Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2024	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Segunda	Fecha:	27 de enero de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los problemas debo resolverlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ______________ Paralelo: ________

1. (10 puntos) Resuelva el PVI

$$y'' - 2y' + y = t^2 e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Solución:
La solución general homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

El wronskiano de las soluciones fundamentales es

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t} = e^{2t}.$$

Sean

$$v_1(t) = -\int \frac{te^t t^2 e^t}{e^{2t}}\, dt = -\int t^3\, dt = -\frac{t^4}{4},$$

y

$$v_2(t) = \int \frac{e^t t^2 e^t}{e^{2t}}\, dt = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3}.$$

Entonces, una solución particular la ecuación es

$$y_p(t) = v_1(t)e^t + v_2(t)te^t = -\frac{t^4}{4}e^t + \frac{t^3}{3}te^t = \frac{1}{12}t^4 e^t.$$

Luego, la solución general a la ecuación es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{12}t^4 e^t$$

Para resolver el PVI, primero calculamos $y'(t)$:

$$y'(t) = c_1 e^t + c_2(e^t + te^t) + \frac{1}{12}(4t^3e^t + t^4e^t).$$

Así

$$1 = y(0) = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = c_1,$$

y

$$1 = y'(0) = c_1 e^0 + c_2(e^0 + 0 \cdot e^0) + \frac{1}{12}(4 \cdot 0^3 \cdot e^0 + 0^4 \cdot e^0) = c_1 + c_2 = 1 + c_2 \implies c_2 = 0.$$

Por tanto, la solución al PVI es

$$y(t) = e^t + \frac{1}{12}t^4e^t.$$

Observación: Este problema también podría ser resuelto a través de transformadas de Laplace.

Rúbrica (si usó variación de parámetros):

Halla la solución general homogénea.	1-2 puntos
Usa variación de parámetros para hallar una solución particular.	1–5 puntos
Halla la solución general	1 punto
Resuelve el PVI	1–2 puntos

Rúbrica (si usó transformadas de Laplace):

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1–2 puntos
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–3 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–2 puntos
Resuelve el PVI.	1–2 puntos

2. (10 puntos) Considere la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, x_2 + x_3 - 2x_4, 2x_1 - x_2 + 2x_4).$$

Halle una base para el núcleo de T y una base para la imagen de T.

Solución: Matricialmente, la transformación T toma la forma

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{N}(T)$ si y solo si

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, se deduce que una base para $\mathrm{N}(T)$ es

$$\{(0, 2, 0, 1)\}.]$$

Para hallar una base para la imagen de T, recordemos que la imagen de T es igual al espacio de columnas de la matriz que representa a T; esto es,

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{(1, 0, 2), (1, 1, -1), (1, 1, 0), (-2, -2, 2)\} = \mathrm{gen}\{(1, 0, 2), (1, 1, -1), (1, 1, 0)\}$$

(el vector $(-2, -2, 2)$ es redundante pues $(-2, -2, 2) = -2(1, 1, -1)$). El teorema del núcleo y la imagen implica que $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$, por lo que cualquier conjunto de tres vectores que genere $\mathrm{Im}(T)$ también será base. Por tanto, una base para $\mathrm{Im}(T)$ es

$$\{(1, 0, 2), (1, 1, -1), (1, 1, 0)\}.$$

Rúbrica:

Halla una base para $\mathrm{N}(T)$	1–5 puntos
Halla una base para $\mathrm{Im}(T)$	1–5 puntos

3. (10 puntos) Sea $R_{\pi/6}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que lleva cada vector v al vector que de él resulta por la rotación de ángulo $\pi/6$ radianes alrededor del origen, en dirección contraria a las manecillas del reloj; sea $P_{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que asigna a cada vector v el vector que de él resulta al proyectarlo perpendicularmente sobre la recta $y = -x$. Sea $S_{1/2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que asigna a cada $v \in \mathbb{R}^2$ el vector que se obtiene al reflejar v sobre la recta $y = \frac{1}{2}x$. Halle la matriz de la transformación lineal
$$R_{\pi/6}{}^3 - P_{-1}S_{1/2},$$
respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución: Respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz de $R_{\pi/6}$ es
$$\begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\operatorname{sen}\pi/6 \\ \operatorname{sen}\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix};$$
la matriz de P_{-1} es
$$\frac{1}{1+(-1)^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & (-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix};$$
la matriz de $S_{1/2}$ es
$$\frac{1}{1+(1/2)^2}\begin{bmatrix} 1-(1/2)^2 & 2(1/2) \\ 2(1/2) & (1/2)^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}.$$
Por tanto, la matriz de $R_{\pi/6}{}^3 - P_{-1}S_{1/2}$, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\operatorname{sen}\pi/6 \\ \operatorname{sen}\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\pi/2 & -\operatorname{sen}\pi/2 \\ \operatorname{sen}\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/10 & 7/10 \\ 1/10 & -7/10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/10 & 7/10 \\ 1/10 & -7/10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/10 & -17/10 \\ 9/10 & 7/10 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Rúbrica:

Halla las matrices que representan a $R_{\pi/6}$, P_{-1} y $S_{1/2}$ N(T)	1–4 puntos
Halla la matriz que representa $R_{\pi/6}{}^3 - P_{-1}S_{1/2}$	1–6 puntos

4. (10 puntos) Halle la solución general al sistema de ecuaciones

$$y_1{}' = -2y_1$$
$$y_2{}' = 3y_1 + y_2$$

Solución: La matriz asociada al sistema es

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios son -2 y 1. Los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 1)$ son vectores propios de -2 y 1, respectivamente. Por lo que una la solución general de este sistema es

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 e^{-2t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \end{bmatrix}.$$

Observación: otra forma de resolver este problema es resolver la ecuación $y_1{}' = -2ty_1$, cuya solución general es $y_1(t) = c_1 e^{-2t}$, y luego resolver la ecuación lineal de primer orden

$$y_2{}' = 3c_1 e^{-2t} + y_2.$$

Rúbrica (si usó valores propios y vectores propios):

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1–3 puntos
Calcula correctamente vectores los vectores propios correspondientes	1–4 puntos
Halla la solución general	1–3 puntos

Rúbrica (si desacopló el sistema):

Resuelve la ecuación $y_1' = -2y_1$	1–2 puntos
Sustituye $y_1(t) = c_1 e^{-2t}$ en la segunda ecuación y la resuelve	1–7 puntos
Halla la solución general	1 punto

5. (10 puntos) Considere el oscilador armónico forzado y sin amortiguamiento

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_f t, \ m > 0, \ k > 0,$$

donde F_0 es una constante no nula llamada **amplitud forzada** y ω_f es la **frecuencia forzada**. Halle la solución general del movimiento en el caso que $\omega_f \neq \omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solución: La solución homogéna de esta ecuación es

$$x_h(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t.$$

Como $\omega_0 \neq \omega_f$, el método de los coeficientes indeterminados garantiza una solución particular de la forma

$$x_p(t) = A \cos \omega_f t + B \operatorname{sen} \omega_f t.$$

Podemos concluir inmediatamente que $B = 0$, pues en la ecuación no aparece el termino $\dot{x}$. Para hallar A, note que

$$mx_p''(t) + kx_p(t) = F_0 \cos \omega_f t \implies -mA{\omega_f}^2 \cos \omega_f t + kA \cos \omega_f t = F_0 \cos \omega_0 t.$$

Así,

$$A(-m{\omega_f}^2 + k) = F_0 \implies A = \frac{F_0}{-m{\omega_f}^2 + k} = \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - {\omega_f}^2)}.$$

(Como $F_0 \neq 0$, se tiene que $A \neq 0$, por lo que también $-m{\omega_f}^2 + k \neq 0$). Por tanto, la solución general del movimiento es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - {\omega_f}^2)} \cos \omega_f t.$$

Rúbrica:

Halla la solución general homogénea.	1-2 puntos
Usa coeficientes indeterminados para hallar una solución particular.	1–6 puntos
Halla la solución general	1–2 puntos