ~ 3A). La cual estaba dentro del rango de operación del motor (9V – 40V), por lo tanto, se escogió un Driver que soporte las condiciones anteriormente mencionadas. En esta ocasión, se optó por un IBT2 – 43A; su información de referencia está en el Apéndice E.

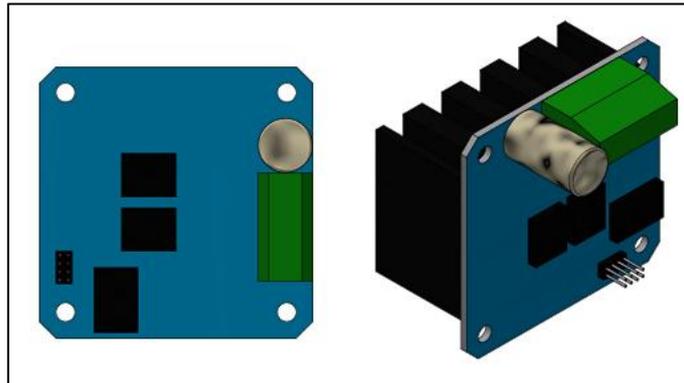


Figura 2.10. Puente H, IBT2 – 43A

2.1.9 Polea y correa dentada

La polea que va sujeta al eje del motor y al eje del encoder; todos estos elementos tenían un diámetro de 6.50 mm, por lo tanto, se seleccionó una polea dentada de diámetro 6.35 mm, que se ajusta con el eje mediante un tornillo prisionero Allen M3. Por cuestión de disponibilidad, se seleccionó una de 20 dientes, con código GT2 – W6 – 20T – 6.35mm, y una correa dentada de longitud 2.3 metros que se fijó al carro móvil mediante sus ranuras laterales y una brida. De acuerdo con el fabricante (Naylamp, 2024), está fabricada de aluminio, es comúnmente utilizada en sistemas de impresión 3D.

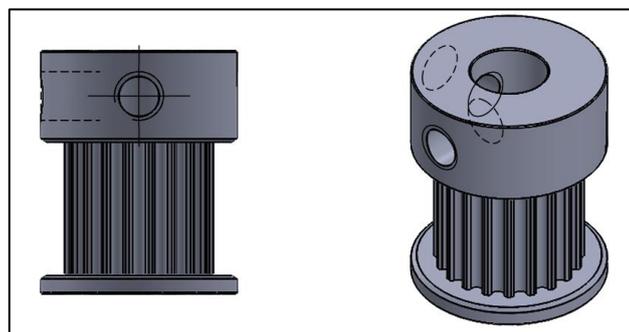


Figura 2.11 Polea GT2 – W6 – 20T – 6.35mm

2.2 Ensamble del prototipo.

El diseño final del sistema se muestra en la Figura 2.12, está ensamblado en base a los componentes que se mencionaron en el apartado anterior. El riel es la base del péndulo, se fijó sobre una superficie horizontal para que el sistema tenga estabilidad estructural. En el extremo derecho se encuentra el motor con su respectiva base, fijado al riel, y en el extremo izquierdo se fijó el encoder de la misma manera. Tanto el motor como el encoder tienen una polea GT2 acoplada a sus ejes y están conectados mediante la banda dentada al carro móvil.

Sobre el móvil se encuentra la base para colocar los eslabones, cada uno con su respectivo encoder, que tiene una polea GT2 para simular una articulación rotacional. Este diseño permite que cada eslabón gire libremente.

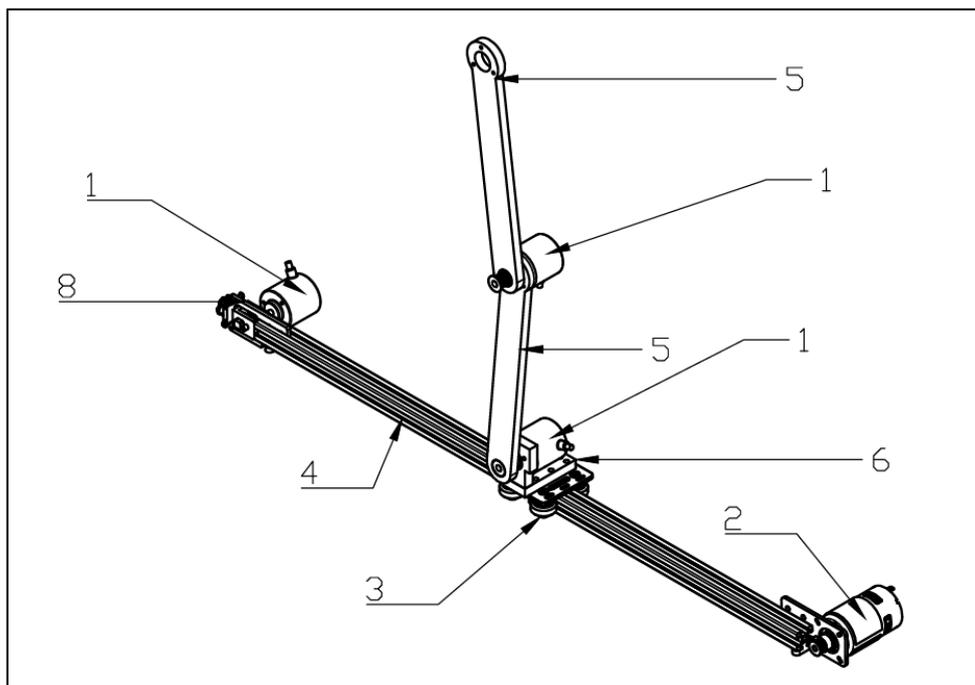


Figura 2.12. Ensamble del prototipo del PDI.

Los componentes se encuentran numerados y se detallan a continuación:

- Encoder incremental E6B2 – CWZ6C 1
- Motor JGB37 – 520 2
- Placa deslizante 3
- Riel de movimiento, perfil V SLOT 4
- Eslabón de acrílico con espesor de 9 mm 5
- Soporte de carro – encoder 6

- Soporte de motor 7
- Soporte de encoder que mide posición lineal 8

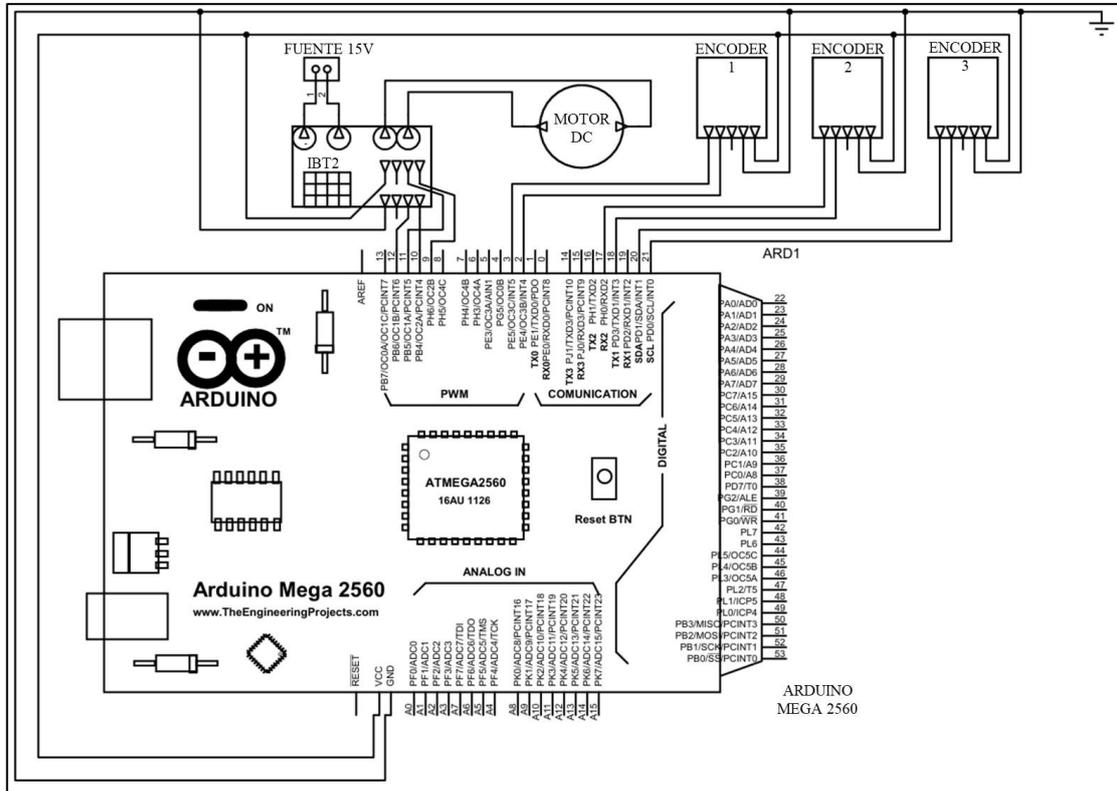


Figura 2.13. Diagrama de conexiones eléctricas.

En la Figura 2.13, se presenta el esquema de conexiones eléctricas, donde se conectó una fuente de 15 voltios al motor DC mediante el driver IBT2, usando las señales de PWM transmitidas por el Arduino MEGA 2560. Los encoders se conectaron a los pines interruptores del Arduino para medir la posición, con una tierra común para todo el sistema. El Arduino MEGA 2560, procesa la señal del sistema y genera la señal para el motor.

2.3 Modelo matemático del sistema

Para obtener el modelo matemático del sistema, se empezó por realizar las siguientes suposiciones:

- Todos los materiales y componentes del péndulo son cuerpos rígidos
- La correa GT2 no tiene cambios de longitud en su desplazamiento
- Las articulaciones del sistema son ideales, es decir, no presentan holgura ni tampoco fricción.

En la Figura 1.1. se presenta una imagen que contiene las fuerzas que intervienen en el sistema dinámico. La única entrada es una fuerza $u(t)$, que es ejercida por el motor, y hace que el carro se desplace a la derecha o a la izquierda, según lo requiera el sistema, para estabilizarse. Los términos del sistema se resumen en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5. Términos principales del sistema

Variable	Significado	Unidad
θ_0	Posición lineal del carro	Metros (m)
θ_1	Posición angular del eslabón inferior	Radianes (rad)
θ_2	Posición angular del eslabón superior	Radianes (rad)
L_1	Longitud del péndulo inferior	Metros (m)
L_2	Longitud del péndulo superior	Metros (m)
l_1	Longitud desde la base hasta el centro de masa del eslabón inferior	Metros (m)
l_2	Longitud desde la base hasta el centro de masa del eslabón superior	Metros (m)
I_1	Inercia del eslabón inferior	Kg * m ²
I_2	Inercia del eslabón superior	Kg * m ²
m_0	Masa del carro	Kilogramos (kg)
m_1	Masa del eslabón inferior	Kilogramos (kg)
m_2	Masa del eslabón superior	Kilogramos (kg)

En primeras instancias, se plantearon las ecuaciones de posición y velocidad de cada uno de los cuerpos (carro, eslabón inferior, eslabón superior), estas ecuaciones se muestran en la Tabla 2.6 y la Tabla 2.7 respectivamente.

Tabla 2.6. Ecuaciones de desplazamiento del sistema

Masa	Desplazamiento en x	Desplazamiento en y
Masa 0	$m_{0,x} = \theta_0$ (2.2)	$m_{0,y} = 0$ (2.3)
Masa 1	$m_{1,x} = \theta_0 + l_1 * \sin(\theta_1)$ (2.4)	$m_{1,y} = l_1 * \cos(\theta_1)$ (2.5)
Masa 2	$m_{1,x} = \theta_0 + L_1 * \sin(\theta_1) + l_2 * \sin(\theta_2)$ (2.6)	$m_{1,y} = L_1 * \cos(\theta_1) + l_2 * \cos(\theta_2)$ (2.7)

Tabla 2.7. Ecuaciones de velocidad del sistema.

Masa	Velocidad en x	Velocidad en y
Masa 0	$vm_{0,x} = \dot{\theta}_0$ (2.8)	$vm_{0,y} = 0$ (2.9)
Masa 1	$vm_{1,x} = \dot{\theta}_0 + l_1 * \dot{\theta}_1 * \cos(\theta_1)$ (2.10)	$vm_{1,y} = -l_1 * \dot{\theta}_1 * \sin(\theta_1)$ (2.11)
Masa 2	$vm_{2,x} = \dot{\theta}_0 + L_1 * \dot{\theta}_1 * \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)$ (2.12)	$vm_{2,y} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)$ (2.13)

Para luego describir su movimiento en función de su energía potencial y cinética. En la Tabla 2.8 se presentan las ecuaciones correspondientes.

Tabla 2.8. Ecuaciones de energía cinética y potencial

Masa	Ecuaciones de energía
Masa 0	$T_0 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{\theta}_0)^2$ (2.14)
	$U_0 = 0$ (2.15)
Masa 1	$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\theta}_0)^2 + 2 * \dot{\theta}_0 * l_1 * \dot{\theta}_1 + l_1^2 * (\dot{\theta}_1)^2$ (2.16)
	$U_1 = m_1 g * l_1 * \cos(\theta_1)$ (2.17)
Masa 2	$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{\theta}_0)^2 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_0 l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + 2\dot{\theta}_0 l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ (2.18)
	$U_2 = m_2 g * l_1 * \cos(\theta_1) + l_2 * \cos(\theta_2)$ (2.19)

Posteriormente, se obtuvo el Lagrangiano, es decir, la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de todo el sistema, tal como se muestra en las ecuaciones 2.20 y 2.21.

$$L = (T_0 + T_1 + T_2) - (U_0 + U_1 + U_2) \quad (2.20)$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (m_2 l_2^2 + I_2) + \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (m_1 l_1 \cos\theta_1 + m_2 L_1 \cos\theta_1) + \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 m_2 L_2 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 \quad (2.21)$$

El siguiente paso fue calcular la derivada parcial y la derivada con respecto al tiempo para cada masa y su velocidad, para tener el sistema de disipación de Rayleigh, este sistema de ecuaciones, (Ec. 2.22), toma en cuenta todos los elementos que causan disipación de energía en el péndulo.

$$(2.22) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_0} \right) L - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_0} \right) L + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_0} \right) D = U(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \right) L - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) L + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \right) D = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \right) L - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) L + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \right) D = 0 \end{cases}$$

Los resultados se presentan en la Tabla 2.9

Tabla 2.9. Ecuaciones para sistema de Rayleigh

Masa	Ecuaciones de energía
Masa 0	$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = \ddot{\theta}_0(m_0 + m_1 + m_2) + \dot{\theta}_1(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \dot{\theta}_2 m_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.23)$
	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) = \ddot{\theta}_0(m_0 + m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_1(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2(m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_1 \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 \sin \theta_2 \quad (2.24)$
	$\frac{\partial L}{\partial \theta_0} = 0 \quad (2.25)$
Masa 1	$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1(m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) + \dot{\theta}_0(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.26)$
	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1(m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) + \ddot{\theta}_0(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1(m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_1 \sin \theta_1) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.27)$
	$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = -\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1(m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_1 \sin \theta_1) + m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.28)$
Masa 2	$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{\theta}_2 m_2 l_2^2 + \dot{\theta}_0 m_2 l_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.29)$
	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \ddot{\theta}_2 m_2 l_2^2 + \ddot{\theta}_0 m_2 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.30)$
	$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = -\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \quad (2.31)$

Debido al alto número de términos, se han reorganizado las ecuaciones, con el siguiente sub – sistema de ecuaciones

$$(2.32) \quad \begin{cases} p_0 = m_0 + m_1 + m_2 \\ p_1 = m_1 l_1 + m_2 L_1 \\ p_2 = m_2 l_2 \\ p_3 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 \\ p_4 = m_2 L_1 l_2 \\ p_5 = m_2 l_2^2 + I_2 \end{cases}$$

Dando como resultante, el sistema de ecuaciones (Ec. 2.33)

$$(2.33) \quad \begin{cases} p_0 \ddot{\theta}_0 + p_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + p_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - p_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - p_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + c \dot{\theta}_0 = u(t) \\ p_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 + p_3 \ddot{\theta}_1 + p_4 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + p_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - p_1 g \sin \theta_1 + b \dot{\theta}_1 = 0 \\ p_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 + p_4 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + p_5 \ddot{\theta}_2 - p_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - p_2 g \sin \theta_2 + b \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

A partir de este punto, se deben de fijar las condiciones de equilibrio, para linealizar la ecuación alrededor de ese punto. Para este caso, se tomará como ángulo de referencia, la posición en donde el péndulo esté completamente vertical, es decir, $(\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ)$. El proceso de linealización se lo realizará con Series de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (2.34)$$

Con una expansión para una serie de primer grado ($n = 1$), la forma general de la serie de Taylor queda de la siguiente manera:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} * (x - a)^1 \quad (2.35)$$

Donde “a” es el punto alrededor del cual se linealizará la ecuación. Para esta situación, $x = \theta_1 = \theta_2$, al aplicar estas condiciones al sistema de ecuaciones (Ec. 2.33), se obtiene el siguiente sistema (Ec. 2.36):

$$(2.36) \quad \begin{cases} p_0 \ddot{\theta}_0 + p_1 \ddot{\theta}_1 + p_2 \ddot{\theta}_2 + c \dot{\theta}_0 = u(t) \\ p_1 \ddot{\theta}_0 + p_3 \ddot{\theta}_1 + p_4 \ddot{\theta}_2 + b \dot{\theta}_1 - p_1 g \theta_1 = 0 \\ \dot{\theta}_0 p_2 + \dot{\theta}_1 p_4 + p_5 \ddot{\theta}_2 + b \dot{\theta}_2 - p_3 g \theta_2 = 0 \end{cases}$$

2.4 Estimación de parámetros.

La estimación de parámetros es un proceso de iteración, que relaciona el modelo matemático con la experimentación real. Para este proceso se utilizó la herramienta de Simulink en la pestaña de “Simulink Design Optimization”, en la opción de “Parameter estimation” dentro de Matlab. Según comenta (Fruk, Vujisić, & Špoljarić, 2013), este proceso sirve para garantizar que un modelo de Simulink representa con precisión el sistema del mundo real que pretende simular.

2.4.1 Estimación de parámetros del actuador.

La primera experimentación consistió en introducir una señal de tipo PWM al motor sin carga, con el fin de que el eje gire, y posteriormente, registrar la respuesta de la velocidad. De esta manera, se podían estimar los parámetros del motor. El diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2.14, es el modelo que se usó para la simulación. El cual incluye la parte eléctrica y la parte mecánica. La señal PWM entra en la parte eléctrica, que determina la manera en la que la corriente cambia a través del tiempo; posteriormente, la constante de torque hace el cambio de energía eléctrica a mecánica, finalmente, la parte mecánica, modela el torque del motor considerando sus propiedades físicas.

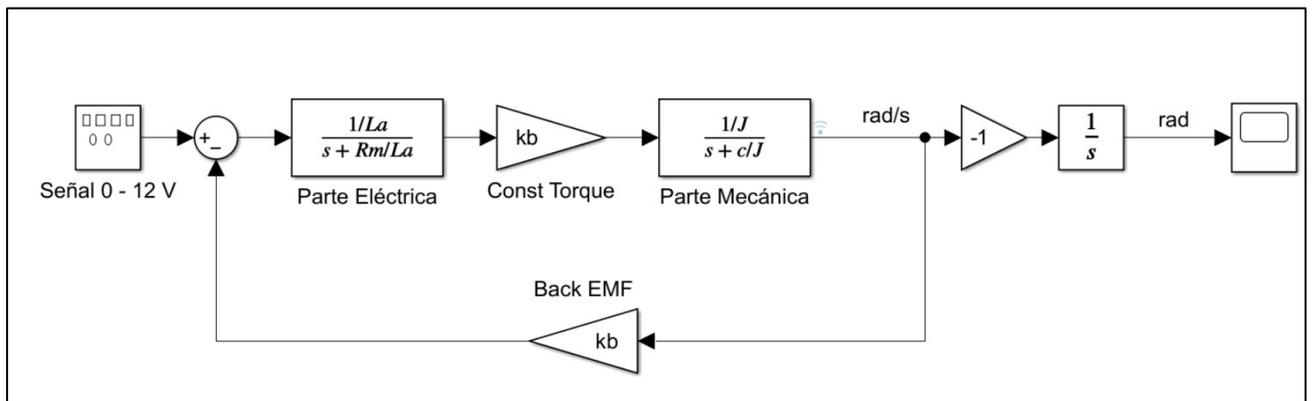


Figura 2.14. Diagrama de bloques para simulación de parámetros del motor.

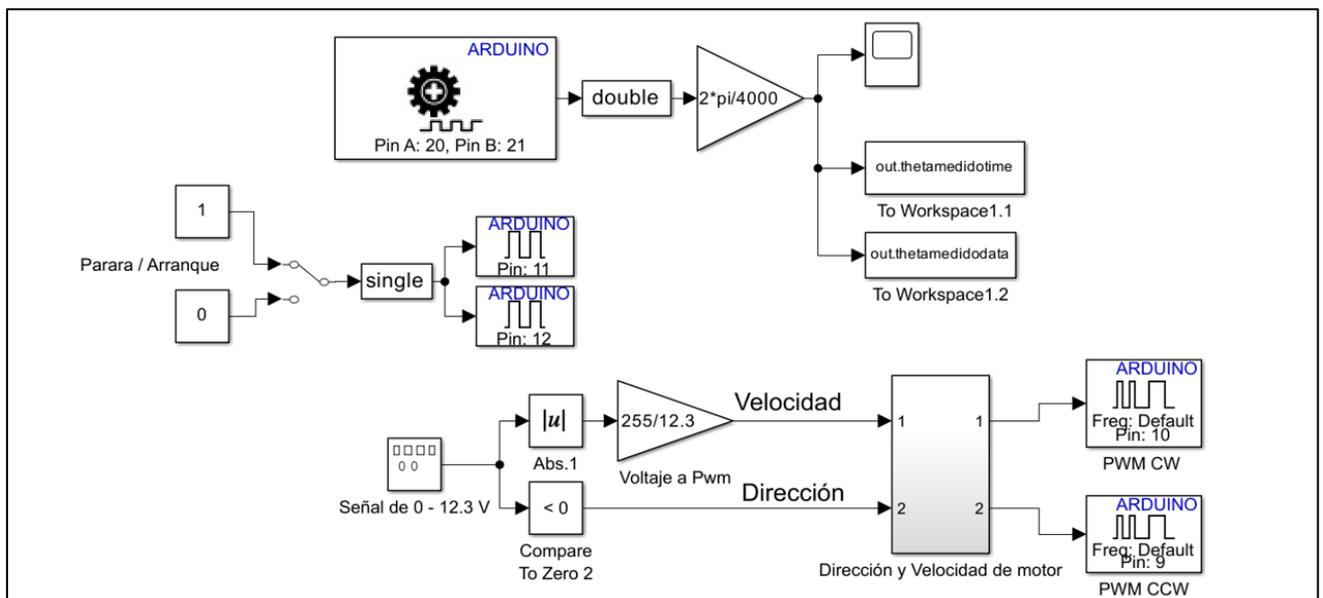


Figura 2.15. Diagrama de bloques para experimentación del motor.

Por otro lado, el diagrama de bloques presentado en la Figura 2.15, representa la experimentación realizada para registrar la dinámica del motor cuando se le aplica cierto voltaje. Un voltaje es aplicado al motor, ajustando la dirección y magnitud de la señal de PWM. El movimiento es transmitido a través de una banda y polea y a su vez, medido por encoder E6B2, para luego medir la posición angular del eje del motor.

2.4.2 Estimación de parámetros de la planta.

La experimentación de la planta consistió en aplicar una señal de PWM al motor con carga, en este caso, la carga era el eslabón en su posición inicial de 180° y los soportes, provocando que el eslabón oscile, y registrar su movimiento.

En la Figura 2.16, se muestra el diagrama de bloques que se usó para la simulación del experimento, donde la señal de voltaje entra a la planta y se realiza una conversión a fuerza para ser aplicada en el carro móvil. Posteriormente, el subsistema denominado “Modelo no lineal – péndulo invertido doble”, contiene las ecuaciones que se obtuvieron en el capítulo 2.2 y simula el comportamiento físico que tiene la planta, las salidas son las posiciones de cada uno de los componentes (carro – péndulo inferior – péndulo superior).

Para más detalles de la representación de las ecuaciones mediante diagramas de bloques, revisar el Apéndice F.

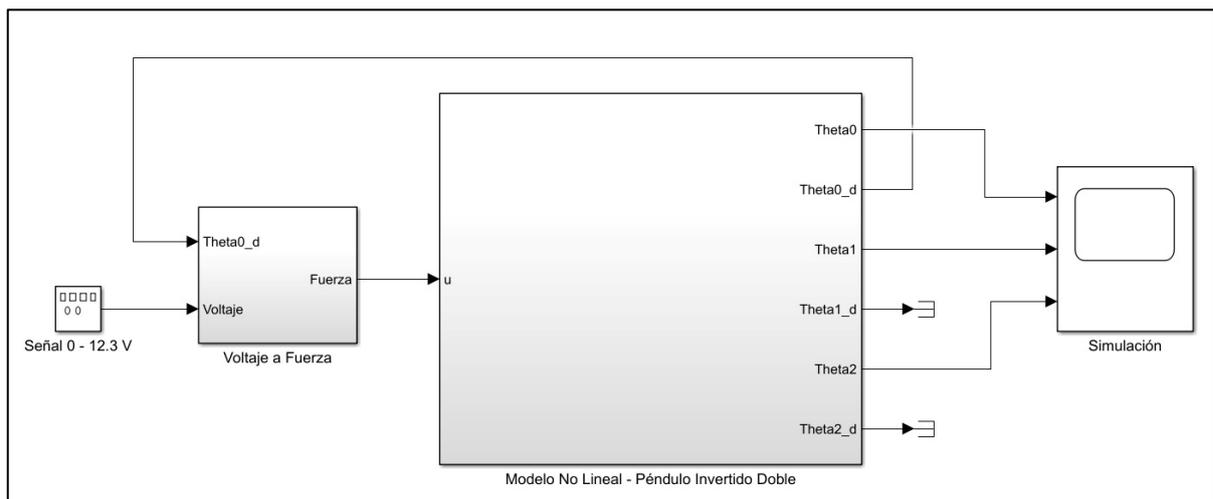


Figura 2.16. Diagrama de bloques para simulación de parámetros de la planta.

Para la experimentación de la realidad, se utilizó el diagrama de bloques de la Figura 2.17, donde se mide la posición de los componentes del sistema (Carro – eslabón inferior – eslabón superior) a través de los encoders que están conectados al Arduino y generan

pulsos proporcionales al movimiento. El sistema se habilita o deshabilita con los bloques de parada y arranque, esto es de gran importancia para detener el experimento en caso de emergencias.

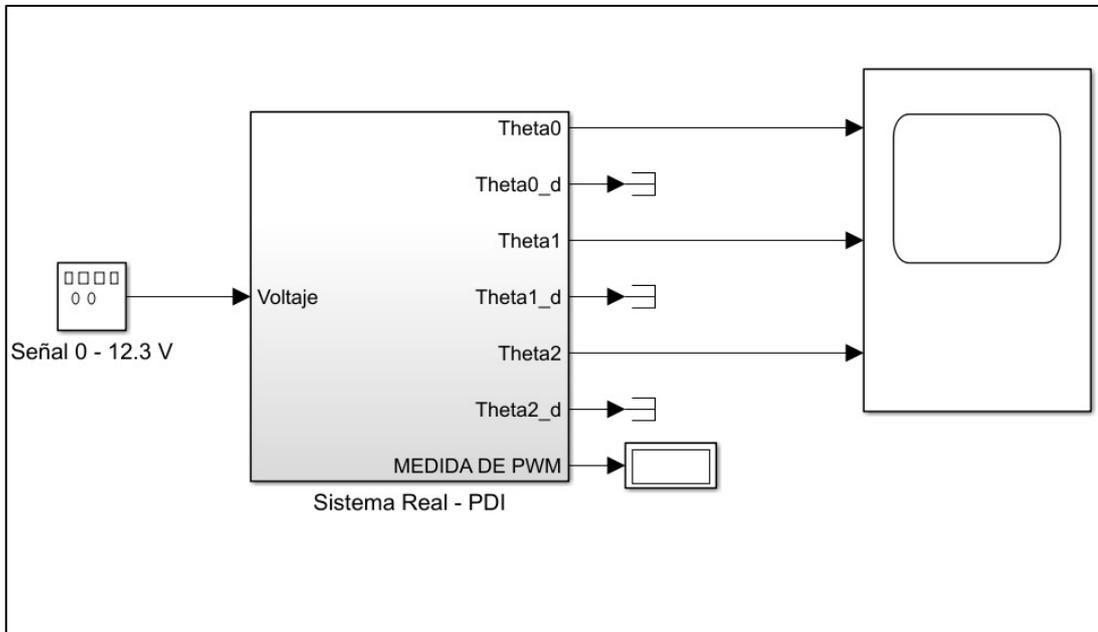


Figura 2.17. Diagrama de bloques para parámetros del mecanismo real.

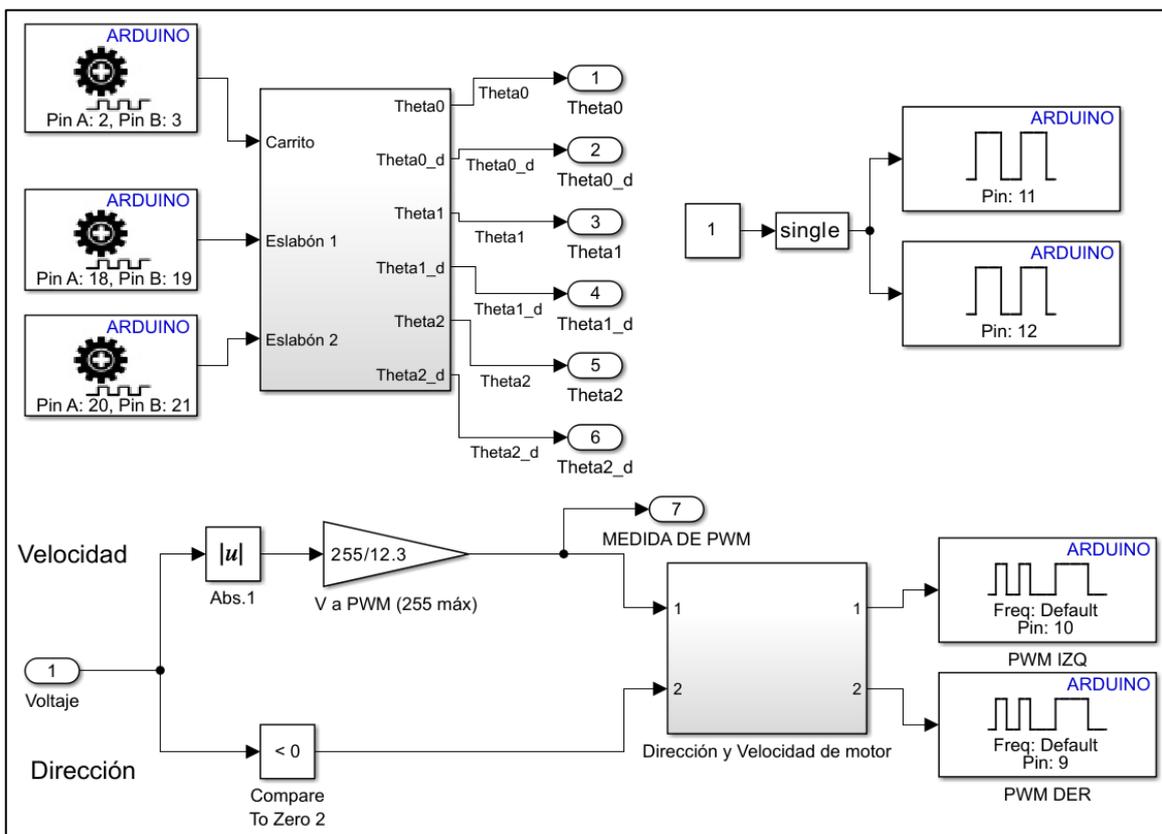


Figura 2.18. Subsistema de conexiones del sistema Real - PDI.

2.5 Selección de controlador

Un controlador es la parte de la planta que se encarga de comparar el valor real de la salida de la planta con los valores óptimos de funcionamiento. No obstante, existen distintas acciones de control para llevar a cabo la corrección. En este apartado se compararán 3 tipos de controladores que podrían ser aplicados en el péndulo invertido doble, los PID, LQR y los controladores difusos.

- Los controladores PID son los más comunes, tiene un componente proporcional, que corrige errores que suceden en el momento, el integral, que corrige errores pasados, y el componente derivativo, que predice errores futuros.
- Por otro lado, el LQR, según, (Niknezhadi, 2008), son usados en aplicaciones donde el error depende de ruido blanco, usa variables de estado para retroalimentar la planta.
- Por último, los controladores difusos, que utilizan un algoritmo de antecedente – consecuencia para crear un sistema lógico de inferencia difusa.

En la Tabla 2.10, se presentan las ventajas y desventajas de cada uno de ellos

Tabla 2.10. Ventajas y desventajas de controladores

Controlador	Ventajas	Desventajas
PID	<ul style="list-style-type: none"> • Fácil implementación • Mucha precisión en sistemas lineales • Son comúnmente usados, es decir, hay mucha información acerca de su implementación 	<ul style="list-style-type: none"> • No recomendables para sistemas complejos • Poco precisos para grandes perturbaciones • No tienen en cuenta la dinámica del mecanismo
LQR	<ul style="list-style-type: none"> • Toma en cuenta la dinámica del sistema • Recomendable para sistemas complejos 	<ul style="list-style-type: none"> • Requiere mucha demanda computacional al sistema que se implementará • El modelo matemático debe ser preciso
Difuso	<ul style="list-style-type: none"> • Es fácilmente adaptable ante cualquier perturbación repentina • No requiere de condiciones estacionarias 	<ul style="list-style-type: none"> • Requiere de mucho conocimiento acerca de la teoría del controlador • Es poco recomendable para sistemas lineales

Los criterios de selección se presentan en la Tabla 2.11, a continuación,

Tabla 2.11. Criterios para selección de controlador

Criterio	Denominación	Significado
Eficiencia computacional	A	Consumo de recursos que requiere el controlador para funcionar
Facilidad de implementación	B	Cantidad de conocimiento previo que requiere el controlador para ser diseñado
Adaptabilidad a perturbaciones	C	Capacidad del sistema para poder soportar cambios externos en la dinámica.
Precisión	D	Capacidad del controlador para mantener el péndulo en las condiciones óptimas establecidas

En la Tabla 2.12 se enfrentan los criterios entre sí, con el fin de ponderarlos y ordenarlos de acuerdo con su importancia en el proyecto del péndulo invertido doble. Este método se denomina comparación por pares, y sirve para la matriz de selección les dé más importancia a los criterios con más peso.

Tabla 2.12. Comparación por pares para criterios de selección de controlador

Comparación por pares			A	B	C	D
A	VS	B	X			
A	VS	C	X			
A	VS	D				X
B	VS	C		X		
B	VS	D				X
C	VS	D			X	
PUNTUACIÓN			2	1	1	3
PONDERACIÓN			0.33	0.17	0.17	0.33

La Tabla 2.12 indica que los criterios A y D, es decir, eficiencia computacional y precisión, tienen un mayor peso para decidir qué sensor usar, antes los criterios restantes, B y C: facilidad de implementación y adaptabilidad a perturbaciones.

Finalmente, para elegir el controlador que se usará en el proyecto, se dispone de la matriz de decisión en la Tabla 2.13.

Tabla 2.13. Matriz de decisión para selección de controlador

Criterio	%	PID		LQR		Difuso	
		Nota	Puntaje	Nota	Puntaje	Nota	Puntaje
Eficiencia computacional	33	5	1.65	3	0.99	3	0.99
Facilidad de implementación	17	5	0.85	3	0.51	2	0.34
Adaptabilidad a perturbaciones	17	2	0.34	5	0.85	5	0.85
Precisión	33	2	0.66	5	1.65	4	1.32
Total	100	14	3.5	16	4.0	14	3.5

De tal manera que la opción ganadora es el controlador LQR, ya que usa el modelo matemático del sistema para optimizar el rendimiento de la planta a través de la corrección de errores, utilizando un costo computacional medianamente alto, pero que tiene una respuesta precisa. Su diagrama general de bloques se lo puede observar en la Figura 2.19

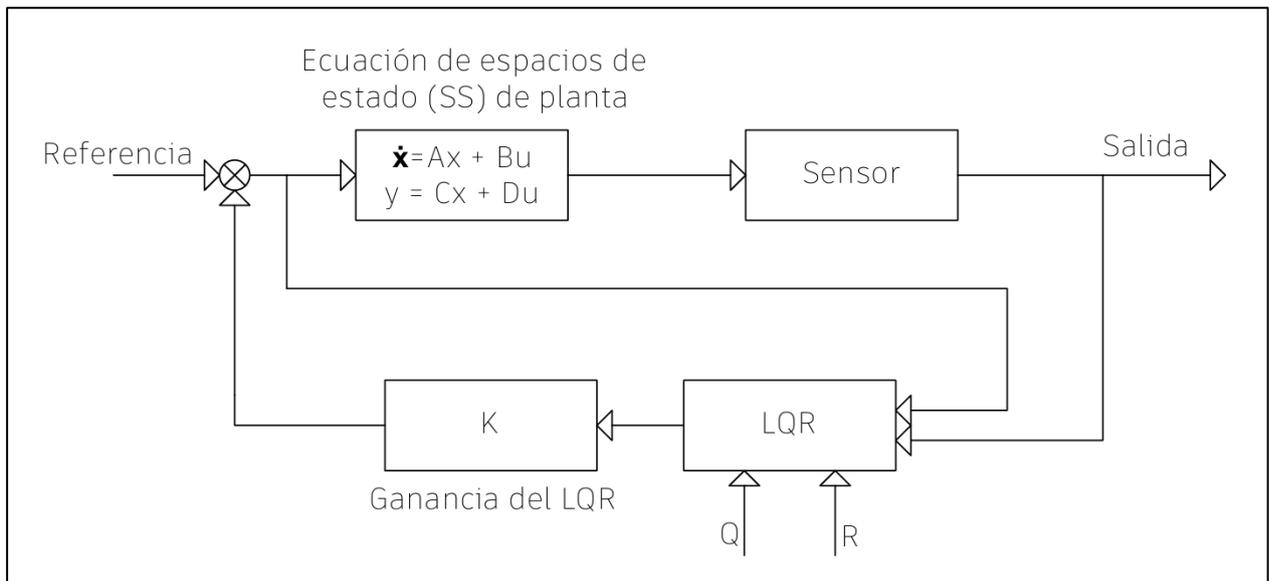


Figura 2.19. Diagrama general de bloques para controlador LQR.

Tal como se observa en el diagrama general de bloques del controlador LQR, en la Figura 2.19, el LQR genera una ganancia que minimiza el factor de costo computacional, utilizando las matrices Q y R, este modelo se presenta en la Ecuación 2.37.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\delta^T * Q \delta + u_e^T * R * u_e) \quad (2.37)$$

La matriz Q es la encargada de penalizar al vector de estados que se definió en el vector de estados. Es una matriz definida de tipo diagonal y positiva. La matriz Q estructura la importancia que el controlador le da a cada estado, usando como referencia a las condiciones objetivo, en este caso, es $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$. Para cada componente de la matriz, entre más grande sea su magnitud, implica mayor penalización.

Por otro lado, la matriz R, también es una matriz definida en diagonal y positiva, y representa la energía que utiliza el actuador, entre más grande sea el valor de R, el sistema utilizará mayor energía, porque la penalización disminuye.

2.6 Sistema de control de la planta.

En el entorno de Simulink, se ubicó el diagrama de bloques para que el PDI mantenga se mantenga estabilizado por medio de la retroalimentación otorgada por el controlador y el monitoreo constante de las señales de control. De tal manera que cada componente del sistema se mantenga en los ángulos deseados.

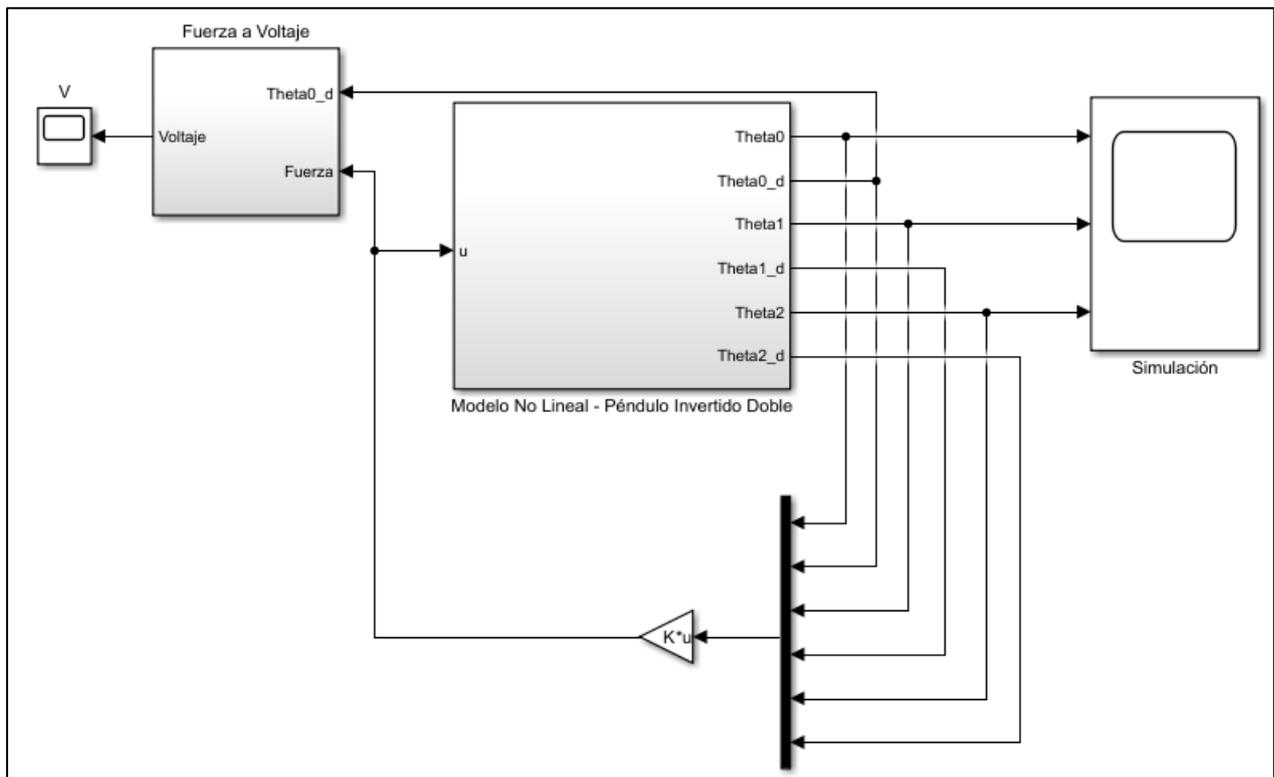


Figura 2.20. Diagrama de bloques para planta simulada.

En el diagrama de las simulación, mostrado en la Figura 2.20, se ubicó el modelo matemático del sistema en el subsistema llamado “Modelo no lineal – Péndulo Invertido doble”, con las 6 salidas del modelo, $(\theta_0, \dot{\theta}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$, las tres variables de interés se reciben en un bloque de SCOPE, para poder graficarlas y evaluar su comportamiento dinámico; no obstante, las 6 salidas del sistema se retroalimentaron por medio del controlador LQR, este bloque consta de un vector multiplicador, K, de 6 elementos, que ajustan la señal a los valores deseados. Finalmente, esa fuerza se convierte a voltaje y se grafica en otro bloque de SCOPE para evaluar su comportamiento.

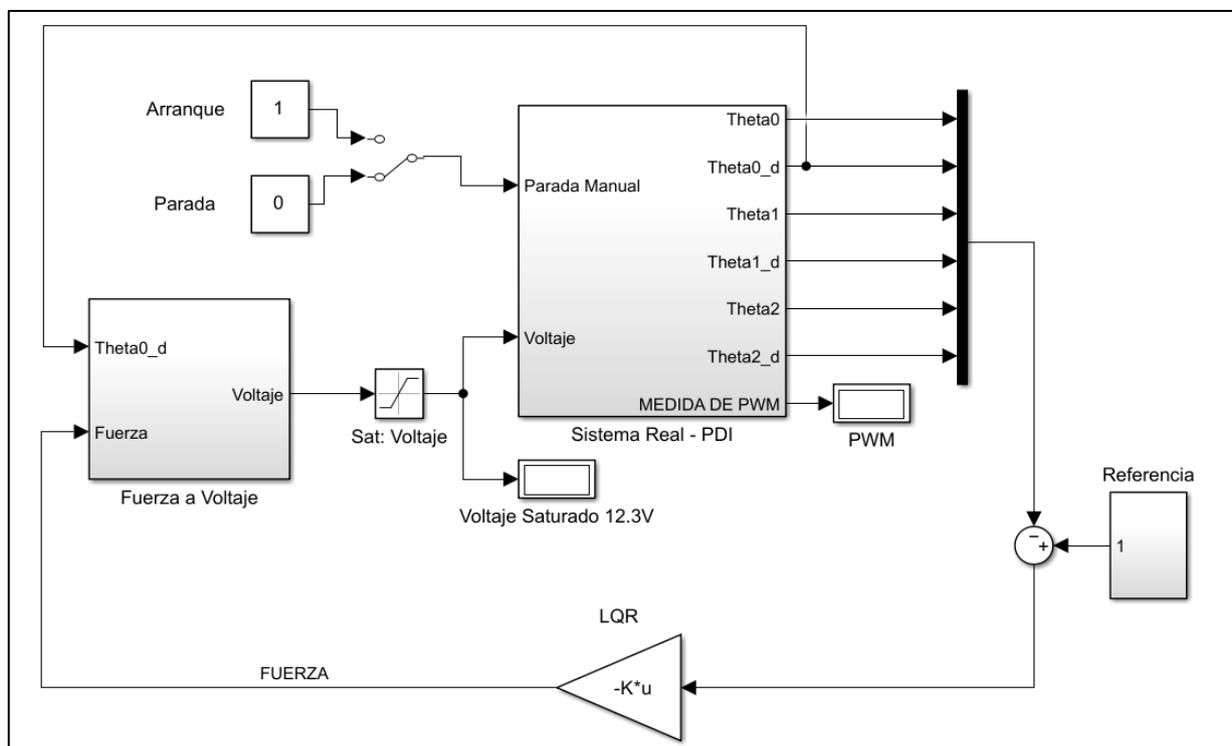


Figura 2.21. Diagrama de bloques de planta real.

En el diagrama de la planta real, presentado en la Figura 2.21, guarda muchas relaciones con el diagrama anterior. El cambio más relevante que se realizó fue que se cambió el modelo matemático por los bloques de comunicación entre el Arduino y Simulink, de los 3 encoders de los componentes, el motor - actuador y la tarjeta de adquisición de datos, esto se ubicó en el subsistema llamado “Sistema real de PDI”. De igual manera, se añadió un bloque de parada y arranque con un switch para activar o desactivar el motor de forma manual. Por otro lado, en el bloque de saturación de voltaje, se controla la señal de PWM, en caso de que el motor requiera de un voltaje mayor al que puede otorgar la fuente.

En el diagrama de bloques de la planta real, también se incluyó varias condiciones de seguridad, para evitar que el sistema sufra daños en caso de que el resultado obtenido, no sea el resultado esperado. Entre las principales condiciones se encuentra:

- El carro sólo se podrá mover un 80% de la longitud total del riel, dejando un 10% libre de cada extremo, para evitar colisiones con los soportes laterales.
- Si cualquiera de los dos eslabones se desequilibra por más de 20° , tanto en sentido horario, como antihorario, el actuador no intentará movilizar el carro, puesto que el voltaje necesario sería muy crítico.
- El péndulo tomará como referencia el ángulo π , para cada eslabón, cuando esté completamente equilibrado en su posición natural, es decir, ambos eslabones apuntando al piso.

CAPÍTULO 3

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En el presente capítulo se expone el análisis dinámico detallado de cada componente del sistema de péndulo invertido doble, obtenidos mediante la implementación y la simulación de la planta. Inicialmente, se explican las gráficas obtenidas al realizar la estimación de parámetros, antes y después de las iteraciones realizadas por Matlab hasta el punto de convergencia, y se presentan los valores finales.

Con los valores obtenidos, se realizaron los cálculos de las matrices para el espacio de estado y las matrices de sintonización del controlador LQR para penalizar cuales eran las variables. De igual manera, se presentan las gráficas de posición del carro móvil, del eslabón inferior y del eslabón superior, además de la señal de voltaje que utiliza el actuador para efectuar el movimiento de estabilización.

Finalmente, se presenta la viabilidad comercial del PDI, el cual incluye un análisis de costos, el público objetivo, y las ganancias estimadas dentro del primer año de ejecución del proyecto. Además de la discusión de todos los resultados obtenidos con el fin de proporcionar otra perspectiva acerca de cómo se pudo haber abordado el proyecto, para futuras investigaciones.

3.1 Estimación de parámetros

3.1.1 Estimación de parámetros del motor

Se realizó el experimento, tanto en la simulación, como en la vida real, ambos con un tiempo total, $t = 10 \text{ segundos}$, y un tiempo de muestreo, $t_s = 0.01 \text{ segundos}$. La gráfica de la Figura 3.1, muestra el resultado de Velocidad vs tiempo del eje del motor; en naranja el resultado de la simulación, y en color azul el resultado de la realidad. El motor experimenta pulsos periódicos para que aumente la velocidad y luego se detenga. Se observa que la gráfica naranja tiene una mayor amplitud, de aproximadamente 1200 rad/seg, no obstante, en la realidad, solo alcanza los 300 rad/seg, es decir, es 4 veces menor. Otro aspecto relevante, es que la gráfica azul tiene una respuesta más amortiguada que en la simulación, debido a que las pérdidas energéticas, provocando que el sistema no genere la velocidad indicada de manera rápida.

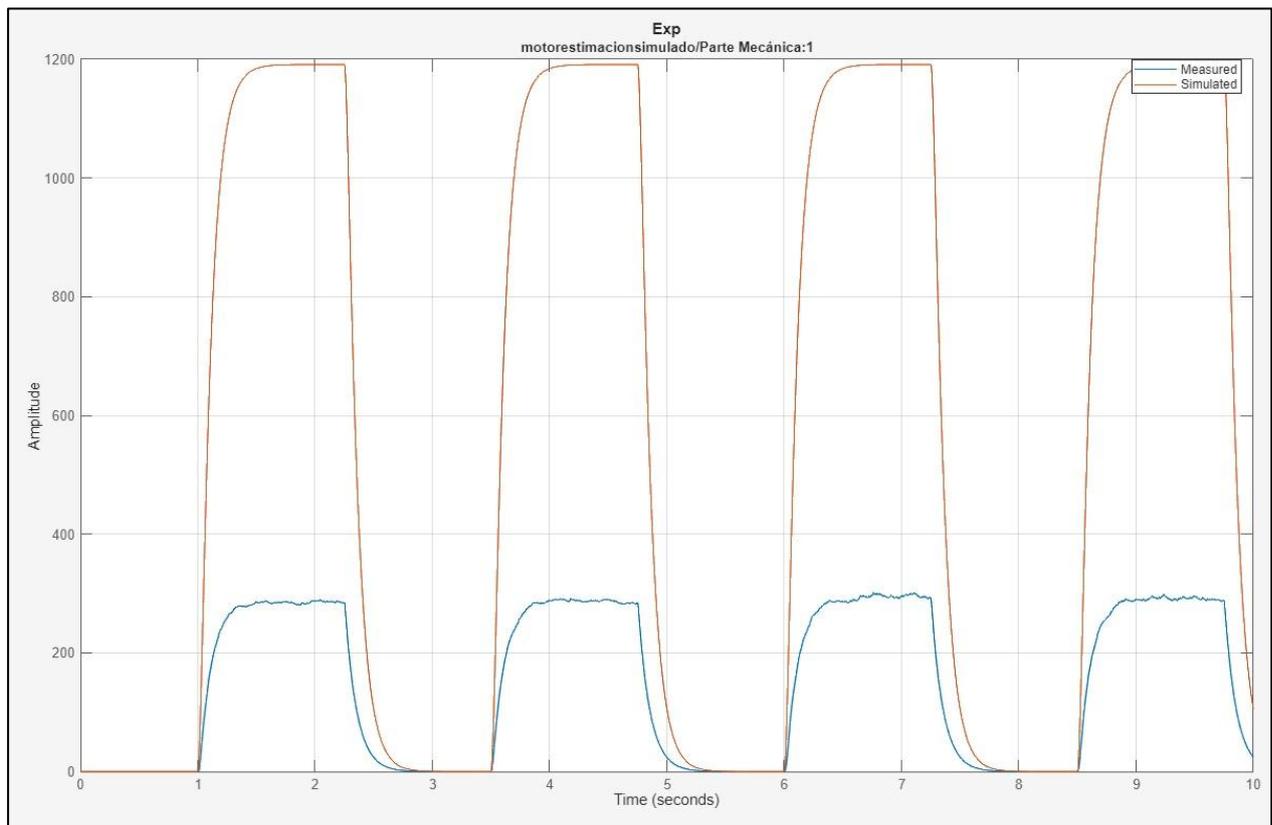


Figura 3.1. Velocidad (rad/seg) VS tiempo (s) del motor sin iteraciones

En la Figura 3.2, se muestra la gráfica de velocidad (rad/seg) VS tiempo (s) del motor, con el mismo tiempo de experimentación y tiempo de muestreo, pero en esta ocasión, hubo una mejora evidente en la correspondencia de la señal real y la señal simulada. Esto indica que el modelo teórico, representa de manera más precisa la dinámica del sistema real debido a las iteraciones realizadas por Matlab para ajustar los parámetros del sistema.

La amplitud de ambas gráficas está alineada y son de aproximadamente 280 rad/seg. No obstante, se puede evidenciar un poco de ruido en la señal azul, sobre todo en el pico de las 2 últimas pulsaciones, donde ocurren fluctuaciones que van desde los 280 rad/seg, hasta los 300 rad/seg. Esto se debe a la imprecisión de los sensores o a interferencias ambientales que pudieron haber ocurrido durante la experimentación. Así como también, los aspectos de amortiguamiento se solucionaron con las iteraciones, ya que la gráfica muestra una concordancia perfecta en las pendientes de subida y de bajada del modelo.

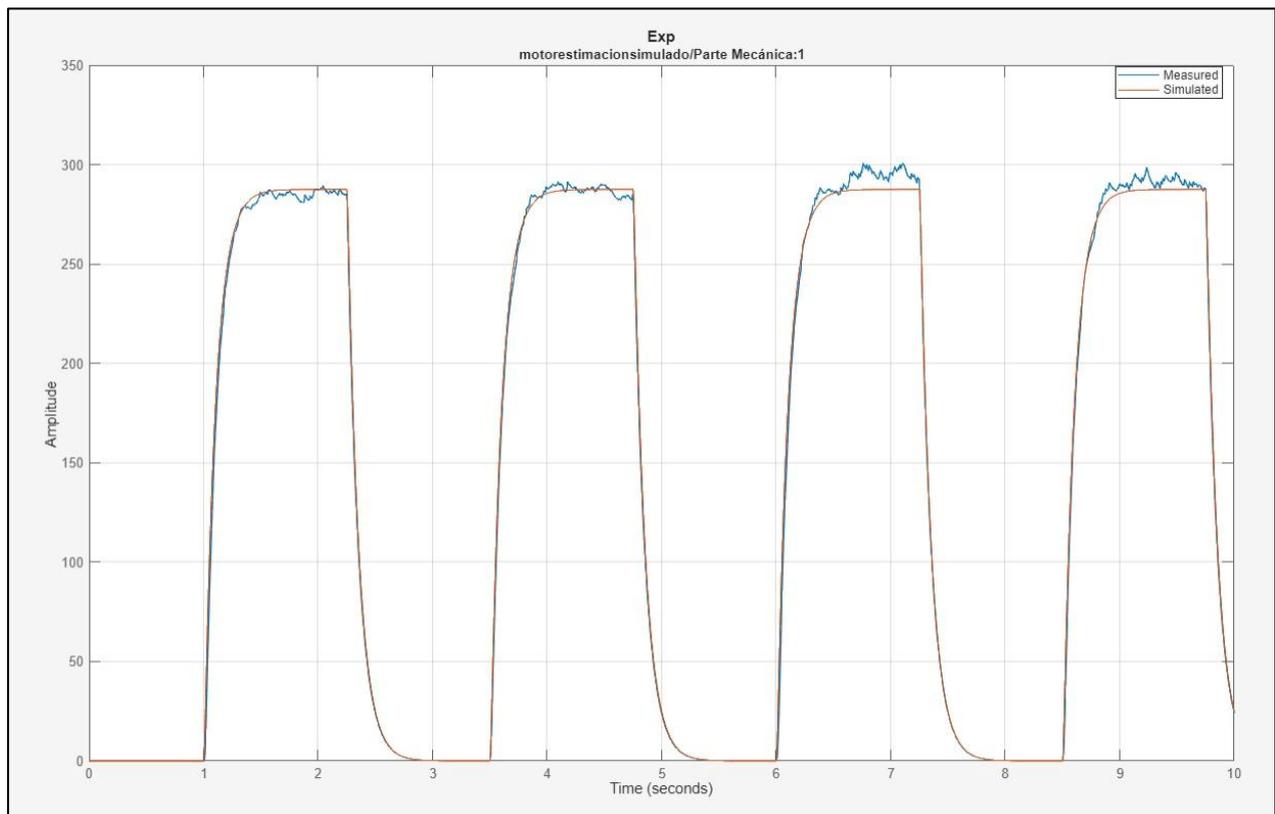


Figura 3.2. Velocidad (rad/seg) VS tiempo (s) del motor con iteraciones

Los resultados de los parámetros del motor, antes y después de la iteración, se presenta en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Parámetros estimados del motor

Parámetro	Valor inicial	Valor estimado	Unidad
Resistencia del motor (R_m)	0.8	10.7	Ohmios
Inercia polar de motor (J)	$8.320 * 10^4$	$9.603 * 10^6$	m^4
Inductancia (L_a)	0.1254	0.35471	H
Constante de torque (k_b)	0.11868	0.01022	$N * m/A$
Amortiguamiento del carro – motor – riel (c)	0.63	$1.4732 * 10^{-5}$	$N * s/m$

En los resultados se refleja una diferencia notable entre los parámetros estimados y los iniciales. El valor de la inercia aumentó y la constante de torque disminuyó, esto indica que el sistema es más lento que generar un torque inicial cuando se le aplica una señal de voltaje. El aumento tan drástico de la resistencia indica que la corriente disminuye, y el motor pierde más energía en forma de calor. Y finalmente, el valor del amortiguamiento disminuyó, por lo tanto, el sistema tiene una menor resistencia a los cambios de dirección o velocidad que se aplique en el motor.

3.1.2 Estimación de parámetros del mecanismo

En la experimentación para estimar los parámetros del mecanismo del PDI, la gráfica resultante después de las iteraciones para el movimiento del carro se presenta en la Figura 3.3.

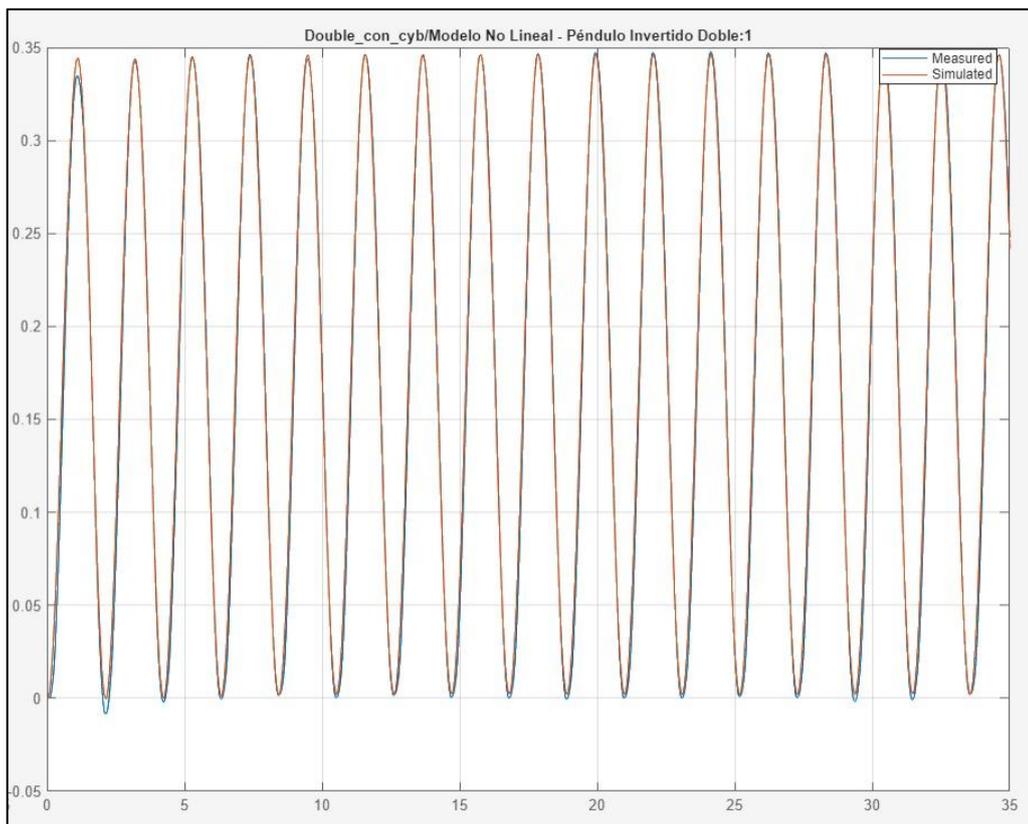


Figura 3.3. Theta 0 (m) VS tiempo (s) – después de estimar parámetros

La gráfica simulada (naranja) y la gráfica azul (real) muestran una concordancia casi perfecta en su comportamiento dinámico. Las curvas están alineadas, lo que significa que el modelo no lineal del carro representa con fidelidad el comportamiento del mecanismo en la realidad.

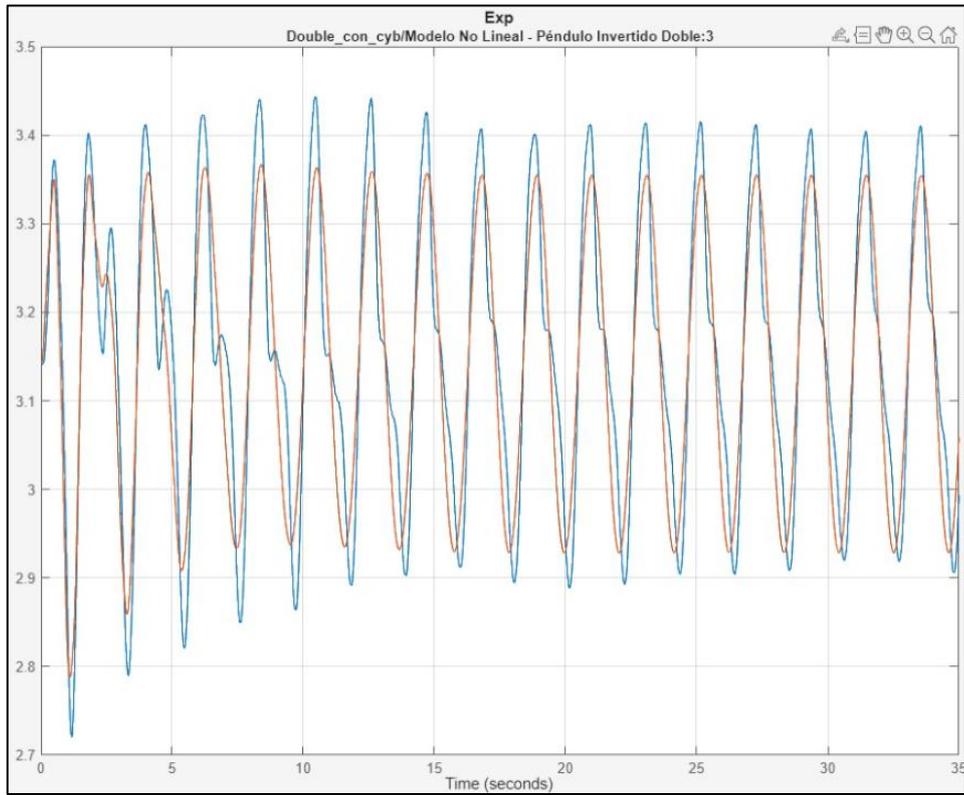


Figura 3.4. Theta 1 (rad) VS tiempo (s) Iterados

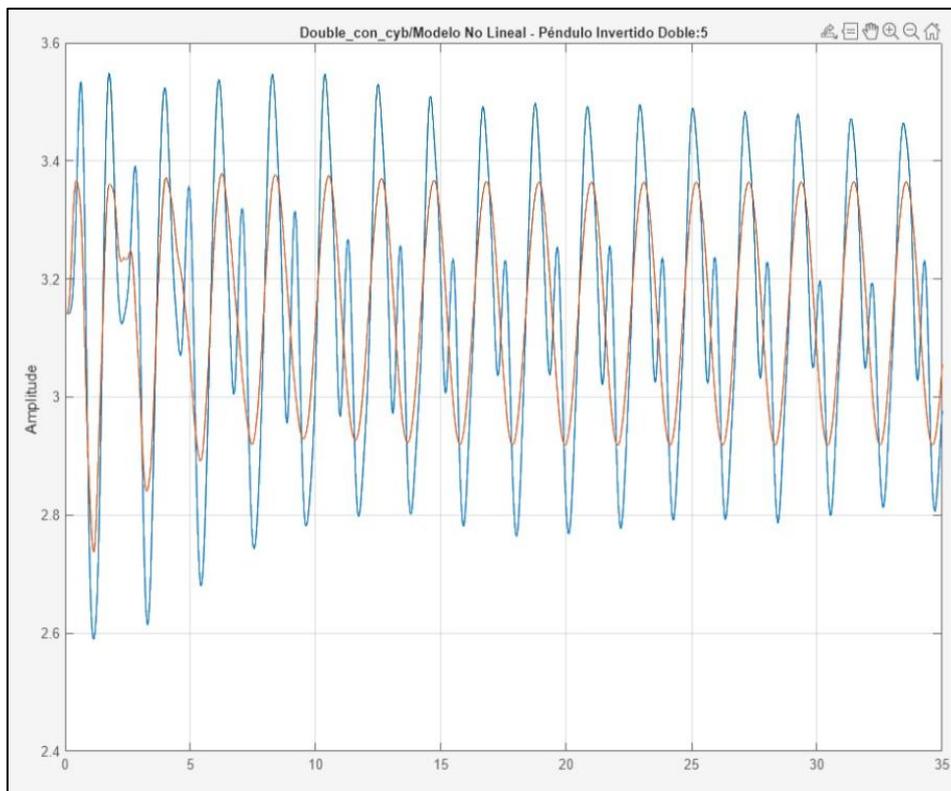


Figura 3.5. Theta 2 (rad) VS tiempo (s) Iterados

Por otro lado, las gráficas de la Figura 3.4 y la Figura 3.5, representan el comportamiento dinámico del eslabón inferior y el eslabón superior, están en función de su posición angular, frente al tiempo. Ambas gráficas muestran oscilaciones, no obstante, en el eslabón superior (Theta 2) tienen una mayor amplitud, además de que tienen un mayor amortiguamiento, en comparación al eslabón inferior (Theta 1). Esto puede ser principalmente por los efectos de la inercia, ya que, el segundo eslabón, al estar más lejos del carro móvil, que es el elemento que recibe la fuerza, experimenta una mayor inercia.

En este caso, es evidente que, ambos componentes guardan la misma forma de la gráfica en su señal simulada y su señal real, no obstante, Matlab, no pudo lograr las iteraciones correspondientes para que los valores converjan en un punto y las gráficas se alinean completamente. El resultante fue que la gráfica real tenga una amplitud más grande que la simulada. Las gráficas concuerdan en aproximadamente un 75%. Esta diferencia sugiere que hay términos en el modelo matemático que sugieren disipación de energía en el mecanismo, pero que no fueron considerados en las ecuaciones. Esto también se evidencia en la Tabla 3.2. Donde la masa del carro tuvo un valor inicial de 0.263 kilogramos, pero en la estimación, se indica que aumenta a 1.22 kilogramos, indicando que, para que la simulación concuerde con la realidad, pareciera que el motor tiene que mover una masa 5 veces más pesada en comparación a la realidad.

Tabla 3.2. Parámetros estimados del mecanismo

Parámetro	Valor inicial	Valor estimado	Unidad
Masa de carro (m_0)	0.263	1.22	<i>kg</i>
Masa de eslabón inferior (m_1)	0.190	0.2627	<i>kg</i>
Masa de eslabón superior (m_2)	0.094	0.365	<i>kg</i>
Longitud de eslabón inferior (L_1)	0.265	0.18491	<i>m</i>
Longitud de eslabón superior (L_2)	0.265	0.11996	<i>m</i>
Longitud centro de masa 1 (l_1)	0.133	0.17572	<i>m</i>
Longitud centro de masa 2 (l_2)	0.133	0.163	<i>m</i>
Inercia de eslabón inferior (I_1)	$13.3 * 10^{-5}$	$36 * 10^{-6}$	<i>kg * m²</i>
Inercia de eslabón superior (I_2)	$13.3 * 10^{-5}$	$45 * 10^{-4}$	<i>kg * m²</i>
Fricción viscosa del carro (b)	$13.3 * 10^{-5}$	$97 * 10^{-5}$	<i>Nm/(rad/s)</i>

3.2 Sintonización de controlador.

Con los valores obtenidos a través de las iteraciones realizadas por Matlab, se reemplazaron en la Ecuación 39, es decir, en las ecuaciones linealizadas alrededor de los puntos de estabilización. De tal manera, que el sistema de ecuaciones resultantes se presenta en la Ecuación 3.1.

$$(3.1) \quad \begin{cases} \ddot{\theta}_0(3.847) + \dot{\theta}_1(0.299) + \ddot{\theta}_2(0.362) + \dot{\theta}_0(8.054 * 10^{-6}) = u(t) \\ \ddot{\theta}_0(0.299) + \dot{\theta}_1(0.055) + \ddot{\theta}_2(0.0669) + \dot{\theta}_1(0.000974) - \theta_1(2.929) = 0 \\ \ddot{\theta}_0(0.3619) + \dot{\theta}_1(0.0669) + \ddot{\theta}_2(0.10055) + \dot{\theta}_2(0.000974) - \theta_2(3.5512) = 0 \end{cases}$$

Como el controlador que se usará es un LQR, se necesitó reordenar las ecuaciones en matrices de estado, tal como se muestra en las ecuaciones 3.2; 3.3; 3.4, las variables $\dot{X}_2, \dot{X}_4, \dot{X}_6$, hacen referencia a $\ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ y necesitan ser despejadas del sistema porque son las incógnitas más complejas del sistema y se pueden expresar en términos de sus derivadas (posiciones y velocidades) y se construye un modelo más preciso para su análisis.

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4) & A(2,5) & A(2,6) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) & A(4,5) & A(4,6) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A(6,2) & A(6,3) & A(6,4) & A(6,5) & A(6,6) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(2,1) \\ 0 \\ B(4,1) \\ 0 \\ B(6,1) \end{bmatrix} * U(t)$$

La matriz de estados, A, con los valores parametrizados, se presenta en la Ecuación 3.3.

$$(3.3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.63 * 10^{-6} & -7.40 & 2.46 * 10^{-3} & 2.17 * 10^{-1} & -5.96 * 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 * 10^{-5} & 326.89 & -0.109 & -231.51 & 0.064 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4.93 * 10^{-7} & -190.95 & 0.064 & 188.64 & -0.052 \end{bmatrix}$$

La matriz de entrada, B, se presenta en la Ecuación 3.4.

$$(3.4) \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4503 \\ 0 \\ -2.527 \\ 0 \\ 0.0612 \end{bmatrix}$$

Para verificar la controlabilidad de las matrices obtenidas, se realizó un análisis en Matlab utilizando el código mostrado en la Tabla 3.3, por medio del comando `ctrb(A,B)`, que tiene como salida una matriz de rango "rango_Co", si tiene el mismo rango que la matriz A, entonces el sistema es controlable.

Tabla 3.3. Código de controlabilidad

Código	<pre> % Matriz de controlabilidad Co = ctrb(A, B); % Rango de la matriz de controlabilidad rango_Co = rank(Co); % Verificación de controlabilidad if rango_Co == size(A, 1) disp('El sistema es completamente controlable.');</pre> <pre> else disp('El sistema NO es completamente controlable.');</pre> <pre> end % Mostrar la matriz de controlabilidad disp('Matriz de controlabilidad:'); disp(Co); </pre>
Salida del código	<pre> El sistema es completamente controlable. Matriz de controlabilidad: 1.0e+05 * 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0002 -0.0000 0.0633 0.0000 -0.0000 0.0002 -0.0000 0.0633 -0.0287 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0084 0.0025 -3.8915 -0.0000 0.0000 -0.0084 0.0025 -3.8915 1.7848 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0049 -0.0016 2.5371 0.0000 -0.0000 0.0049 -0.0016 2.5371 -1.1668 </pre>

La salida del código indica que el sistema es completamente controlable a través del tiempo, y se muestra la matriz de controlabilidad, entonces, se procede a diseñar y sintonizar el controlador LQR.

Finalmente, se establecieron condiciones de penalización para las matrices Q y R. Los valores de cada componente se presentan en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Condiciones de penalización para matriz Q.

Término	Penalización	Valor estimado
Posición del carro (θ_0)	1 cm = 0.001	$q_1 = \frac{1}{x_{max}^2} = \frac{1}{0.001^2} = 10000$
Posición del eslabón inferior (θ_1)	5° = 0.087 radianes	$q_2 = \frac{1}{\theta_{max}^2} = \frac{1}{0.087^2} = 131.31$
Posición del eslabón superior (θ_2)	5° = 0.087 radianes	$q_3 = \frac{1}{\theta_{max}^2} = \frac{1}{0.087^2} = 131.31$

Se utilizó la regla de Bryson, que es una variación de la ley de inverso al cuadrado para definir los valores de Q, esta operación matemática asegura que, entre menor sea el error máximo permitido, la penalización será más grande. El resultado se muestra en la Ecuación 3.5. Aquí también se puede observar que, en los elementos que representan la penalización para las velocidades de cada componente, Q(2,2); Q(4,4); Q(6,6) se colocó un valor arbitrario de 10, porque tienen una prioridad moderada, mientras los valores de Q(1,1); Q(3,3); Q(5,5), que representan las posiciones, tienen una alta prioridad para el controlador.

$$(3.5) \quad Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 131.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 131.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Además, de un valor arbitrario de 1 para la matriz de R, para que el sistema se estabilice sin restricciones tan altas. Es un valor neutral; en caso de que ($R > 1$), el controlador usaría menos esfuerzo y podría tardar más en estabilizarse; y en caso de que ($R < 1$), el controlador podría ser muy agresivo.

$$(3.6) \quad R = [1]$$

El resultado de la ganancia, K, del controlador, se presenta en la Ecuación 3.7. Se puede evidenciar que tiene 6 elementos debido a las 6 componentes del sistema; 3 de posición y 3 de velocidades.

$$(3.7) \quad K = [31.623 \quad 30.049 \quad -691.94 \quad -16.97 \quad 794.099 \quad 57.57]$$

El vector K, es ingresado en el diagrama de bloques de Simulink y se ejecuta el código para obtener la respuesta del sistema cuando se coloca una condición inicial.

3.3 Respuesta de simulación.

En el diagrama de bloques presentado en la Figura 2.6, se ubican las condiciones iniciales de inestabilidad para realizar la simulación, estas condiciones son: $(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = (0, 5^\circ, 5^\circ)$. El programa se ejecuta y se extrajeron las siguientes gráficas.

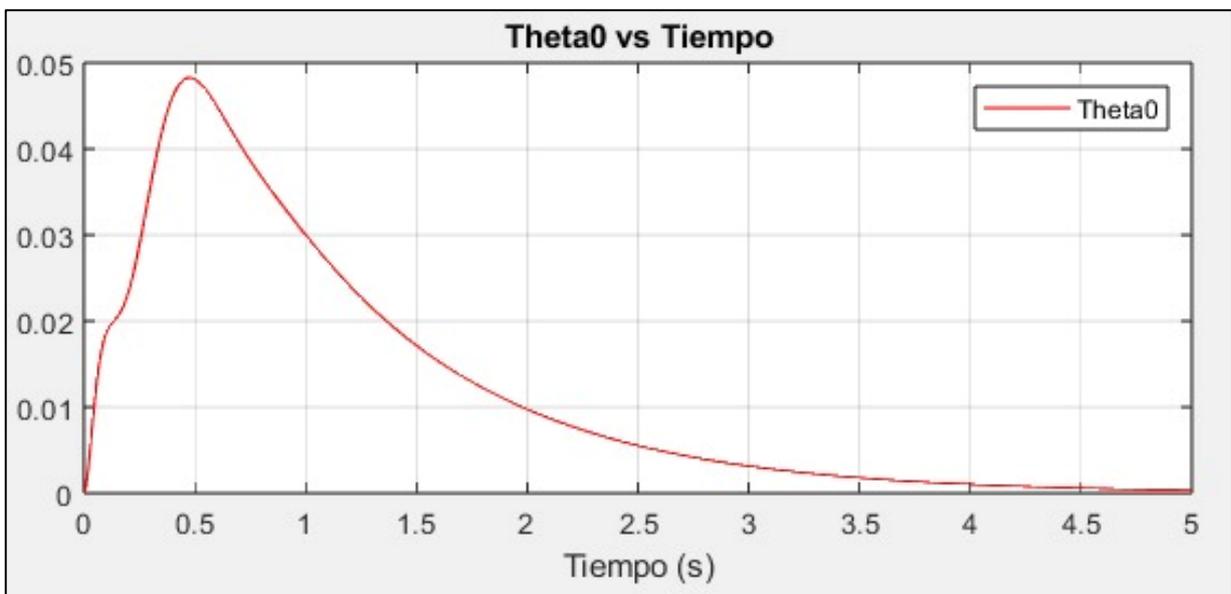


Figura 3.6. Posición Theta 0 (m) VS tiempo (s)

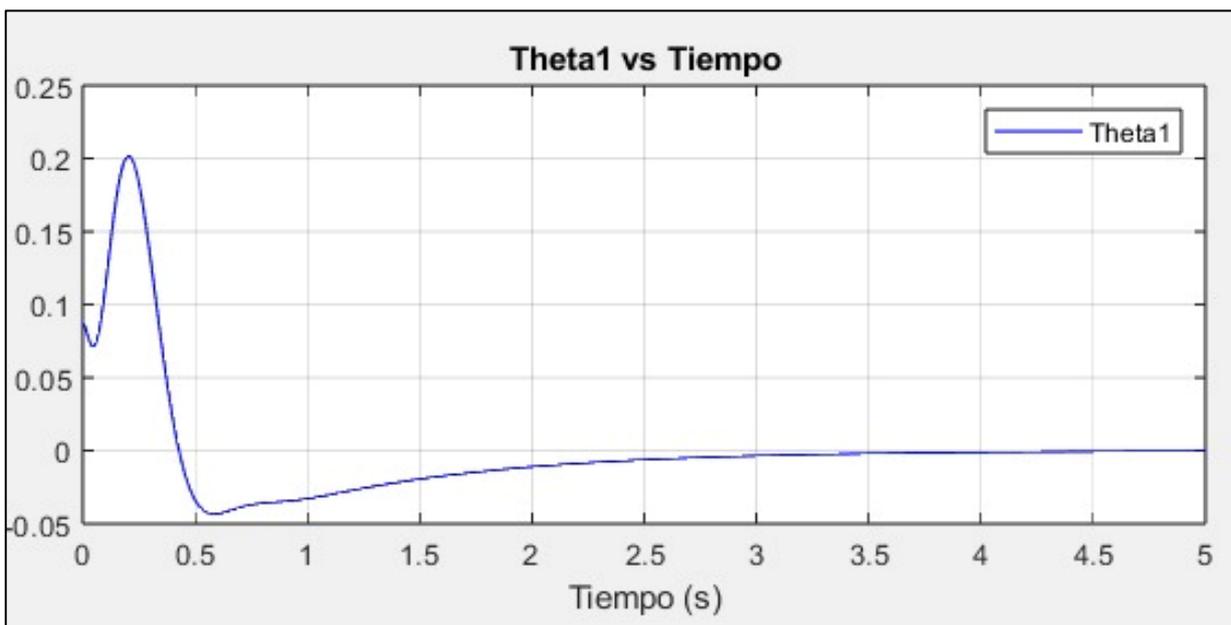


Figura 3.7. Posición Theta 1 (rad) VS tiempo (s)



Figura 3.8. Posición Theta 2 (rad) VS tiempo (s)

La Figura 3.6, de la posición lineal del carro frente al tiempo, indica que el carro se mueve 0.05 m en 0.5 segundos, es decir, un movimiento muy brusco que indica un sobreimpulso, sin embargo, retorna a su punto de referencia en medio del riel de forma suave, en un tiempo total de 5 segundos, luego de ocurrida la perturbación.

En la Figura 3.7, de la posición angular del eslabón inferior frente al tiempo, indica que hay interacción dinámica entre los componentes, debido al movimiento del carro. El eslabón cambia el sentido de giro aproximadamente 1° y luego tiene un sobreimpulso hasta la marca de 11.5° , que luego se amortigua y se estabiliza al mismo tiempo que se estabiliza el carro.

Finalmente, el comportamiento del eslabón superior en la Figura 3.8, muestra que el eslabón realiza un movimiento crítico, que va desde 5° (0.087 rad), hasta los -10.3° (0.18 rad), es decir, tiene un desplazamiento de aproximadamente 15° en 0.2 segundos; para luego cambiar su dirección y se posiciona en 2° (0.03 rad). A partir de este punto, el movimiento es amortiguado y desciende suavemente hasta su punto de estabilización en 0° , en un tiempo total de 5 segundos.

La señal de control con la cantidad de voltaje que necesita el motor actuador para mover el carro se presenta en la Figura 3.9. Esta gráfica indica si el rango de voltaje es manejable para la fuente que se presentó en la sección de componentes.

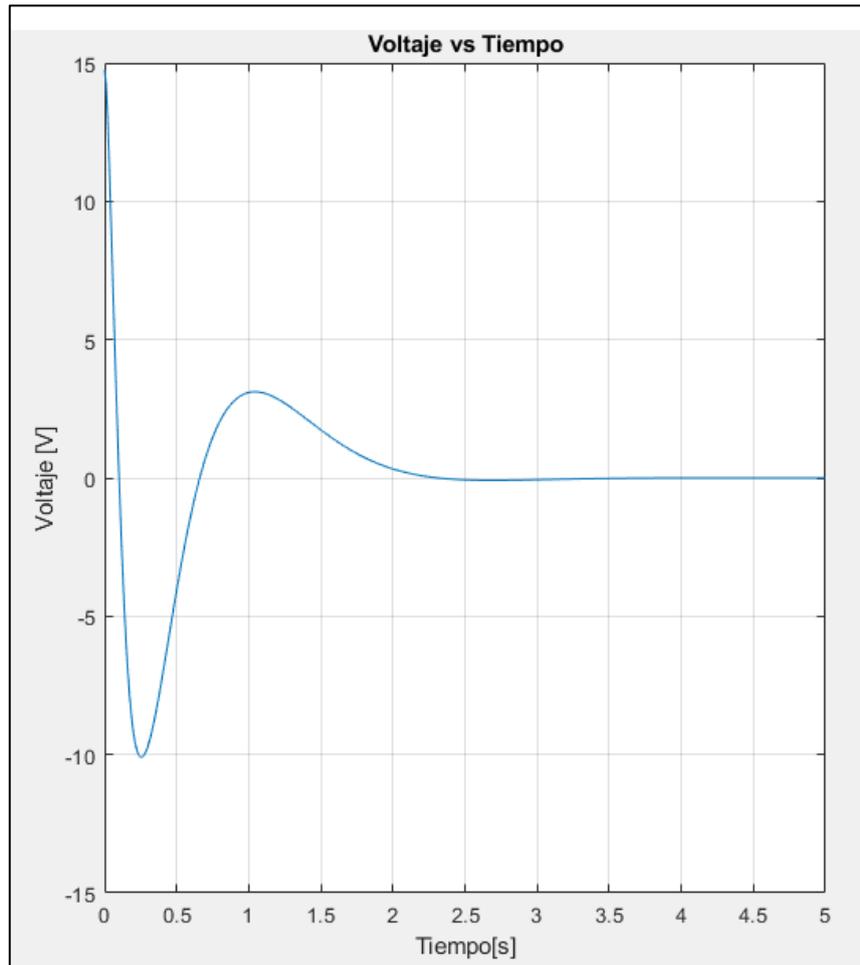


Figura 3.9. Voltaje (V) VS tiempo (s)

En la Figura 3.9, se muestra que el motor necesita un pico inicial de 15 Voltios para mover el carro y reaccionar de manera rápida para atender la perturbación. Posteriormente, tiene un segundo pico de -10 Voltios, esto indica que el motor cambia su sentido de giro. Luego de 3.5 segundos, el voltaje es mínimo y muy cercano a cero, es decir, el motor no necesita mucho esfuerzo para mantener el equilibrio y el movimiento es mínimo. Cuando llega a los 5 segundos, el valor del voltaje es finalmente cero.

El pico de voltaje de 15 voltios depende enteramente de la configuración que se les dio a las matrices de Q y R del controlador LQR, esto indica que las penalizaciones fueron correctas, para que, cuando el sistema entre en un estado crítico, tal como es el caso de las perturbaciones iniciales de 5° para cada eslabón. De este modo, el sistema está en el límite de la cantidad de voltaje que la fuente es capaz de entregar. En caso de que requiera de más voltaje, el sistema requeriría de otra fuente y de la misma manera, requeriría de otro motor.

3.4 Implementación en la planta real.

En la implementación del controlador en la planta real, dio como resultado la gráfica de voltaje (V) vs tiempo (s) del controlador, en la Figura 3.10. Se observa que el sistema necesita de más de 40 voltios para que el carro pueda realizar el movimiento respectivo para estabilizar el sistema, en lugar de los 15 voltios que se observó en la simulación.

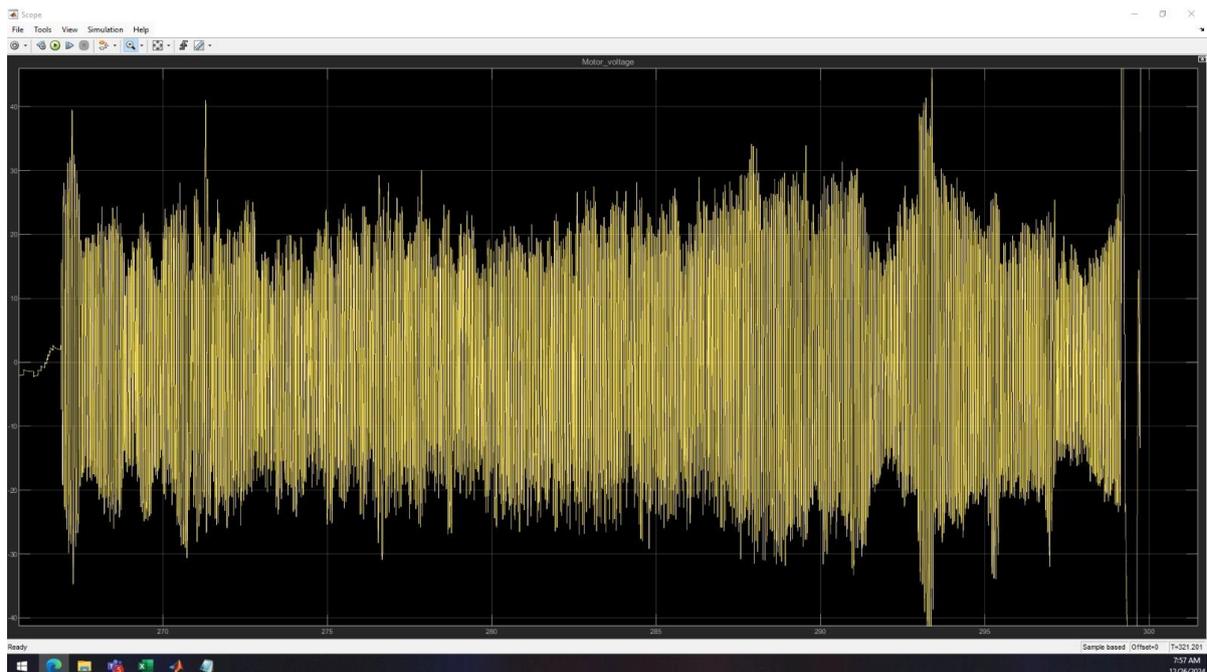


Figura 3.10. Señal de voltaje de la planta real.

Se observa que el controlador genera respuestas demasiado agresivas, con picos muy altos y esfuerzos energéticos elevados. Esto hace que el motor reaccione con poca precisión ante las perturbaciones. El movimiento del motor concuerda en dirección con el movimiento estabilizador que tendría que realizar, sin embargo, no lo hace con la magnitud necesaria. Esto es debido al bloque de saturación que se colocó en el diagrama de bloques de la Figura 2.6, haciendo que el sistema sólo entregue un total de 15 voltios, cuando el mecanismo necesita una magnitud extremadamente superior.

Este problema está directamente ligado con el modelo matemático del sistema, ya que, en la etapa de estimación de parámetros, el modelo matemático presentó una gran discordancia con respecto al sistema real. Los parámetros del mecanismo no se modelaron con precisión, nada más se alinearon aproximadamente un 70% del total, a diferencia del motor, que las gráficas de simulación y realidad se alinearon en aproximadamente un 95% del total. Por consiguiente, si el modelo matemático del

sistema, las ganancias del controlador también son erróneas, haciendo que las oscilaciones en la señal de voltaje sean excesivas.

3.5 Análisis de costos.

En la Tabla 3.5, se presentan los gastos necesarios que se realizaron para llevar a cabo el proyecto, están equilibrados entre materiales mecánicos y eléctricos; servicios de envío y maquinado de componentes; además de la mano de obra para construir el prototipo.

Tabla 3.5. Costo del proyecto

Material / servicio	Observación.	Costo (\$USD)
Encoder E6B2-CW2E	3 unidades, uno para cada componente	114.78
Placa de acrílico 9 mm	Dimensiones de (60x60) cm. Empleada para la fabricación de soportes, bases y eslabones.	17.00
Servicio de corte láser	Empleado para el maquinado de los eslabones, soportes y bases.	10.00
Carro deslizante.	1 unidad.	17.39
Perfil OB2020	1 metro de longitud.	10.00
Arduino MEGA 2560	1 unidad	16.52
Cable UTP	1 m, para conexiones entre Arduino y encoders	1.00
Polea GT2	4 unidades, una para cada encoder y para motor	14.39
Banda GT2	2 metros de banda, ya que tiene que recorrer la parte de arriba del riel y la parte de abajo.	2.52
Motor JGB37 - 520	1 unidad, con reductor.	12.00
Driver IBT2-43A	1 unidad.	9.00
Servicio de envío	Envío a nivel regional por parte de la empresa (SERVIENTREGA, 2025)	5.44
Costo de mano de obra	2 horas/hombre asociadas a la instalación y unión de todos los componentes	32.00
TOTAL		262.04

En caso de que el proyecto quiera ser comercializado, es necesario imponer un margen de ganancia, es decir, agregar un valor adicional al costo total del producto. De acuerdo con (Becchetti, 2024) para empresas emergentes, recién iniciadas en el mercado, normalmente el margen de ganancia es bajo, entre el 10 y el 15% del producto. Haciendo el cálculo respectivo en la Ecuación 3.8:

$$(3.8) \quad \text{Margen de ganancia} = 262.04 * 0.15 = 39.31 \text{ USD}$$

$$(3.9) \quad \text{Precio} = \text{Costo} + \text{Margen de ganancia} = 262.04 + 39.31 = 301.346$$

De tal manera que, el precio final del producto estaría distribuido según se muestra en la Figura 3.11.

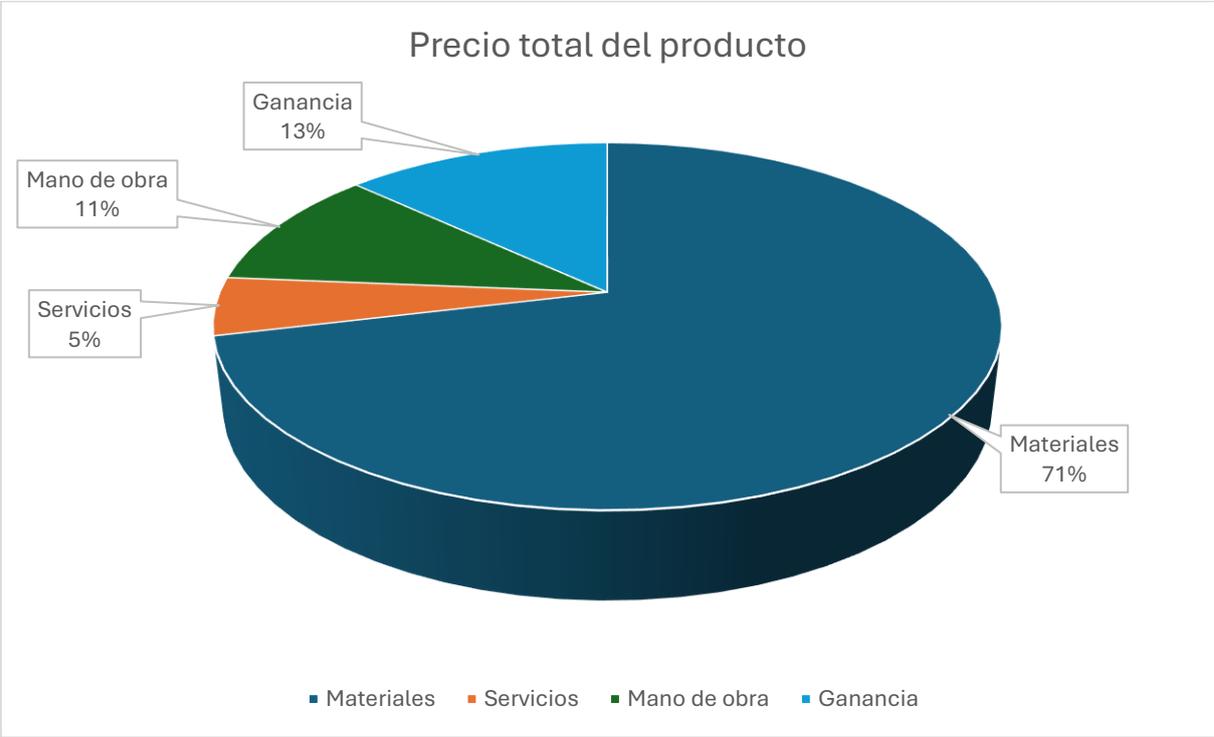


Figura 3.11. Distribución del precio del producto.

Se puede evidenciar que gran parte del precio está enfocado en los materiales, es decir, se garantiza la buena adquisición de recursos para que el prototipo tenga una alta calidad. Por otro lado, los servicios de envío y maquinado, en conjunto con la mano de obra, van de la mano con la complejidad del proyecto y no representan un gasto excesivo en relación con el total.

Se comparó este precio con otro producto similar que exista en el mercado, cabe recalcar que, dentro del ámbito local de Ecuador, no se encontró ningún mecanismo de péndulo invertido doble, sin embargo, en el mercado americano, la empresa (Quanser, 2020),

destacada por sus innovaciones en la educación y formación de ingenieros, propone el producto con código “DBPEN – Double inverted pendulum – quadratic optical encoder”, con un precio de \$1200.00 USD. Tiene como objetivo introducir conceptos de control intermedio y avanzados. No obstante, esto conlleva otros costos adicionales, los cuales se presentan en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6. Costo de PDI de Quanser

Concepto	Observación.	Costo (\$USD)
Costo base	Precio inicial del PDI	1200.00
Costo de envío	Envío internacional desde Estados Unidos	45.00
Impuesto de importación	El 15% del precio inicial debido a que el producto supera los \$400.00	180.00
Seguro de envío	Cobertura por pérdida o daño del producto	20.00
Comisión bancaria	El 0.5% del precio inicial por pago internacional	6.00
Costo adicional	Transporte desde la agencia de envío hasta el punto de entrega	10.00
TOTAL		1461.00

En la tabla se puede observar que, después de todos los gastos adyacentes a la adquisición del péndulo invertido ofrecido por Quanser, el costo total sería de \$1461.00 USD. Esto significa que el prototipo construido a lo largo del proyecto es aproximadamente 5 veces menor al producto de Quanser. A pesar de que no cuente con una amplia trayectoria y gran reconocimiento, este es una alternativa amigable y viable para la formación de ingenieros en instituciones educativas y la adquisición de conocimientos en el campo de la ingeniería de control dentro de Ecuador.

3.6 Discusión de resultados.

En el presente proyecto integrador, el PDI no logró estabilizarse de la manera esperada al momento de implementarlo en la planta real, a diferencia de como sí se hizo en la simulación. Presuntamente fue debido a que el modelo matemático planteado no

considera algunos factores críticos, como el efecto de la fricción entre el carro y la pista, la fricción de Coulomb y los efectos de la fricción viscosa.

Referente a esto, el modelo matemático del péndulo invertido doble, presentado por (Campbell & Crawford, 2022), utiliza dos modelos de fricción en su sistema, los cuales se presentan en las ecuaciones 3.9 y 3.10.

$$(3.9) \quad F_{static} = \begin{cases} -F_{applied}, & si \dot{x} = 0 \\ -(\mu_s)F_N sgn(F_{applied}), & si \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$(3.10) \quad F_{fric} = \begin{cases} F_{static}, & si \dot{x} = 0 \\ -\left(\mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_s}\right)^\gamma}\right)F_N * sgn(\dot{x}), & si \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$

En la ecuación 3.9 se describe la fricción estática, que es la fuerza que va en contra del movimiento cuando un objeto está en reposo, sin embargo, en la ecuación 3.10, describe la transición entre la fricción estática y la fricción de Coulomb, que interviene en la interacción dinámica cuando el movimiento de algún componente es constante.

Esta ecuación está asociada al efecto Stribeck, que determina la función de cambio de la fricción estática, hacia la fricción de Coulomb. En esta ecuación, μ_c y μ_s , es la constante de fricción de Coulomb y la fricción estática respectivamente. v_s es la velocidad del componente, y, γ es el módulo de transición entre ambas fricciones según el efecto Stribeck.

Agregar este modelo de fricción de Coulomb implica agregar un nuevo experimento en el desarrollo del proyecto con el objetivo de estimar nuevos parámetros. De acuerdo con (Dareini & Dabreteau, 2015), la fricción de Coulomb solo se aplica entre las uniones de los eslabones. El experimento que realizó consiste en fijar el eslabón inferior y liberar el eslabón superior desde un ángulo de 90°, tal como si fuera un péndulo simple. Posteriormente, se graficó los valores de posición angular vs tiempo y se parametrizó el coeficiente de fricción de Coulomb. Como resultado, el péndulo anteriormente mencionado, sí se estabilizó en la planta real.

En el caso de, (Bahadur, Barjeev, & Hari, 2014) propone utilizar un modelo de controlador mixto, entre LQR y PID. El PID ayuda a corregir errores en la señal que presente el LQR. El nuevo sistema consiste en ubicar el controlador LQR tal como se hizo en el presente proyecto con las 6 variables de salida retroalimentadas por el vector k, pero en el componente del carro, se ubica un nuevo controlador PID, sintonizado para evitar los

impulsos en el accionamiento del motor. Esto se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 3.12.

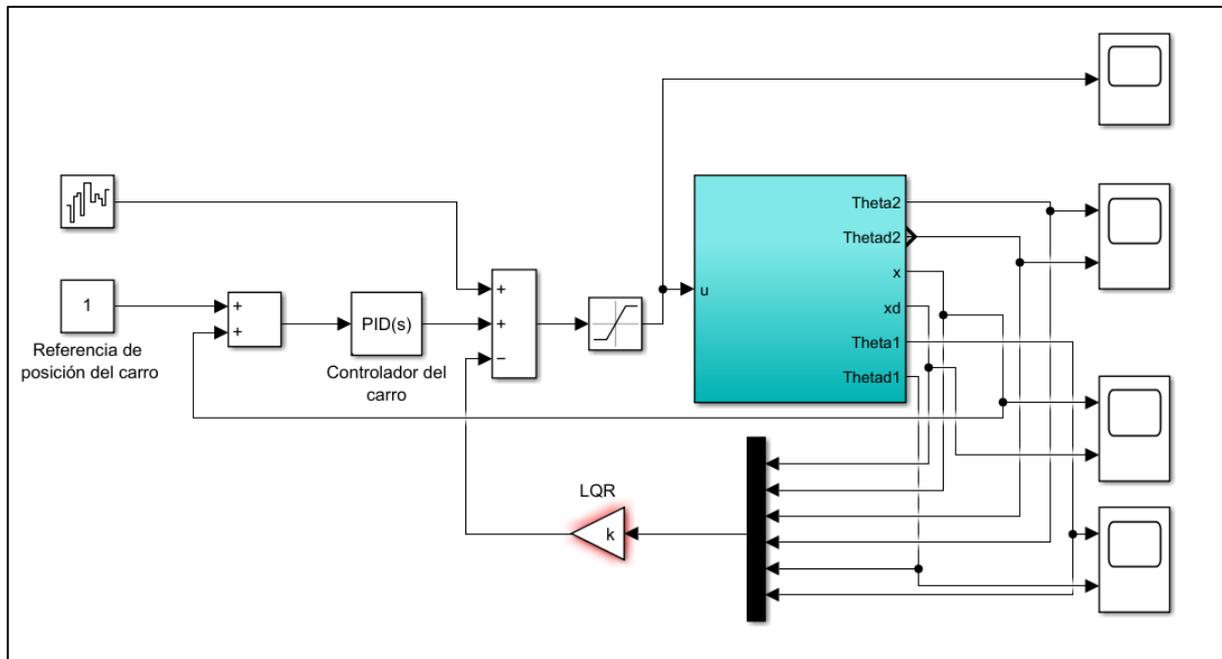


Figura 3.12. Diagrama de bloques con controlador mixto.

Como resultado, el péndulo se estabilizó en 6 segundos, con tan solo 2 sobreimpulsos menores. Ambos eslabones oscilan dentro del rango de $\pm 0.2 \text{ rad}$ y el movimiento que tiene que hacer el carro está dentro del rango de 0.15 metros . A pesar de que el diagrama de bloques es más complejo en su estructura, tiene una mejor respuesta dinámica, que favorece la estabilización del sistema en un tiempo corto.

También es posible implementar un controlador PID para cada componente y un LQR en general de todo el sistema, para lograr mejor precisión al momento de estabilizar el sistema. No obstante, esta configuración no es recomendable, ya que la carga computacional se incrementa y puede ocurrir un embotellamiento de tareas en el Arduino. Esto significa que la planta envíe una tarea, cuando aún no se ha terminado de ejecutar una tarea anterior.

CAPÍTULO 4

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una vez concluidas las simulaciones pertinentes y el ensamble del prototipo del mecanismo del péndulo doble invertido, se logró diseñar el sistema de control para la implementación de estrategias de control avanzado, para probar la estabilidad del péndulo. Sin embargo, el sistema de control sólo consiguió estabilizar el péndulo en un entorno virtual, a pesar de que lo hizo en las condiciones más críticas. Por lo tanto, el análisis dinámico de cada componente sólo se realizó en base a la respuesta obtenida durante la simulación.

4.1 Conclusiones

La estimación de los parámetros del motor fue precisa y dio como resultado que las gráficas de simulación y realidad coincidan en un 95% luego de las iteraciones realizadas por Matlab. Esto no ocurrió en el experimento de la estimación de parámetros del mecanismo, donde las gráficas apenas coincidieron en un 75%, es decir, no convergieron por completo. Esto significa que la modelización matemática que representa al mecanismo no es fiel a la dinámica del PDI. El valor más llamativo de todo el sistema fue la masa del carro, que en la realidad tenía un valor de 0.263 kg, pero en la estimación, pesaba 1.22 kg en el punto de máxima convergencia. Es decir, el software de Simulink asignó un valor discrepante para compensar otros errores de la dinámica del sistema.

Con los valores de todos los parámetros en su punto de máxima convergencia se calculó el espacio de estados alrededor del punto de equilibrio, es decir (0 metros, 0 rad, 0 rad) y se realizó un análisis de controlabilidad de las matrices A y B, a través de la función $\text{ctrb}(A,B)$ de Matlab, donde la matriz resultante tenía el mismo rango de la matriz A, es decir, el sistema es totalmente controlable a lo largo del tiempo.

El controlador utilizado en el sistema de control, para la estabilización del PDI fue un Regulador Cuadrático Lineal (LQR) debido a su precisión, adaptabilidad a perturbaciones y eficiencia computacional, a pesar de que tenía una dificultad de implementación moderadamente grande.

En la simulación, ante una perturbación inicial de (0 metros, 0.087 rad, 0.087 rad), el sistema tardó 5 segundos en estabilizar todo el sistema, con una señal de voltaje de

máximo 15 voltios en dirección positiva, esto era lo máximo que la fuente era capaz de entregar, entonces, concordaba con las necesidades del sistema.

Al momento de implementarlo en la planta real, el mecanismo no se comportó de la manera esperada. El movimiento tenía la dirección esperada para poder estabilizar los eslabones, no obstante, la respuesta fue significativamente lenta. Para que el movimiento concordara, necesitaba una fuente de 40 Voltios, lo cual iba en contra de los parámetros del motor escogido. Finalmente, se concluye que a pesar de que el sistema es totalmente controlable a través del tiempo, la implementación del péndulo en la vida real, evidencia que su comportamiento no coincide en su totalidad con la respuesta esperada del sistema. Probablemente debido a efectos no modelados del sistema, como la fricción, o las pérdidas de energía por disipación.

4.2 Recomendaciones

Se recomienda realizar un modelo matemático más apegado a la realidad, que inmiscuya con más precisión los efectos de la fricción. Especialmente la fricción de Coulomb que describe la transición entre la fricción estática y la fricción presente en un elemento que se mueve de forma constante, como es el caso de la unión de la rótula entre eslabón – eslabón.

Al aplicar este nuevo modelo matemático, es necesario realizar un nuevo experimento, que consiste en fijar el eslabón inferior, para simular un péndulo simple y posteriormente, soltarlo desde el reposo en la posición de 90° , para estimar los nuevos parámetros del sistema y garantizar la concordancia de las gráficas simuladas y las gráficas del experimento real.

De igual manera, se recomienda probar la implementación de un controlador mixto, es decir, PID + LQR. El PDI podría compensar errores que son producto de un modelo matemático impreciso, y evitar los impulsos de voltaje pico. No obstante, lo ideal es implementar un PID y un LQR, a pesar de que se podría colocar varios PID para varios componentes, esto sería poco eficiente computacionalmente.

Por otro lado, un análisis de elementos finitos antes de definir la longitud de los eslabones podría ayudar a disminuir las condiciones de inestabilidad. Ya que, entre más largos sean, están más propensos a sufrir deformaciones, afectando también el modelo matemático y que el controlador provoque picos de voltaje.

BIBLIOGRAFÍA

- Abhishek. (2024). *Prototype development for control of permanent magnet synchronous motor and DC motor*. Department Of Mechanical Engineering. Surathkal: National Institute of technology Karnataka. Recuperado el 04 de Enero de 2025
- ARDUINO. (30 de Noviembre de 2024). *Arduino.cl*. Obtenido de Arduino Mega 2560: <https://arduino.cl/producto/arduino-mega-2560/>
- Bahadur, L., Barjeev, T., & Hari, O. (2014). *Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input*. Uttarakhand, India: International Journal of Automation and Computing.
- Becchetti, P. (14 de Noviembre de 2024). *¿Cómo calcular el margen de ganancia de tu emprendimiento?* Obtenido de <https://www.tiendanube.com/blog/como-calcular-el-margen-de-ganancia/>
- Beer, F., Johnston, R., Mazurek, D., & Eisenberg, E. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: estática* (Vol. 9ed). Ciudad de México: McGraw-Hill Companies.
- Campbell, S., & Crawford, S. (2022). *Friction and the inverted pendulum stabilization problem*. Department of applied mathematics. Ontario: University of Waterloo, Canada. Recuperado el 25 de Enero de 2025
- Corona, L., Abarca, G., & Mares, J. (2014). *Sensores y actuadores - Aplicaciones con Arduino* (1st ed.). Azcapotzalco, México DF: Grupo Editorial Patria. Recuperado el 09 de Enero de 2025
- Dareini, A., & Dabreteau, T. (2015). *Control of Double Inverted Pendulum - First Approach*. Karlskrona, Sweden : Blekinge Institute of Technology .
- Fruk, M., Vujisić, G., & Špoljarić, T. (2013). *Parameter Identification of Transfer Functions Using MATLAB*. The Polytechnic of Zagreb. Zagreb, Croatia: Department of Electrical Engineering. Recuperado el 12 de Enero de 2025
- Gaona, J., & Niño, W. (2022). *Diseño de un sistema de control avanzado para un péndulo invertido doble lineal*. Facultad de Ingenierías - Programa de ingeniería Mecatrónica. Bucaramanga: Universidad Autónoma de Bucaramanga. Recuperado el 04 de Enero de 2025

- Garcia, M. (1999). *Stability, scaling, and chaos in passive - dynamic gait models*. Nueva York: Cornell University. Recuperado el 04 de Enero de 2025
- Guevara, C. (23 de Noviembre de 2016). *Introducción al análisis de la respuesta transitoria de sistemas de control análogos mediante Matlab y Simulink*. Recuperado el 04 de Enero de 2025, de Universidad Cooperativa de Colombia: <http://dx.doi.org/10.16925/greylit.1906>
- Luna, P., & Tenesaca, T. (2007). *Diseño e implementación de un emulador para el sistema de diagnóstico de ESP con un microcontrolador*. Facultad de Ciencia y Tecnología - Escuela de Ingeniería Electrónica. Cuenca: Universidad del Azuay. Recuperado el 03 de Enero de 2025
- Naylamp. (05 de Noviembre de 2024). *Naylamp Mechatronics*. Obtenido de Polea dentada GT2-w6-20T-6.35. #SKU: 000192: <https://naylampmechatronics.com/cnc-open-source-hw/192-polea-dentada-gt2-20t-635.html>
- Niknezhadi, A. (2008). *Diseño de controladores LQR/LGR para su aplicación en sistemas de pilas de combustible tipo PEM*. Instituto de robótica informática industrial (CSIC - UPC). Barcelona, España: Congreso Nacional de Pilas de Combustible. Recuperado el 12 de Enero de 2025
- NovatronicEc. (02 de Julio de 2020). *Novatronic, Ingeniería de automatización y control*. Obtenido de Diseño y desarrollo, productos, JGB37-520 DC12V: <https://novatronicec.com/index.php/product/motor-con-caja-reductora-jgb37-520-dc12v-320rpm-copia/>
- Palanisamy. (2022). Control Design for Sorting Conveyor System. *Acta mechanica Slovaca*, 24 - 29. doi:10.21496/ams.2020.021
- Quanser. (2020). *Quanser consulting - Individual component Price list*. Quanser consulting. Advanced teaching systems.
- Quiroz, L. (2020). *Software in the loop para la implementación de un sistema de piloto automático para aeronaves de ala fija*. Lima: Universidad de Lima. doi:<https://orcid.org/0000-0003-1517-8963>
- Rambal. (21 de Julio de 2024). *Rambal - automatización y robótica*. Obtenido de Riel Lineal-Perfil 2020 T-Slot 250MM: <https://rambal.com/perfiles-y-accesorios/999-riel-lineal-perfil-2020-t-slot-250mm.html>

SERVIENTREGA. (24 de Enero de 2025). *Servientrega - cotizador online*. Obtenido de <https://www.servientrega.com.ec/Cotizador>

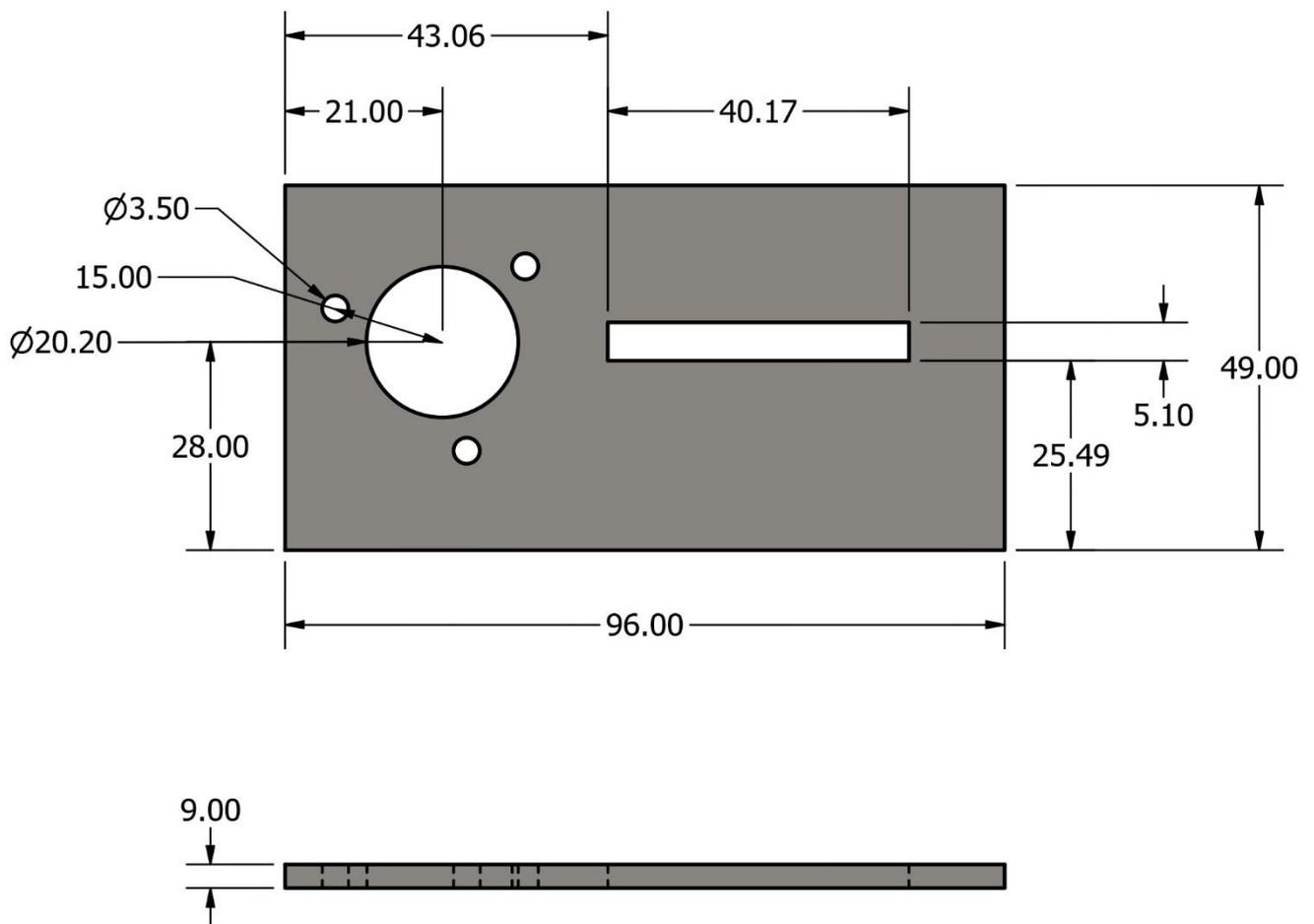
APÉNDICES

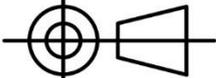
APÉNDICE A

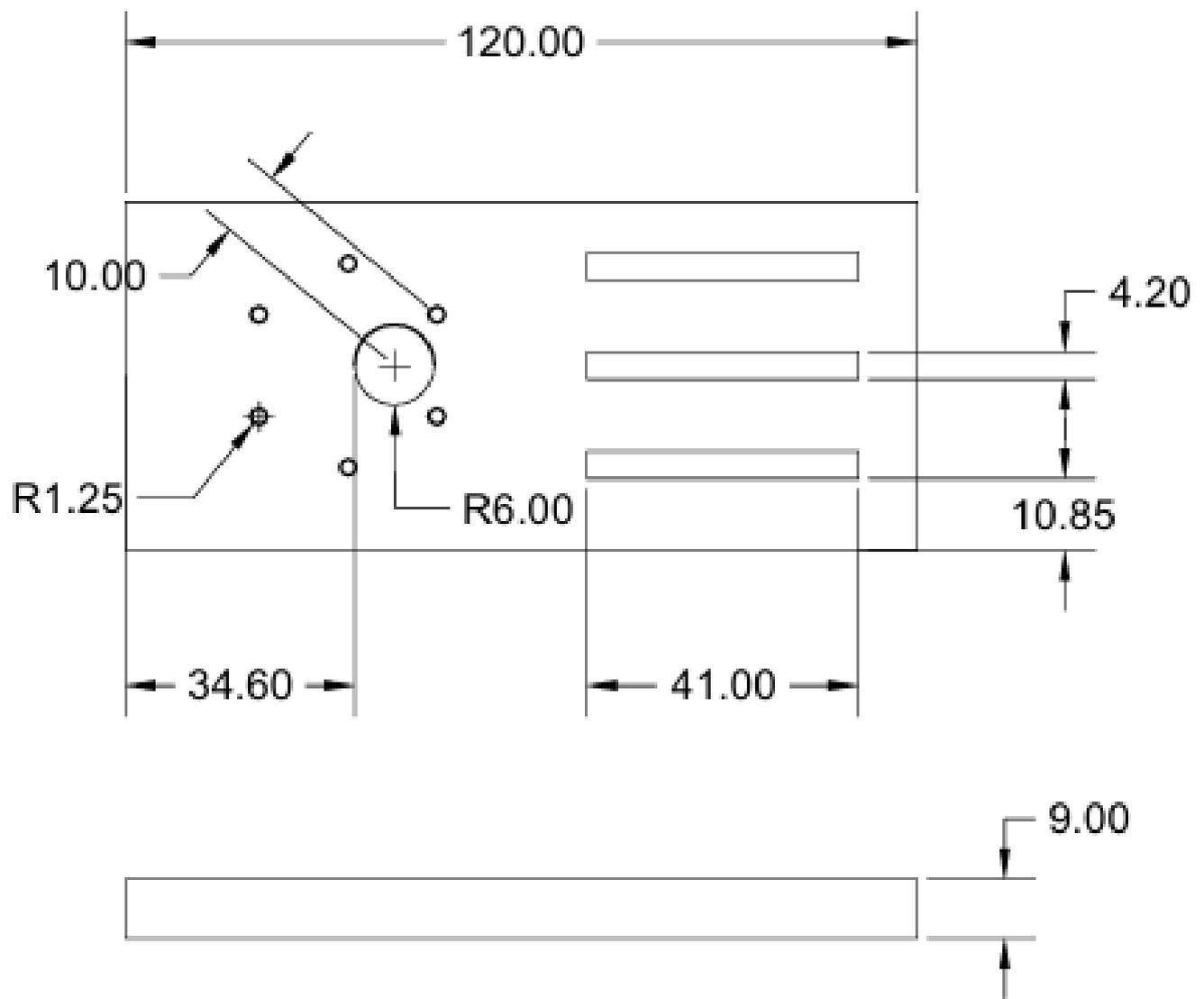
Expediente de planos mecánicos del sistema.

Expediente de planos mecánicos.			
Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			

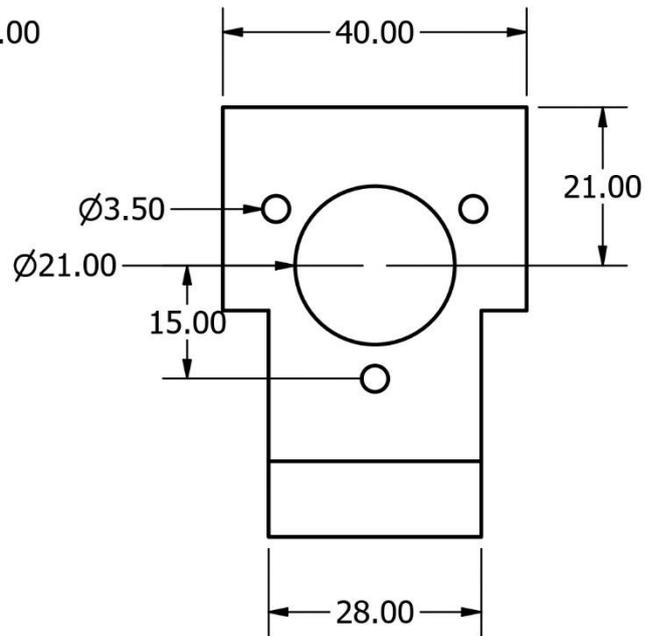
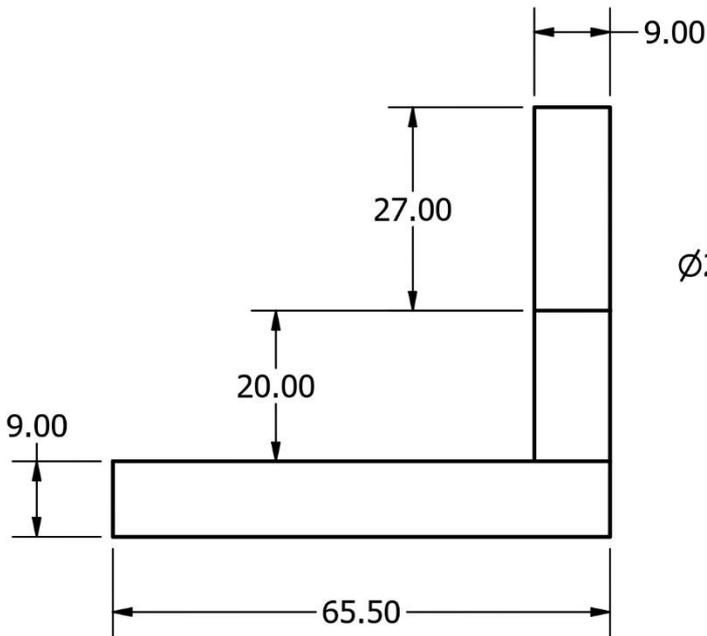
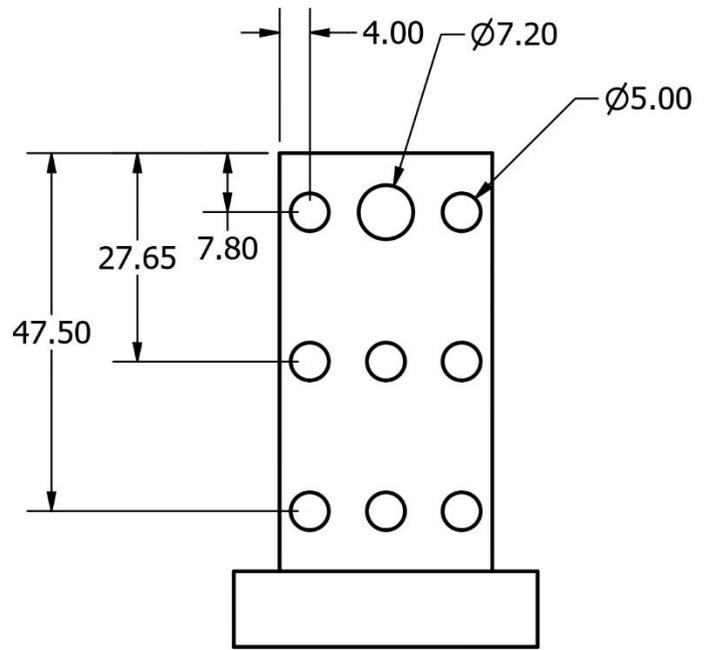
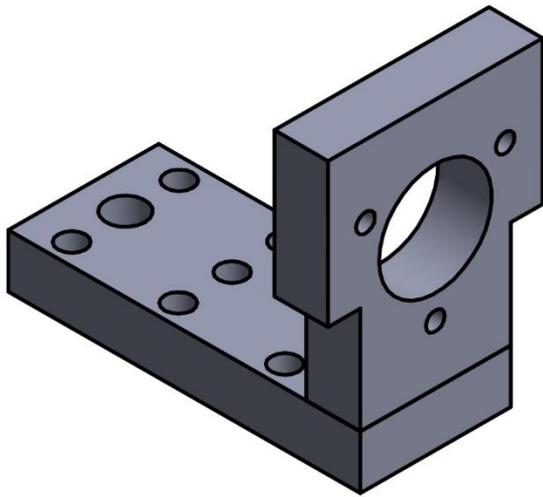
No.	Nombre	Descripción	Tamaño
1	Soporte para Encoder	Placa de acrílico de 9 mm cortada a láser para sostener encoder en el extremo del riel.	A4
2	Soporte de motor JGB37 - 520	Placa de acrílico de 9 mm cortada a láser para sostener actuador en el extremo del riel.	A4
3	Soporte carro - encoder	Dos placas de acrílico, montadas una encima de la otra para formar una "L" que sostenga el encoder y el péndulo	A4
4	Carro móvil	Placa deslizante cuadrada de 20mm	A4
5	Eslabones	(Cantidad: 2) Placas de acrílico de 9 mm que tienen forma de barra, con orificios en sus extremos para acoplar encoders.	A4
6	Encoder	Encoder óptico incremental de 1000 PPR, modelo E6B2 – CWZ6C	A4
7	Perfil de deslizamiento (1 metro de largo)	Perfil en V de aluminio.	A4
8	Motor JGB37 - 520	Motor DC de 12 voltios y velocidad nominal de 960 RPM	A4
9	Ensamble	Ensamble de todos los componentes del péndulo, con cajetín referencial.	A4
10	Diagrama esquemático	Esquema de conexiones eléctricas del sistema	A4



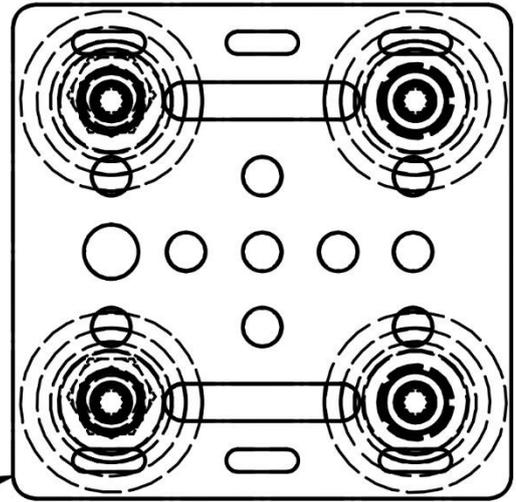
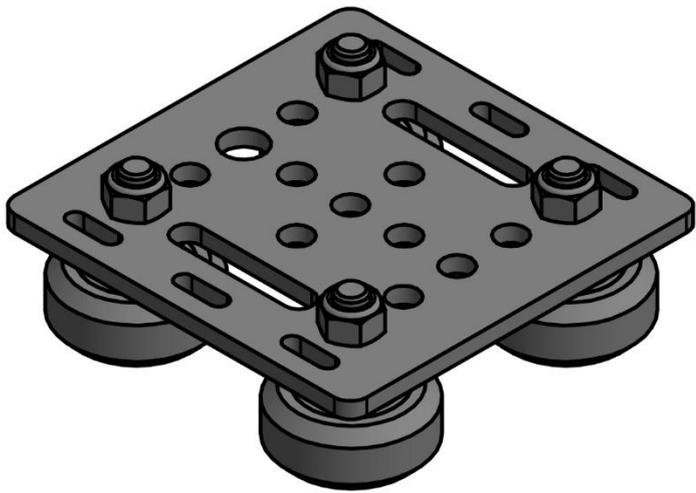
Diseño	Jorge García	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	Acrílico				
Escala	1:1				
		Tamaño	Plano 1	Soporte para encoder	Unidades
		A4			mm



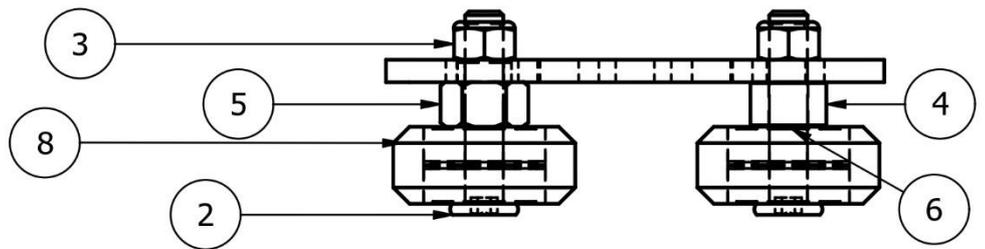
Diseñó	Jorge García	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025				
Material	Acrílico	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Escala	1:1				
		Tamaño	Plano 2	Soporte de motor JGB37 - 520	Unidades
		A4			mm



Diseño	Jorge García	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	Acrílico				
Escala	1:1				
		Tamaño	Plano 3	Soporte carro - encoder	Unidades
		A4			mm

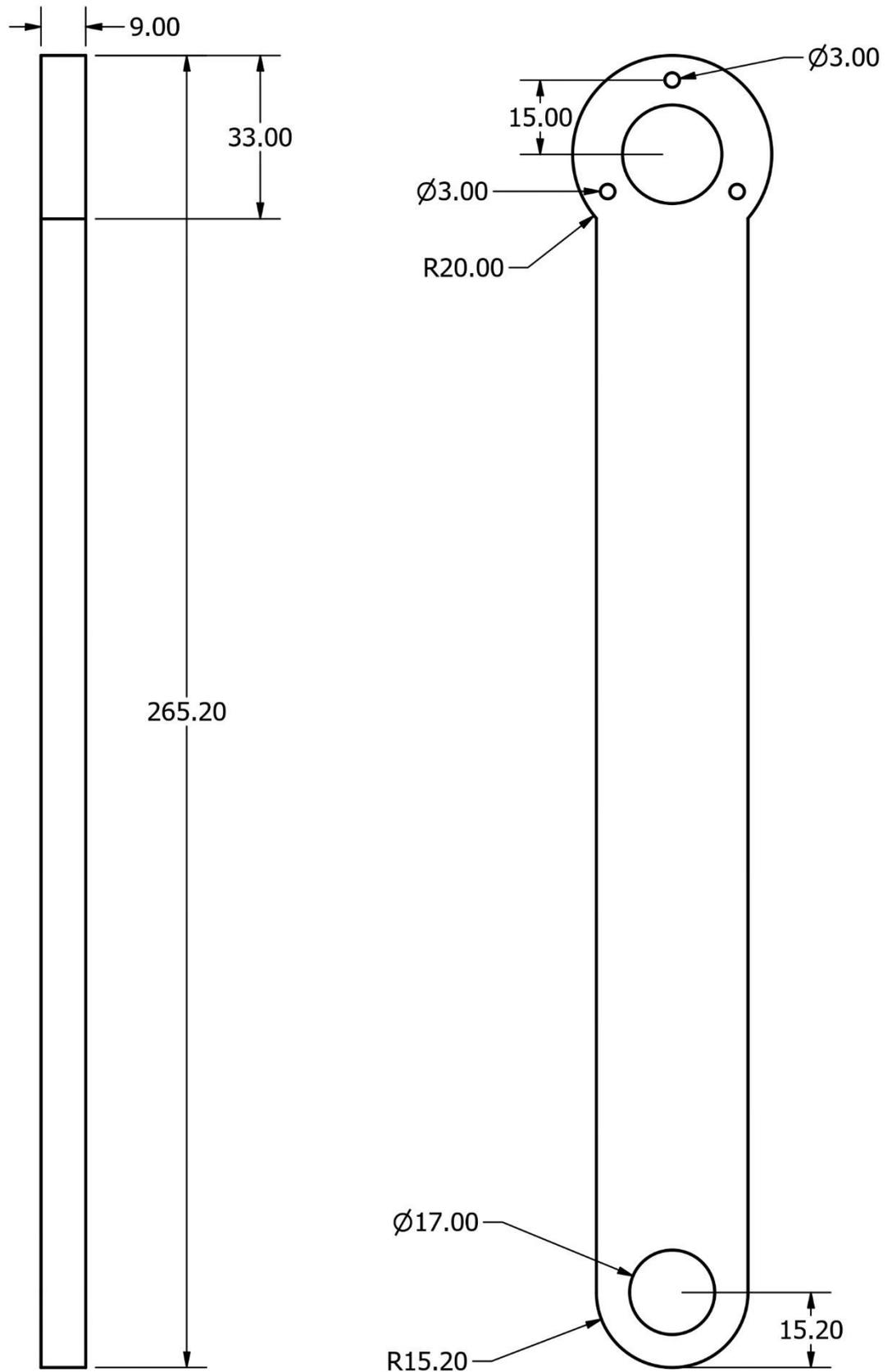


1

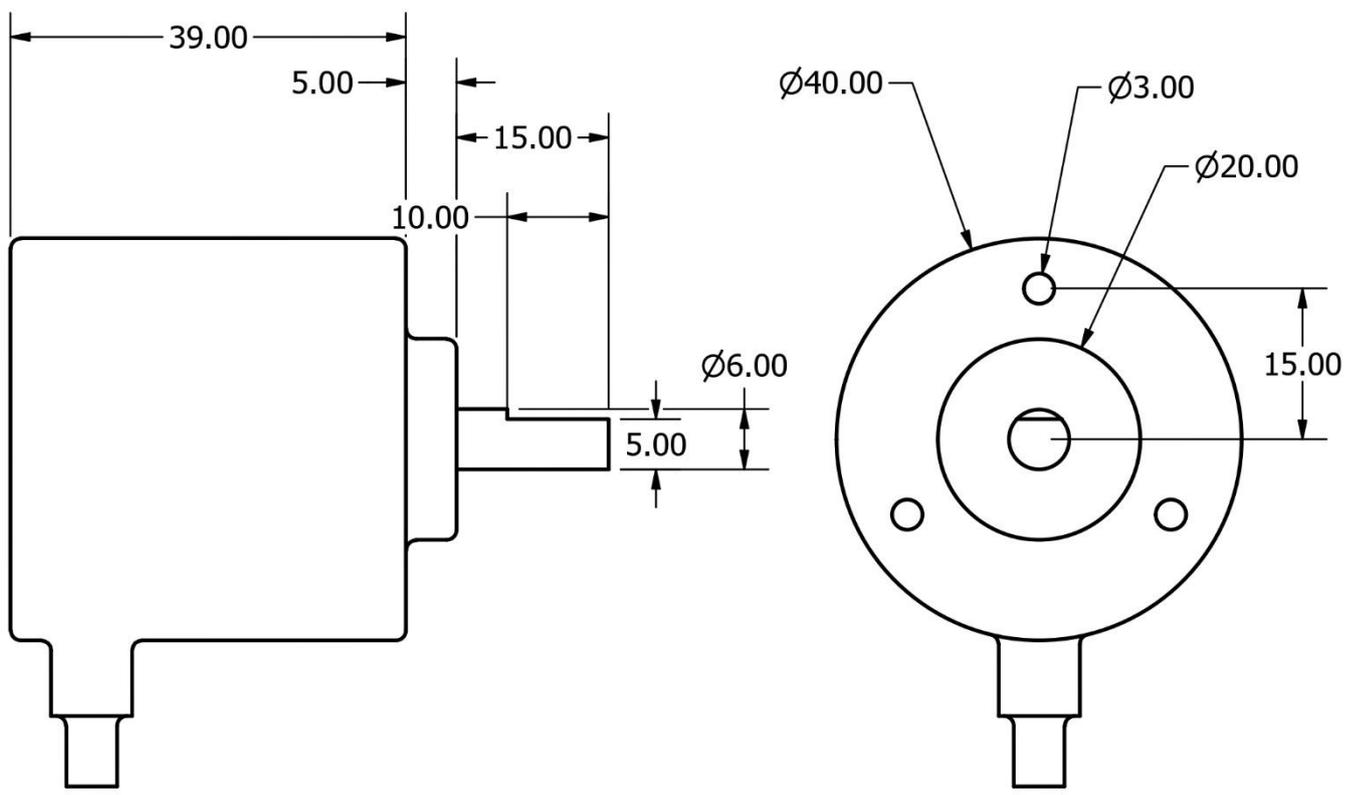
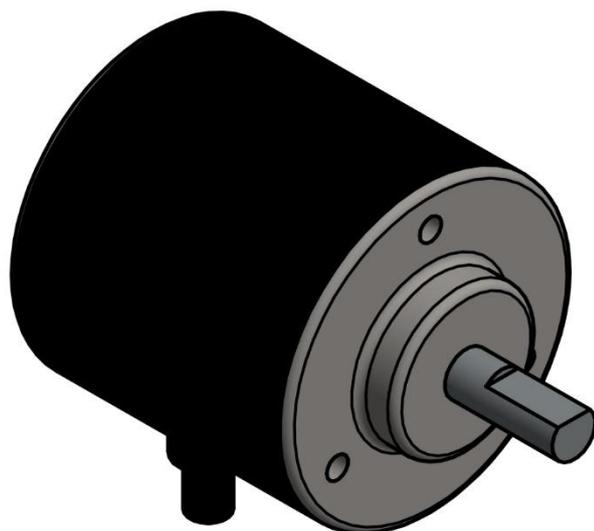


PARTS LIST		
ITEM	QTY	PART NUMBER
1	1	V-Slot Gantry Plate 20mm v1
2	4	Low Profile Screw M5 v1
3	4	Nylon Insert Lock Nut M5 v1
4	2	Aluminum Spacer 6mm v1
5	2	Eccentric Spacer 6mm v1
6	8	Ball Bearing 5 x 16 x 5 v1
7	4	Precision Shim 8 x 5 x 1 v1
8	4	Xtreme Solid V Wheel v1

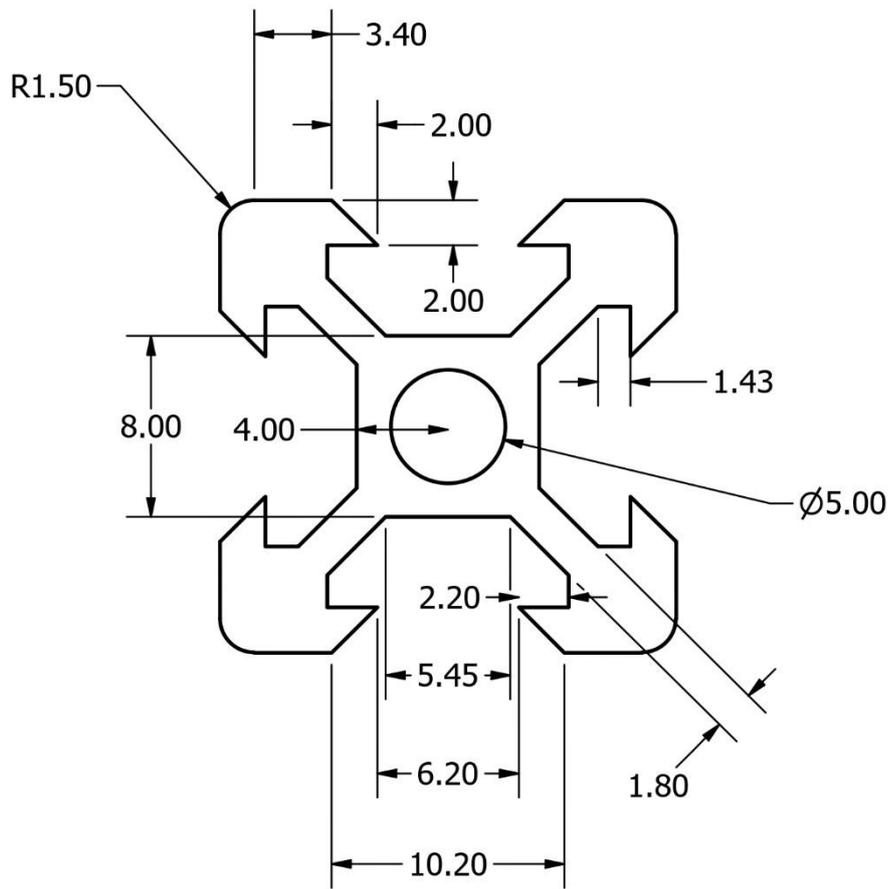
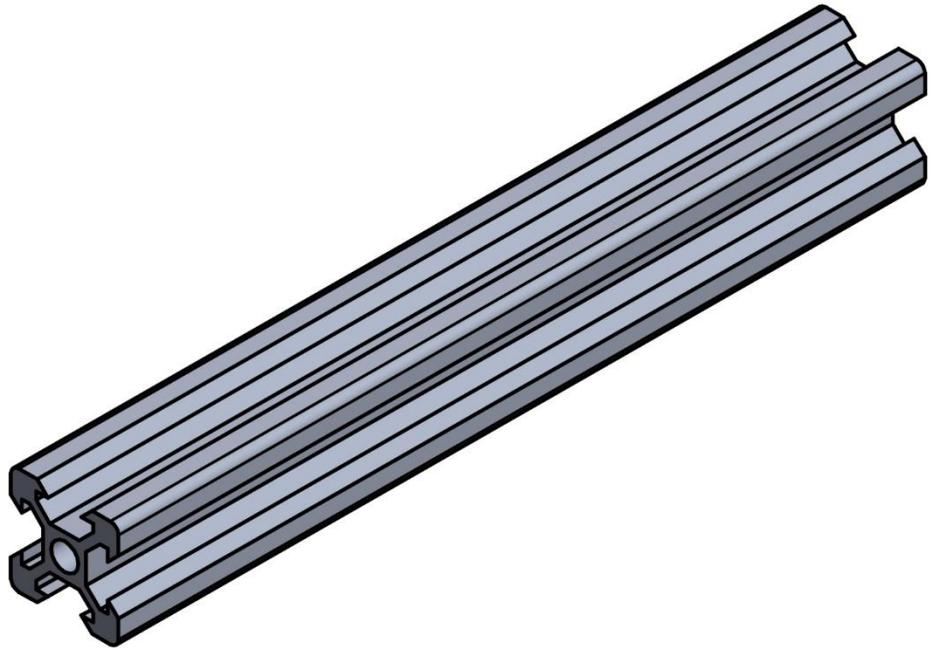
Diseño	N/A	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025				
Material	N/A	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Escala	1:1				
		Tamaño A4	Plano 4	Carro móvil	Unidades mm



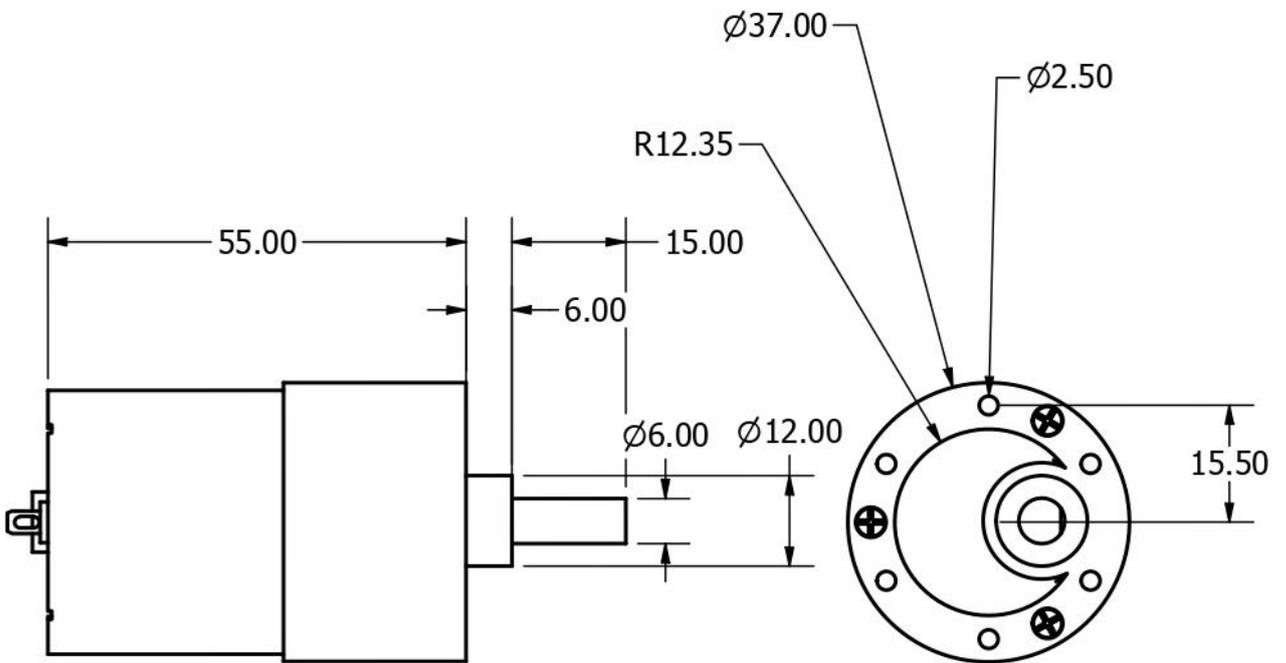
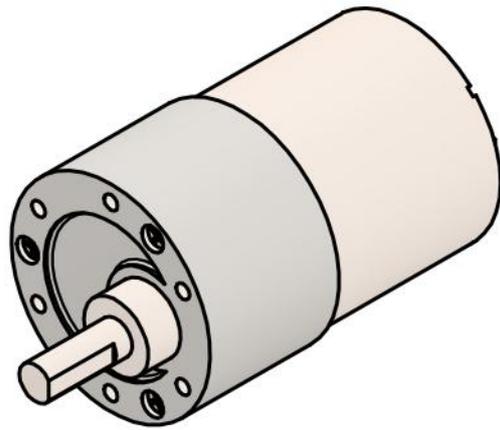
Diseño	Jorge García	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	Acrílico				
Escala	3:5				
		Tamaño	Plano 5	Eslabones	Unidades
		A4			mm



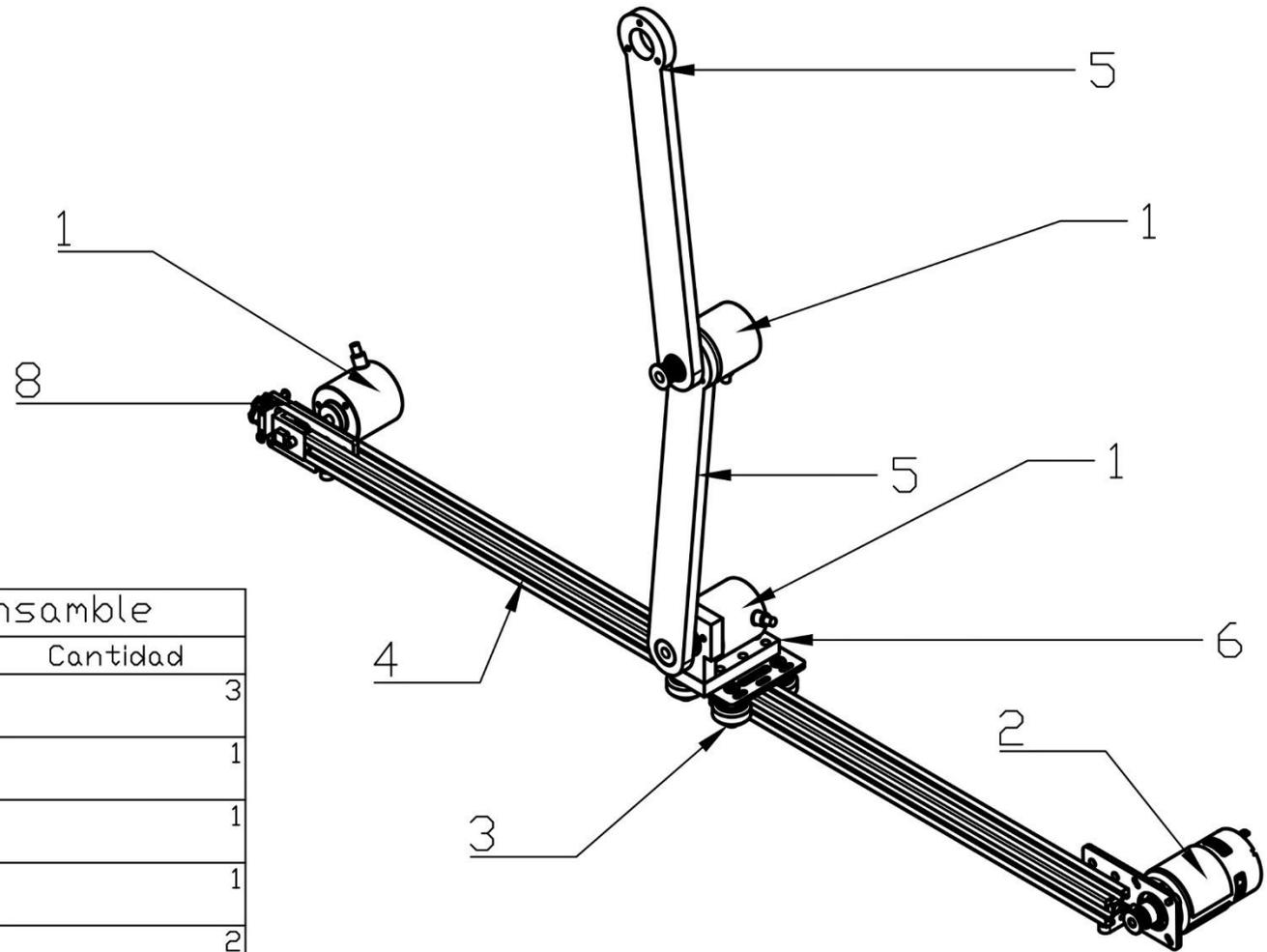
Diseño	N/A	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	N/A				
Escala	4:3				
		Tamaño	Plano 6	Encoder	Unidades
		A4			mm



Diseño	N/A	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	Aluminio				
Escala	1:1				
		Tamaño	Plano 7	Perfil de deslizamiento (1 metro de largo)	Unidades
		A4			mm



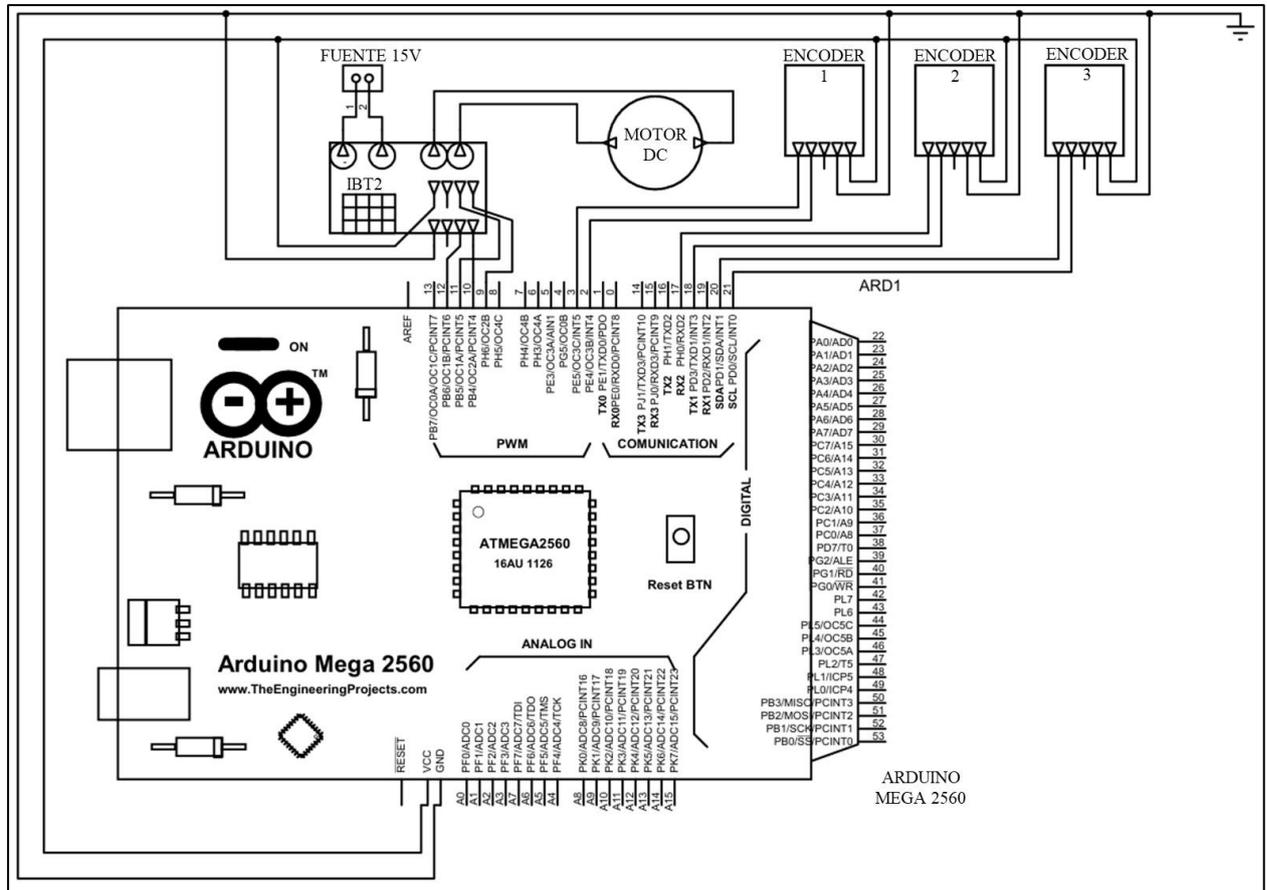
Diseño	N/A	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	N/A				
Escala	1:1				
		Tamaño A4	Plano 8	Motor JGB37 - 520	Unidades mm



Componentes del ensamble		
Item	Componente	Cantidad
1	Encoder E6B2-CW2E	3
2	Motor JGB37-520	1
3	Carro móvil	1
4	Perfil QB2020 - VSLQT	1
5	Eslabones de acrílico	2
6	Base para carro - Encoder	1
7	Base para motor	1
8	Base para encoder de posición lineal	1

Diseño	Jorge García	Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción			
Dibujó	René Erazo				
Fecha	05/Enero/2025	Proyecto: Diseño y análisis dinámico de un péndulo invertido doble aplicado al control de su estabilidad			
Material	N/A				
Escala	1:4				
		Tamaño	Plano 9	Ensamble de péndulo invertido Doble	Unidades
		A4			mm

Plano 10. Diagrama esquemático



APÉNDICE B

Datos referenciales de motor JGB37 – 520 DC12V

型号: JGB37-520				参 数 表								
电压Voltage		空载No Load		负载转矩Load Torque				堵转Stall		减速器Reducer		重量
范围	额定	转速	电流	转速	电流	扭矩	功率	扭矩	电流	减速比	尺寸	重量
Workable	Rated	Speed	Current	Speed	Current	Torque	Output	Torque	Curren		Size	单位
Range	Volt. V	rpm	ma	rpm	ma	kg. cm	W	kg. cm	A	1:00	mm	g
3-9V	6v	1280	300	896	700	0.07	1	0.28	2	6.25	19	144
3-9V	6V	800	300	640	700	0.1	1	0.4	2	10	19	144
3-9V	6V	425	300	340	700	0.18	1	0.72	2	18.8	22	150
3-9V	6V	266	200	212	500	0.3	1	1.2	2	30	22	150
3-9V	6V	142	200	113	400	0.56	1	2.2	2	56	24	158
3-9V	6V	88	100	70	400	0.9	1	3.6	2	90	24	158
3-9V	6V	61	100	48	350	1.3	1	5.2	2	131	26.5	158
3-9V	6V	47	100	37	300	1.68	1	6.7	2	168	26.5	164
3-9V	6V	29	100	23	200	2.7	1	10	2	270	26.5	164
3-9V	6V	16	100	12	150	5	1	20	2	506	29	170
3-9V	6V	10	100	8	150	8	1	32	2	810	29	170
6-15v	12v	960	100	672	200	0.1	0.8	0.4	1.2	6.25	19	144
6-15V	12V	600	100	480	200	0.15	0.8	0.6	1.2	10	19	144
6-15V	12V	319	100	255	170	0.28	0.8	1.1	1.2	18.8	22	150
6-15V	12V	200	60	160	150	0.45	0.8	1.8	1.2	30	22	150
6-15V	12V	107	60	85	150	0.84	0.8	3	1.2	56	24	158
6-15V	12V	66	60	52	100	1.35	0.8	5	1.2	90	24	158
6-15V	12V	45	60	36	100	1.9	0.8	7	1.2	131	26.5	158
6-15V	12V	35	50	28	100	2.5	0.8	10	1.2	168	26.5	164
6-15V	12V	22	50	18	80	4	0.8	16	1.2	270	26.5	164
6-15V	12V	12	50	10	80	7.5	0.8	30	1.2	506	29	170
6-15V	12V	7	50	5.6	80	12	0.8	48	1.2	810	29	170
12-30v	24v	960	35	672	150	0.15	0.7	0.6	0.8	6.25	19	144
12-30V	24V	600	35	480	150	0.2	0.7	0.8	0.8	10	19	144
12-30V	24V	319	35	255	150	0.37	0.7	0.15	0.8	18.8	22	150
12-30V	24V	200	35	160	120	0.6	0.7	2.4	0.8	30	22	150
12-30V	24V	107	35	85	120	1	0.7	4	0.8	56	24	158
12-30V	24V	66	35	52	100	1.8	0.7	7	0.8	90	24	158
12-30V	24V	45	35	36	80	2.5	0.7	10	0.8	131	26.5	158
12-30V	24V	35	30	28	60	3.3	0.7	13	0.8	168	26.5	164
12-30V	24V	22	30	18	50	5	0.7	20	0.8	270	26.5	164
12-30V	24V	12	30	10	40	10	0.7	40	0.8	506	29	170
12-30V	24V	7	30	5.6	40	16	0.7	64	0.8	810	29	170

APÉNDICE C

Datasheet de Encoder incremental E6B2 – CWZ6C (1000PPR)

Incremental 40-mm-dia. Rotary Encoder

E6B2-C

CSM_E6B2-C_DS_E_6_3

General-purpose Encoder with External Diameter of 40 mm



- Incremental model
- External diameter of 40 mm.
- Resolution of up to 2,000 ppr.



Be sure to read *Safety Precautions* on page 4.

For the most recent information on models that have been certified for safety standards, refer to your OMRON website.

Ordering Information

Encoders [Refer to *Dimensions* on page 5.]

Power supply voltage	Output configuration	Resolution (pulses/rotation)	Model
5 to 24 VDC	NPN open-collector output	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600	E6B2-CWZ6C (resolution) 0.5M Example: E6B2-CWZ6C 10P/R 0.5M
		720, 800, 1,000, 1,024 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	
12 to 24 VDC	PNP open-collector output	100, 200, 360, 500, 600	E6B2-CWZ5B (resolution) 0.5M Example: E6B2-CWZ5B 100P/R 0.5M
		1,000 2,000	
5 to 12 VDC	Voltage output	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600	E6B2-CWZ3E (resolution) 0.5M Example: E6B2-CWZ3E 10P/R 0.5M
		1,000 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	
5 VDC	Line-driver output	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600	E6B2-CWZ1X (resolution) 0.5M Example: E6B2-CWZ1X 10P/R 0.5M
		1,000, 1,024 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	

Accessories (Order Separately) [Refer to *Dimensions* on *Rotary Encoder Accessories*.]

Name	Model	Remarks
Couplings	E69-C06B	Provided with the product.
	E69-C68B	Different end diameter
	E69-C610B	Different end diameter
	E69-C06M	Metal construction
Flanges	E69-FBA	---
	E69-FBA02	E69-2 Servo Mounting Bracket provided.
Servo Mounting Bracket	E69-2	---

Ratings and Specifications

Item	Model	E6B2-CWZ6C	E6B2-CWZ5B	E6B2-CWZ3E	E6B2-CWZ1X
Power supply voltage		5 VDC -5% to 24 VDC +15%, ripple (p-p): 5% max.	12 VDC -10% to 24 VDC +15%, ripple (p-p): 5% max.	5 VDC -5% to 12 VDC +10%, ripple (p-p): 5% max.	5 VDC ±5%, ripple (p-p): 5% max.
Current consumption *1		0.6 W max. (80 mA max.)	0.8 W max. (100 mA max.)	0.6 W max. (100 mA max.)	160 mA max.
Resolution (pulses/rotation)		10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 720, 800, 1,000, 1,024, 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	100, 200, 360, 500, 600, 1,000, 2,000	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 1,000, 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 1,000, 1,024, 1,200, 1,500, 1,800, 2,000
Output phases		Phases A, B, and Z			Phases A, \bar{A} , B, \bar{B} , Z, and \bar{Z}
Phase difference between outputs		90°±45° between A and B (1/4 T ± 1/8 T)			
Output configuration		NPN open-collector output	PNP open-collector output	Voltage output (NPN output)	Line driver output *2
Output capacity		Applied voltage: 30 VDC max. Sink current: 35 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at sink current of 35 mA)	Applied voltage: 30 VDC max. Source current: 35 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at source current of 35 mA)	Output resistance: 2 kΩ Sink current: 20 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at sink current of 20 mA)	AM26LS31 equivalent Output current High level: $I_o = -20$ mA Low level: $I_s = 20$ mA Output voltage: $V_o = 2.5$ V min. $V_s = 0.5$ V max.
Maximum response frequency *3		100 kHz	50 kHz	100 kHz	
Rise and fall times of output		1 μs max. (Control output voltage: 5 V, Load resistance: 1 kΩ, Cable length: 2 m max.)	1 μs max. (Cable length: 2 m max., Sink current: 10 mA)		0.1 μs max. (Cable length: 2 m max., $I_o = -20$ mA, $I_s = 20$ mA)
Starting torque		0.98 mN·m max.			
Moment of inertia		1×10 ⁻⁶ kg·m ² max.; 3 × 10 ⁻⁷ kg·m ² max. at 600 P/R max.			
Shaft loading	Radial	30 N			
	Thrust	20 N			
Maximum permissible speed		6,000 r/min			
Protection circuits		Power supply reverse polarity protection, Load short-circuit protection			---
Ambient temperature range		Operating: -10 to 70°C (with no icing), Storage: -25 to 85°C (with no icing)			
Ambient humidity range		Operating/Storage: 35% to 85% (with no condensation)			
Insulation resistance		20 MΩ min. (at 500 VDC) between current-carrying parts and case			
Dielectric strength		500 VAC, 50/60 Hz for 1 min between current-carrying parts and case			
Vibration resistance		Destruction: 10 to 500 Hz, 150 m/s ² or 2-mm double amplitude for 11 min 3 times each in X, Y, and Z directions			
Shock resistance		Destruction: 1,000m/s ² 3 times each in X, Y, and Z directions			
Degree of protection		IEC 60529 IP50			
Connection method		Pre-wired Models (Standard cable length: 500 mm)			
Materials		Case: ABS, Main unit: Aluminum, Shaft: SUS420J2			
Weight (packed state)		Approx. 100 g			
Accessories		Coupling, Hexagonal wrench, Instruction manual			

*1. An inrush current of approximately 9 A will flow for approximately 0.3 ms when the power is turned ON.

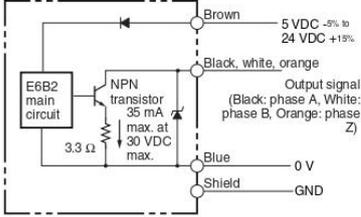
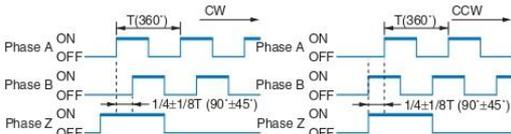
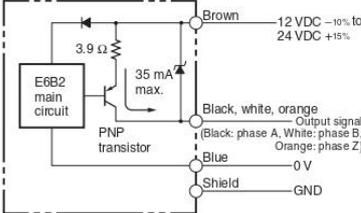
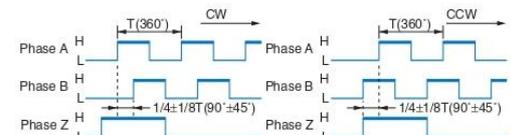
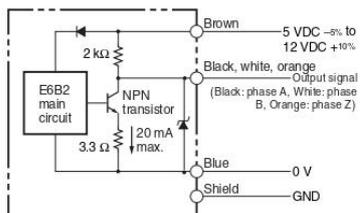
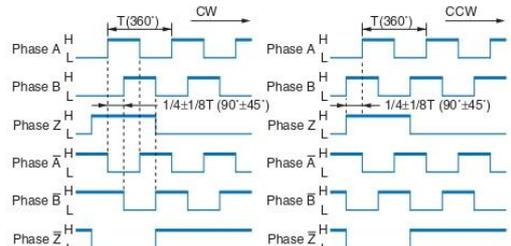
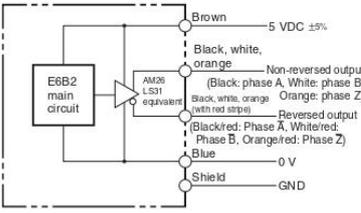
*2. The line driver output is a data transmission circuit compatible with RS-422A and long-distance transmission is possible with a twisted-pair cable. The quality is equivalent to AM26LS31.

*3. The maximum electrical response speed is determined by the resolution and maximum response frequency as follows:

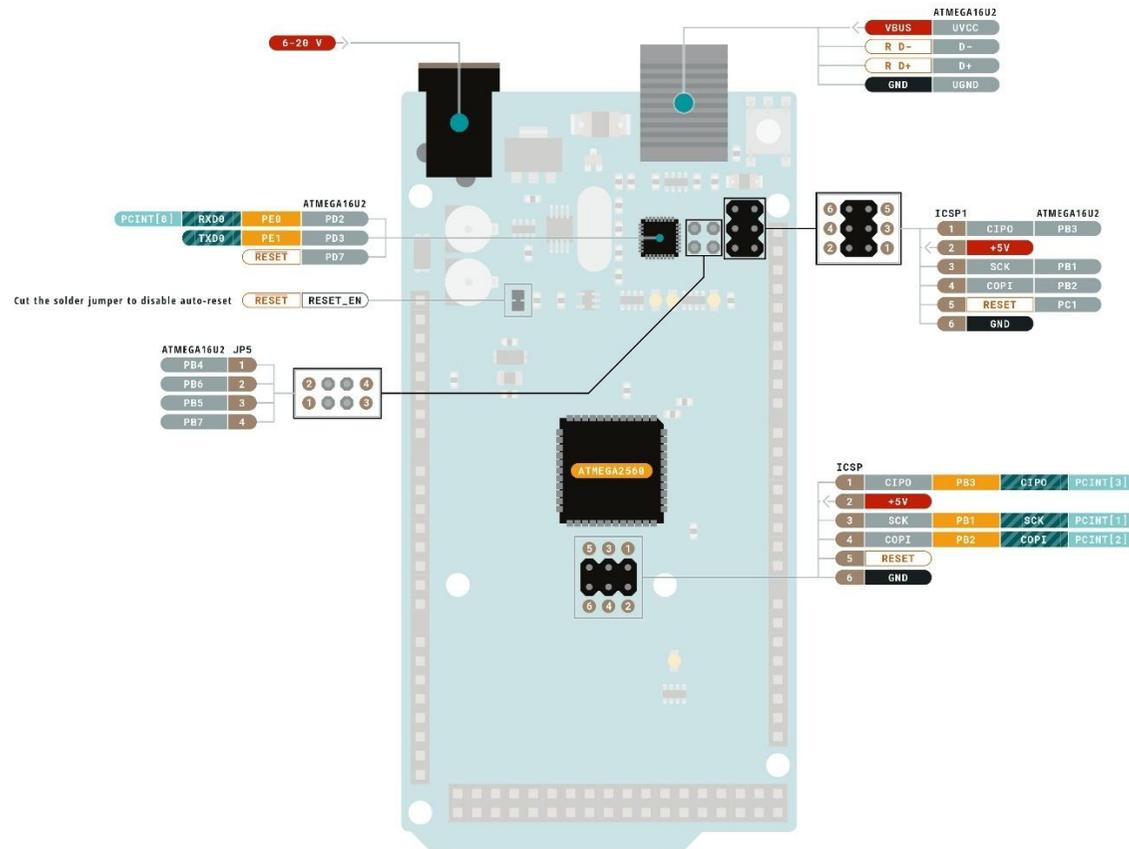
$$\text{Maximum electrical response speed (rpm)} = \frac{\text{Maximum response frequency}}{\text{Resolution}} \times 60$$

This means that the E6B2-C Rotary Encoder will not operate electrically if its speed exceeds the maximum electrical response speed.

I/O Circuit Diagrams

Model/Output Circuits	Output mode	Connection																		
<p>E6B2-CWZ6C</p> 	<p>E6B2-CWZ6C NPN Open-collector Output Model E6B2-CWZ5B PNP Open-collector Output Model</p> <p>Direction of rotation: CW (as viewed from end of shaft) Direction of rotation: CCW (as viewed from end of shaft)</p>  <p>Note: Phase A is $1/4 T \pm 1/8 T$ faster than phase B. Note: Phase A is $1/4 T \pm 1/8 T$ slower than phase B.</p> <p>(The ONs in the above timing chart mean that the output transistor is ON and the OFFs mean that the output transistor is OFF.)</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Color</th> <th>Terminal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Brown</td> <td>Power supply (+Vcc)</td> </tr> <tr> <td>Black</td> <td>Output phase A</td> </tr> <tr> <td>White</td> <td>Output phase B</td> </tr> <tr> <td>Orange</td> <td>Output phase Z</td> </tr> <tr> <td>Blue</td> <td>0 V (common)</td> </tr> </tbody> </table>	Color	Terminal	Brown	Power supply (+Vcc)	Black	Output phase A	White	Output phase B	Orange	Output phase Z	Blue	0 V (common)						
Color	Terminal																			
Brown	Power supply (+Vcc)																			
Black	Output phase A																			
White	Output phase B																			
Orange	Output phase Z																			
Blue	0 V (common)																			
<p>E6B2-CWZ5B</p> 	<p>E6B2-CWZ3E Voltage Output Model</p> <p>Direction of rotation: CW (as viewed from end of shaft) Direction of rotation: CCW (as viewed from end of shaft)</p>  <p>Note: Phase A is $1/4 T \pm 1/8 T$ faster than phase B. Note: Phase A is $1/4 T \pm 1/8 T$ slower than phase B.</p> <p>(“H” and “L” in the diagrams are the output voltage levels of phases A, B, and Z.)</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Color</th> <th>Terminal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Brown</td> <td>Power supply (+Vcc)</td> </tr> <tr> <td>Black</td> <td>Output phase A</td> </tr> <tr> <td>White</td> <td>Output phase B</td> </tr> <tr> <td>Orange</td> <td>Output phase Z</td> </tr> <tr> <td>Blue</td> <td>0 V (common)</td> </tr> </tbody> </table>	Color	Terminal	Brown	Power supply (+Vcc)	Black	Output phase A	White	Output phase B	Orange	Output phase Z	Blue	0 V (common)						
Color	Terminal																			
Brown	Power supply (+Vcc)																			
Black	Output phase A																			
White	Output phase B																			
Orange	Output phase Z																			
Blue	0 V (common)																			
<p>E6B2-CWZ3E</p> 	<p>E6B2-CWZ1X Line Driver Output Model</p> <p>Direction of rotation: CW (as viewed from end of shaft) Direction of rotation: CCW (as viewed from end of shaft)</p>  <p>Note: Phase A is $1/4 T \pm 1/8 T$ faster than phase B. Note: Phase A is $1/4 T \pm 1/8 T$ slower than phase B.</p> <p>(“H” and “L” in the diagrams are the output voltage levels of phases A, B, and Z.)</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Color</th> <th>Terminal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Brown</td> <td>Power supply (+Vcc)</td> </tr> <tr> <td>Black</td> <td>Output phase A</td> </tr> <tr> <td>Black/red stripes</td> <td>Output phase A</td> </tr> <tr> <td>White</td> <td>Output phase B</td> </tr> <tr> <td>White/red stripes</td> <td>Output phase B</td> </tr> <tr> <td>Orange</td> <td>Output phase Z</td> </tr> <tr> <td>Orange/red stripes</td> <td>Output phase Z</td> </tr> <tr> <td>Blue</td> <td>0 V (common)</td> </tr> </tbody> </table> <p>Note: Receiver: AM26LS32 equivalent</p>	Color	Terminal	Brown	Power supply (+Vcc)	Black	Output phase A	Black/red stripes	Output phase A	White	Output phase B	White/red stripes	Output phase B	Orange	Output phase Z	Orange/red stripes	Output phase Z	Blue	0 V (common)
Color	Terminal																			
Brown	Power supply (+Vcc)																			
Black	Output phase A																			
Black/red stripes	Output phase A																			
White	Output phase B																			
White/red stripes	Output phase B																			
Orange	Output phase Z																			
Orange/red stripes	Output phase Z																			
Blue	0 V (common)																			
<p>E6B2-CWZ1X</p> 																				

- Note: 1. The shielded cable outer core (shield) is not connected to the inner area or to the case.
 2. The phase A, phase B, and phase Z circuits are all identical.
 3. Normally, connect GND to 0 V or to an external ground.



- Ground
- Power
- LED
- Internal Pin
- SWD Pin
- Digital Pin
- Analog Pin
- Other Pin
- Microcontroller's Port
- Default
- Analog
- Communication
- Timer
- Interrupt
- Sercom

- ▲ **MAXIMUM** current per I/O pin is 20mA
- ▲ **MAXIMUM** current per +3.3V pin is 50mA

VIN: 6-20 V input to the board.

NOTE: CIP0/COPI have previously been referred to as MISO/MOSI



APÉNDICE E

Datasheet de Driver para motor IBT2 – 43A

37225-MD

High Current "H" Bridge Motor Driver

High current "H" bridge module for motor drive applications using dual BTS7960 chips. Built-in temperature & current protection. Logic level inputs to interface to a microcontroller. Only four wires (GND, 5V, RPWM & LPWM) are needed from the microcontroller to the drive module.

Input Voltage:

Motor: 6V-27V

Logic: 5V (From Microcontroller)

Motor & Logic supplies share common Ground.

Maximum current: 43A

Logic level Inputs: 3.3-5V

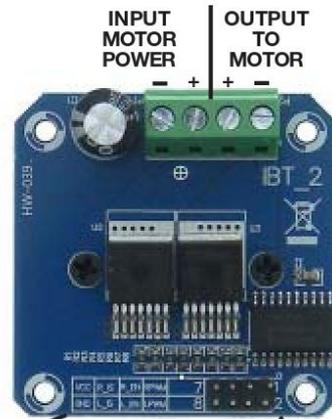
Control method: PWM (Up to 25KHz) or logic level

Duty cycle: 0-100%

Terminal Strip for Motor & Motor Power.

2x4 0.1" Pitch header for logic & 5V

SQ: 2" **H:** 1-1/2" **WT:** .15



Drive Methods

1

Function	Pin #	Control				
R_ & L_EN	3 & 4	H				
RPWM	1	PWM	H	L	H	
LPWM	2	H	PWM	L	H	
MOTOR		CW*	CCW*	STOP	NO#	

2

Function	Pin #	Control				
R & L_EN	3 & 4	PWM				
RPWM	1	H	L	L	H	
LPWM	2	L	H	L	H	
MOTOR		CW*	CCW*	STOP	NO#	

Pin#	Function	Description
1	RPWM	Forward* - Level or PWM - Active High
2	LPWM	Reverse* - Level or PWM - Active High
3	R_EN	Forward* - Level - High Enable - Low Disable
4	L_EN	Reverse* - Level - High Enable - Low Disable
5	R_IS	Forward* - Over Current/Temp Alarm
6	L_IS	Reverse* - Over Current/Temp Alarm
7	Vcc	+5VDC Power Supply (Ex or Microcontroller)
8	Gnd	Power Supply Ground (Ex or Microcontroller)

***NOTE:** Terms "FORWARD" & "REVERSE", MOTOR "+ & -", "CW/CCW" Are Relative To How You Connect Your Motor

#NOTE: AVOID This as it is Possible for Both High Side & Low Side to Be Active Causing A Short Circuit Through The Chip(s) Resulting Distruction of Part.

Information including Drawings, Schematics, Links and Code (Software) Supplied or Referenced in this Document is supplied by MPJA inc. as a service to our customers and accuracy or usefulness is not guaranteed nor is it an Endorsement of any particular part, supplier or manufacturer. Use of information and suitability for any application is at users own discretion and user assumes all risk.

Information Subject to Change Without Notice
All rights are retained by the respective Owners/Author(s)



MARLIN P. JONES & ASSOC., INC.

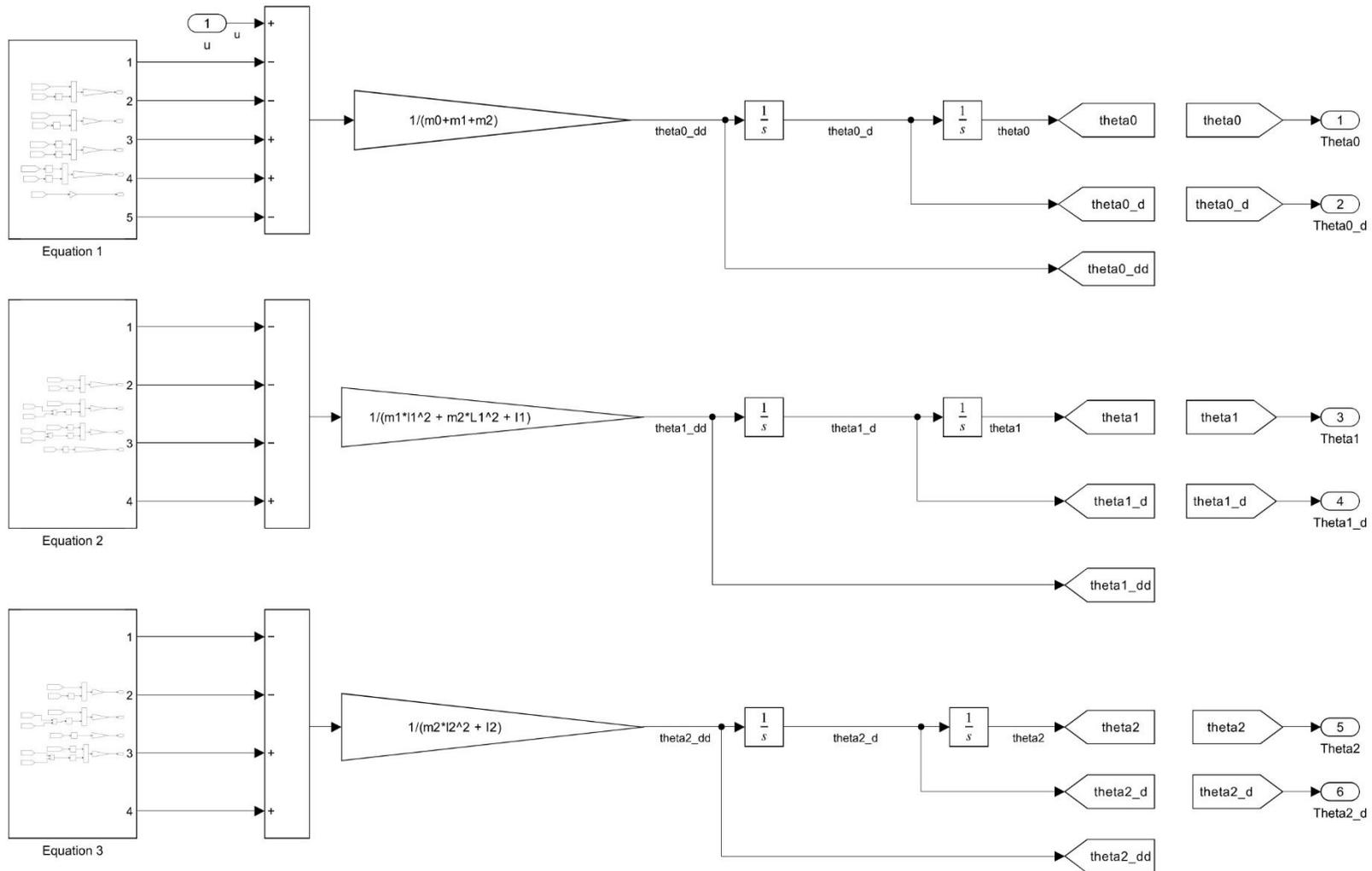
P.O. Box 530400 Lake Park, Fl 33403

800-652-6733 FAX 561-844-8764

WWW.MPJA.COM

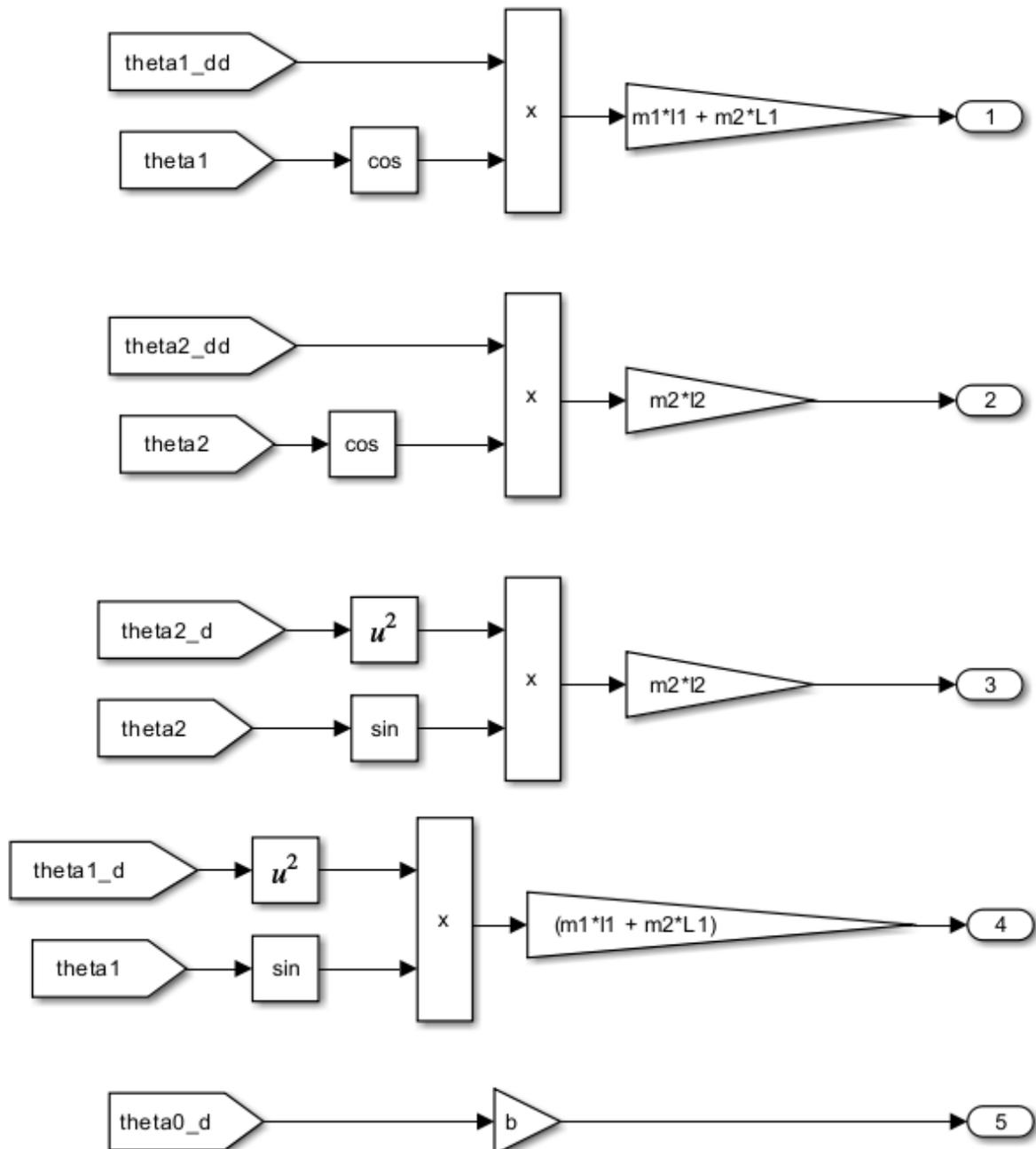
APÉNDICE F

Representación de Ecuaciones No Lineales mediante diagrama de bloques



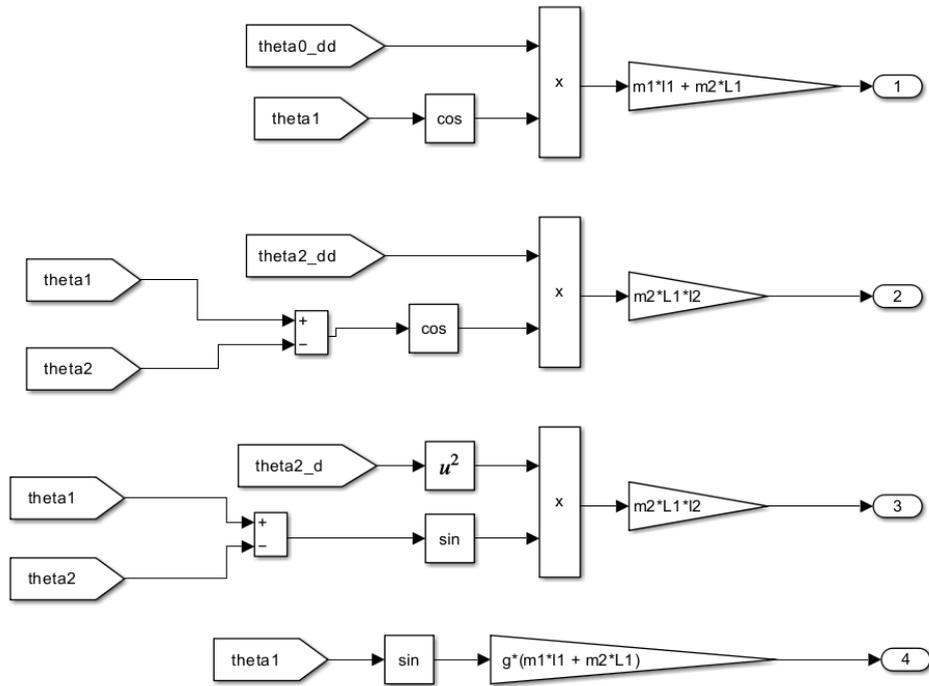
APÉNDICE F.1

Subsistema de Ecuación 1.



APÉNDICE F.2

Subsistema de Ecuación 2.



APÉNDICE F.3

Subsistema de Ecuación 3.

