

AÑO:	2024	PERÍODO:	I PAO	MATERIA:	Cálculo de una variable	Examen:	50
PROFESORES:	Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Carrión L., Cordero M., Díaz R., García E., Hernández C., Laveglia F., López E., Mejía M., Ramos M., Toledo X., Valdiviezo J.				Lección:	35	
EVALUACIÓN:	PRIMERA		FECHA:	01/julio/2024		Quiz:	10
						Deber:	5
						Total:	100

1. (6 PUNTOS) Para cada literal, obtenga $\frac{d^2y}{dx^2}$ y exprese la en forma simplificada:

(a) (3 PUNTOS) $y = x^\pi + \pi^x$; $x > 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^\pi) + \frac{d}{dx}(\pi^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln(\pi)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pi \cdot \frac{d}{dx}(x^{\pi-1}) + \ln(\pi) \cdot \frac{d}{dx}(\pi^x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pi \cdot (\pi - 1)x^{\pi-2} + \ln(\pi) \cdot \pi^x \ln(\pi)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \pi(\pi - 1)x^{\pi-2} + \pi^x \ln^2(\pi)}$$

(b) (3 PUNTOS) $y = \arcsen(x)$; $x \in (-1, 1)$

Solución:

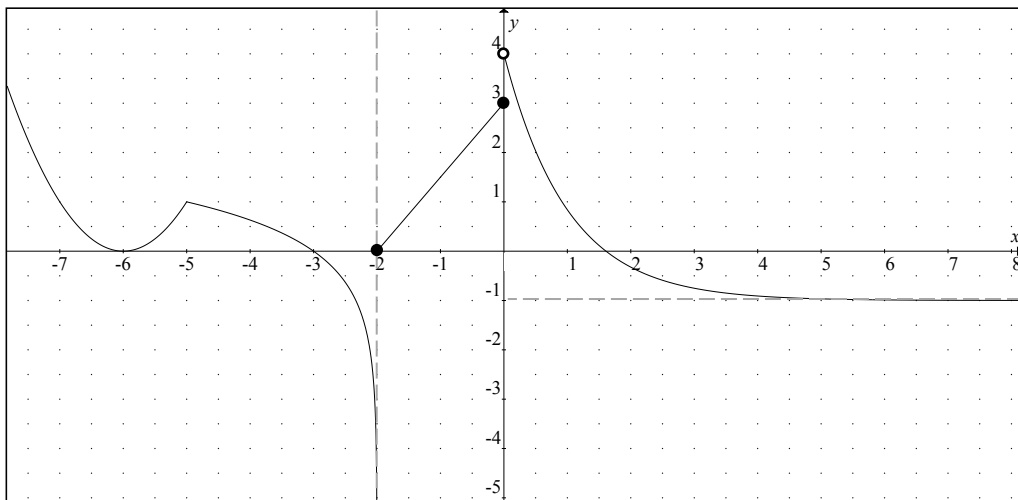
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-3/2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}$$

2. (5 PUNTOS) Dada la gráfica de la función de variable real f .



Calcule el valor de L , siendo:

$$L = \frac{\left[\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x-1) \right) \right]^2}{f' \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)}$$

Solución:

Cuando x se acerca a 0 tomando valores ligeramente menores, esto es, x se acerca a 0 por la izquierda, se observa gráficamente que la función es continua por la izquierda, por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 3$$

La expresión $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x-1)$ es igual a $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$. Cuando x se acerca a -5 tomando valores ligeramente mayores, esto es, x se acerca a -5 por la derecha, se observa gráficamente que la función es continua por la derecha, por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = f(-5) = 1$$

Observe gráficamente que la función tiene una asíntota horizontal en $y = -1$, cuando x tiende a $+\infty$, por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

Debido al cálculo previo, el valor $f' \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ representa la evaluación de la primera derivada de la función en $x = -1$, por lo que:

$$f' \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = f'(-1)$$

El elemento del dominio $x = -1$ pertenece a un segmento de recta cuya pendiente m se puede calcular tomando en consideración los pares ordenados que son extremos de dicho segmento, $P_1(-2, 0)$ y $P_2(0, 3)$, por lo que:

$$m = \frac{3 - 0}{0 - (-2)} = \frac{3}{2}$$

Dado que la pendiente de la recta tangente $m_T|_{x=-1}$ es igual a la primera derivada de la función evaluada en ese punto y ésta coincide con la pendiente m , se establece que:

$$f'(-1) = m_T|_{x=-1} = m = \frac{3}{2}$$

Reemplazando:

$$L = \frac{\left[\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x-1) \right) \right]^2}{f' \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)}$$

$$L = \frac{(3 - 1)^2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\therefore L = \frac{8}{3}}$$

3. (6 PUNTOS) A partir de las funciones derivables f y g se define la nueva función de variable real h tal que:

$$h(x) = (f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$$

Si $f(-2) = 3$, $f(4) = 2$, $g(2) = -1$, $g(4) = -2$, $f'(-2) = 4$, $f'(4) = 2$, $g'(2) = 5$, $g'(4) = -3$, obtenga la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la función h cuando $x_0 = 4$.

Solución:

Nótese que:
$$h(x) = f(g(x)) - g(f(x))$$

Aplicando la regla de la cadena a cada función compuesta:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) - g'(f(x))f'(x)$$

Se evalúa h' para obtener la pendiente de la recta tangente m_T :

$$\begin{aligned}
 h'(4) &= f'(g(4)) \cdot g'(4) - g'(f(4))f'(4) \\
 h'(4) &= f'(-2) \cdot g'(4) - g'(2)f'(4) \\
 h'(4) &= (4)(-3) - (5)(2) \\
 h'(4) &= -12 - 10 \\
 m_T &= h'(4) = -22
 \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación de la recta tangente, se requiere calcular la ordenada y_0 correspondiente a $x_0 = 4$:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= h(x_0) = h(4) \\
 y_0 &= f(g(4)) - g(f(4)) \\
 y_0 &= f(-2) - g(2) \\
 y_0 &= 3 - (-1) \\
 y_0 &= 4
 \end{aligned}$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE a h , cuando $x_0 = 4$ es:

$$y - 4 = -22(x - 4)$$

La pendiente de la recta normal m_N se calcula así:

$$\begin{aligned}
 m_N &= -\frac{1}{m_T} \\
 m_N &= \cancel{+} \frac{1}{\cancel{-22}} \\
 m_N &= \frac{1}{22}
 \end{aligned}$$

La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a h , cuando $x_0 = 4$ es:

$$y - 4 = \frac{1}{22}(x - 4)$$

4. (5 PUNTOS) Sea la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y el número $c \in \mathbb{R}$, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA:

“Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existe.”

Justificando su respuesta, demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

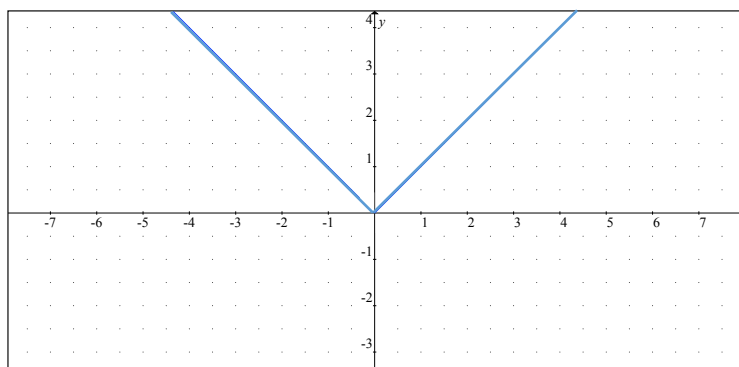
Solución:

La proposición compuesta dada tiene a la condicional como operador lógico. En el antecedente se especifica la definición de continuidad de f en el punto $x = c$, mientras que, en el consecuente se especifica la definición de derivabilidad de la función f en el punto $x = c$.

Del teorema “*Derivabilidad implica continuidad*” se conoce que la continuidad es una condición necesaria, pero no es una condición suficiente para la derivabilidad; por lo tanto, se establece que la proposición dada es FALSA.

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo. Considere la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida así:

$$f(x) = |x|$$



Observe que al ser f la función valor absoluto, es continua para todo valor $c \in \mathbb{R}$. Pero, dado que las derivadas laterales no son iguales en el punto $c = 0$, la primera derivada de la función f no existe en dicho punto.

Nótese que:

$$\underbrace{f \text{ es continua en } c = 0}_{\text{Verdadero}} \rightarrow \underbrace{f \text{ es derivable en } c = 0}_{\text{Falso}} \equiv \text{Falso}$$

\therefore Se verifica, a partir del contraejemplo construido, el valor de verdad FALSO de la proposición.

5. (6 PUNTOS) Dada la función de variable real f , determine el intervalo abierto donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo, siendo:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 10x^2 - x + 2$$

Expresé la respuesta obtenida mediante el concepto topológico de bola abierta.

Solución:

Se deriva por primera vez la función polinomial dada:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 20x - 1$$

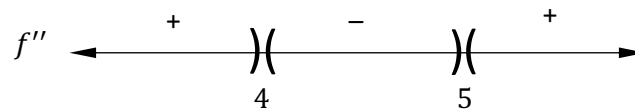
Se deriva por segunda vez la función polinomial dada:

$$f''(x) = x^2 - 9x + 20$$

Para que la gráfica de la función sea cóncava hacia abajo, debe cumplirse que $f''(x) < 0$, por lo que debe resolverse la inecuación cuadrática correspondiente:

$$\begin{aligned} x^2 - 9x + 20 &< 0 \\ (x - 4)(x - 5) &< 0 \end{aligned}$$

Considerando los valores críticos de la inecuación y los intervalos que se definen en la recta numérica, se identifica el signo de la segunda derivada en cada intervalo:



Por lo que:

$$(x - 4)(x - 5) < 0 \quad \rightarrow \quad 4 < x < 5$$

$\therefore f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo abierto $(4, 5)$

Nótese que el intervalo obtenido corresponde a una bola abierta centrada en $\frac{9}{2}$ y de longitud de radio $\frac{1}{2}$. Observe:

$$\begin{aligned} 4 < x < 5 \\ 4 - \frac{9}{2} < x - \frac{9}{2} < 5 - \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} < x - \frac{9}{2} < \frac{1}{2} \\ \left| x - \frac{9}{2} \right| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\therefore f$ es cóncava hacia abajo en la bola abierta $B\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$

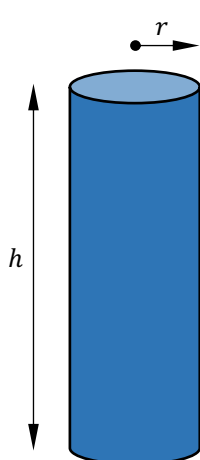
Lo cual también puede ser expresado así:

$$\therefore f \text{ es cóncava hacia abajo en el entorno } N_{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)$$

6. (8 PUNTOS) Se tiene una varilla cilíndrica de metal, la cual se expande cuando se calienta. Después de t segundos, el radio de la sección transversal de la varilla mide x cm y su largo (altura de la varilla cilíndrica) mide $10x$ cm. Si el área de la sección transversal de la varilla aumenta a una razón constante de 0.01π cm²/s:
- (a) (2 PUNTOS) Calcule la razón de cambio de la longitud del radio de la sección transversal de la varilla, cuando $x = 2$ cm.
- (b) (3 PUNTOS) Calcule la razón de cambio del volumen de la varilla, cuando $x = 2$ cm.
- (c) (3 PUNTOS) Calcule la razón de cambio del área de la superficie lateral de la varilla, cuando $x = 2$ cm.

Solución:

Se bosqueja una varilla de forma cilíndrica, se definen las variables pertinentes y se establece la información conocida de las mismas.



Sean:

- A_{ST} : Área de la sección transversal de la varilla (círculo)
 r : Longitud del radio de la sección transversal de la varilla
 V : Volumen de la varilla (cilindro)
 h : Longitud de la altura de la varilla
 A_L : Área de la superficie lateral de la varilla (rectángulo)

Después de t segundos:

$$r = x \text{ cm} \quad h = 10x \text{ cm} \quad \frac{dA_{ST}}{dt} = 0.01\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

Con base en los datos proporcionados, se requiere conocer:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=2 \text{ cm}} \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{x=2 \text{ cm}} \quad \left. \frac{dA_L}{dt} \right|_{x=2 \text{ cm}}$$

Se establecen relaciones entre las variables:

$$\begin{aligned}
 A_{ST} &= \pi r^2 = \pi(x)^2 = \pi x^2 \\
 V &= \pi r^2 h = \pi(x)^2(10x) = 10\pi x^3 \\
 A_L &= 2\pi r h = 2\pi(x)(10x) = 20\pi x^2
 \end{aligned}$$

Se deriva implícitamente A_{ST} , para despejar y obtener $\frac{dx}{dt}$ en el instante indicado:

$$\frac{dA_{ST}}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{dA_{ST}}{dt}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=2} = \frac{1}{2\pi(2)} (0.01\pi) = \frac{1}{2(2)(100)}$$

$$\boxed{\therefore \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=2} = \frac{1}{400} = 0.0025 \text{ cm/s}}$$

Luego, cuando $x = 2 \text{ cm}$, la longitud del radio de la sección transversal de la varilla se está incrementando a razón de 0.0025 cm por cada *segundo* transcurrido.

Se deriva implícitamente V y se reemplaza $\frac{dx}{dt}$ para obtener $\frac{dV}{dt}$ en el instante indicado:

$$\frac{dV}{dt} = 30\pi x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{x=2} = 30\pi(2)^2 \left(\frac{1}{400} \right) = 3\pi(4) \left(\frac{1}{40} \right)$$

$$\boxed{\therefore \left. \frac{dV}{dt} \right|_{x=2} = \frac{3}{10}\pi \text{ cm}^3/\text{s} = 0.3\pi \text{ cm}^3/\text{s}}$$

Así, cuando $x = 2 \text{ cm}$, el volumen de la varilla se está incrementando a razón de $0.3\pi \text{ cm}^3$ por cada *segundo* transcurrido.

Se deriva implícitamente A_L y se reemplaza $\frac{dx}{dt}$ para obtener $\frac{dA_L}{dt}$ en el instante indicado:

$$\frac{dA_L}{dt} = 40\pi x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left. \frac{dA_L}{dt} \right|_{x=2} = 40\pi(2) \left(\frac{1}{400} \right)$$

$$\boxed{\therefore \left. \frac{dA_L}{dt} \right|_{x=2} = \frac{1}{5}\pi \text{ cm}^2/\text{s} = 0.2\pi \text{ cm}^2/\text{s}}$$

Finalmente, cuando $x = 2 \text{ cm}$, el área de la superficie lateral de la varilla se está incrementando a razón de $0.2\pi \text{ cm}^2$ por cada *segundo* transcurrido.

7. (6 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \frac{\arctan^2(x) + x}{1 + x^2}$$

Utilizando diferenciales, calcule el VALOR APROXIMADO de $f(0.01)$ con dos cifras decimales.

Solución:

Para aproximar el valor de $f(0.01)$ mediante el uso de diferenciales, se empleará la siguiente expresión:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Se obtiene la derivada de la función y se establecen los elementos por reemplazar:

$$f(x) = \frac{\arctan^2(x) + x}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2) \frac{d}{dx}(\arctan^2(x) + x) - [\arctan^2(x) + x] \frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2) \left[\frac{2 \arctan(x)}{1 + x^2} + 1 \right] - [\arctan^2(x) + x](2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \arctan(x) + 1 + x^2 - 2x[\arctan^2(x) + x]}{(1 + x^2)^2}$$

Los elementos a considerar para la aproximación, son:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \Delta x = 0.01 \end{array} \right\} \rightarrow x_0 + \Delta x = 0.01$$

Reemplazando en la expresión dada, se tiene que:

$$f(0 + 0.01) \approx f(0) + f'(0)(0.01)$$

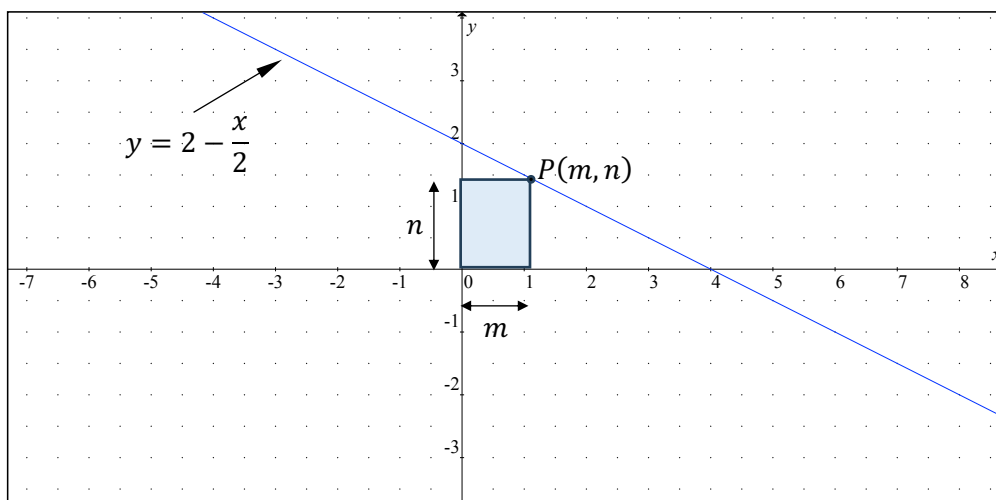
$$f(0.01) \approx \frac{0 + 0}{(1 + 0)^2} + \frac{0 + 1 + 0 - 0}{(1 + 0)^2} (0.01) \approx 0 + 1(0.01) \approx 0.01$$

Por lo tanto, el valor aproximado de $f(0.01)$ es 0.01.

8. (8 PUNTOS) Empleando cálculo diferencial, determine las dimensiones del rectángulo que puede inscribirse en la región del primer cuadrante acotada por la función $y = 2 - \frac{x}{2}$ y los ejes coordenados; de manera tal que el área de su superficie sea máxima. Luego, calcule dicha área máxima.

Solución:

Para representar geoméricamente el problema, se bosqueja, en el plano cartesiano, la gráfica de la función lineal, inscribiendo un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados en la región acotada que se ha especificado y asignando variables para las longitudes de sus lados:



Se establece la función objetivo a optimizar, la cual depende de dos variables:

$$A(m, n) = (l_1)(l_2) = mn$$

Se expresa el área en términos de una sola variable con la respectiva restricción del dominio para que el rectángulo exista:

$$y = 2 - \frac{x}{2} \rightarrow n = 2 - \frac{m}{2}$$

$$A(m) = m \left(2 - \frac{m}{2} \right) = 2m - \frac{m^2}{2} ; m \in (0, 4)$$

Se identifican puntos críticos:

PCF: Por la definición realizada, la función de área no tiene puntos críticos de frontera.

Se deriva por primera vez la función objetivo para analizar la existencia de puntos críticos estacionarios o singulares:

$$A'(m) = 2 - m$$

PCS: La función tampoco tiene puntos críticos singulares, porque la derivada es una función lineal.

PCE: Se analiza la existencia de posibles puntos críticos estacionarios:

$$A'(m) = 0 \rightarrow 2 - m = 0 \rightarrow m = 2$$

Se deriva por segunda vez la función para aplicar el criterio de la segunda derivada y corroborar que en el punto crítico estacionario se presenta un valor extremo máximo:

$$A''(m) = -1$$

$$A''(2) = -1 < 0 \rightarrow \textit{se presenta un valor extremo máximo para A en } m = 2.$$

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo con área de superficie máxima, son:

$$l_1 = m = 2 u$$

$$l_2 = n = 2 - \frac{m}{2} = 2 - 1 = 1 u$$

En consecuencia, el área máxima $A_{m\acute{a}x}$ del rectángulo inscrito es:

$$\boxed{A_{m\acute{a}x} = (2)(1) = 2 u^2}$$