

Rúbrica

Tema 2

2

Sea $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por que

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}.$$

Determine:

1. La matriz asociada a la transformación lineal, respecto a la base canónica de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
2. El núcleo de la transformación.
3. La imagen de la transformación.
4. Si f es un isomorfismo.

	Resuelve de forma satisfactoria
Determinar la matriz asociada a la transformación lineal	5
Determinar el núcleo de la transformación lineal	5
Determinar la imagen de la transformación lineal	6
Indicar si es o no un isomorfismo	4

Respuesta enviada por el Profesor Nelson Cordoba

Sea la aplicación lineal $f : M_2(\square) \rightarrow M_2(\square)$ definida por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz de la aplicación respecto a la base canónica de $M_2(\square)$
- b) Calcular $\text{Ker}(f)$, una base y su dimensión.
- c) Calcular la dimensión de $\text{Im}(f)$
- d) Determine si es inyectiva, sobreyectiva e isomorfismo

Solución

Se considera la base canónica de $M_2(\mathbf{R})$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

calcula la matriz de la aplicación lineal f hallando las imágenes de estos vectores respecto de la base canónica

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1, 0)_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0)_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_C$$

Colocando por columnas estas imágenes se obtiene la matriz de la aplicación f

$$f_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El núcleo de la aplicación lineal f está formado por los siguientes vectores

$$\text{Ker}(f) = \left\{ A \in M_2(\mathbf{R}) \mid f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix}$$

La matriz A pertenecerá al núcleo si se verifica

$$f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 0=0 \\ x=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0, z=-t, \forall t \in \mathbb{R}$$

Es decir, $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ siendo $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de

$\text{Ker}(f)$ y por tanto, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$

c) Para determinar la dimension de $\text{Im}(f)$ basta estudiar el rango de la matriz de la aplicacion

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 3$$

c) $\dim(\text{Ker}(f)) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ no es inyectiva

$\dim(\text{Im}(f)) = 3 \neq 4 = \dim(M_2(\mathbb{R})) \Rightarrow f$ no es sobreyectiva

Por lo tanto no es isomorfismo

Tema 3

3

Sea $f : M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(X, Y) = f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = X^t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} Y.$$

1. Demuestre que f define un producto interno en $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.

2. Utilice este producto interno para encontrar la proyección ortogonal de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre el $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

	Resuelve de forma satisfactoria
Verificar que f define un producto interno	12
Encontrar la proyección ortogonal de	8

Una matriz A tiene como subespacios propios a los conjuntos $E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$E_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x + z = 0 \text{ y } x + 2w = 0 \right\}$. Determine:

1. El orden de la matriz.
2. Si la matriz es diagonalizable.
3. Si la matriz es simétrica.

	Resuelve de forma satisfactoria
Indicar la dimensión de la matriz	3
Determinar que la dimensión del espacio E_3 es dos	7
Justificar si la matriz es diagonalizable	5
Justificar que no puede ser simétrica	5

- Dado que los espacios propios son subespacios de R^4 se tiene que la matriz es de orden 4.

- Dado que $E_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ entonces se tiene que A es una matriz diagonalizable.

- $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -5$ indica que la matriz no es simétrica.

Inadecuado	En desarrollo	Satisfactorio	Avanzado
En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas	Demuestra satisfactoriamente
0	$0 <$ Calificación ≤ 8	$8 <$ Calificación < 20	20