

**ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación**

***“Mitigación del ISI (Interferencia Intersimbólica) sobre un Sistema WiMAX Fijo”***

**TESINA DE SEMINARIO**

Previo a la obtención del Título de:

**INGENIERO EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

Presentado por:

**Byron Alberto Floreano Tumbaco**

**Santiago Adán Jácome Rendón**

Guayaquil – Ecuador

2010

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios por permitirme llegar a conseguir esta meta, a mi mamá por ser mi ejemplo principal para seguir adelante, a mi papá y hermano, por estar ahí junto a mí, a mis profesores por compartir conmigo no solo conocimientos sino también una amistad y en especial al Ing. Hernán Córdova, Ing(a). Rebeca Estrada, Ing. Juan Carlos Avilés, a mis amigos del Grupo IRNI y mis amigos del lab. de telecomunicaciones por su apoyo incondicional.

Byron Floreano Tumbaco

Primero a Dios por permitirme seguir viendo la luz de cada día y a todos en mi familia quienes pusieron cada uno un granito de arena para ayudarme a seguir adelante, pero en especial a mi tía Anabell Rendón, quien fue la primera en ofrecerme su hospitalidad, para que yo pudiera estudiar aquí en la ESPOL.

Santiago Jácome Rendón

## **DEDICATORIAS**

A mis padres y en especial a mi mamá quien en cada paso de mi vida me ha sabido brindar apoyo, comprensión y todo cuanto fuera necesario incondicionalmente para lograr mis metas.

Byron Floreano Tumbaco

A mis padres que han sido mi apoyo, a mi hermana y a toda mi familia; pero muy especialmente a mi madre, quien siempre cuida de mí y me aconseja en cada paso que realizo en la vida.

Santiago Jácome Rendón

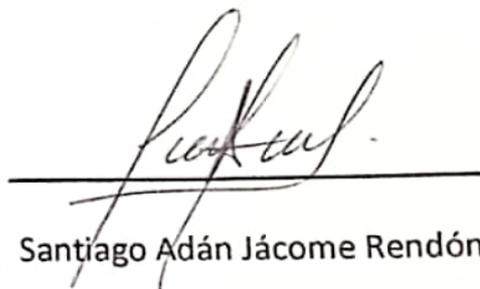
**DECLARATORIA EXPRESA**

“La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en este proyecto nos corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual del mismo, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL”



Byron Alberto Floreano Tumbaco

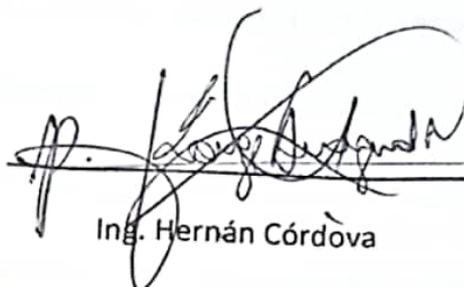
Mat. No. 200222362



Santiago Adán Jácome Rendón

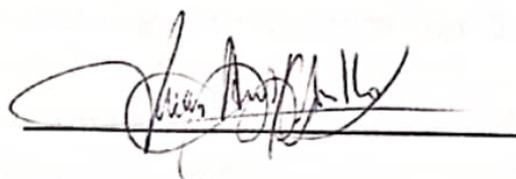
Mat. No. 200223568

**TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN**

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Hernán Córdova', is written over a solid horizontal line.

Ing. Hernán Córdova

**PROFESOR DE SEMINARIO**

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Juan Carlos Avilés', is written over a solid horizontal line.

Ing. Juan Carlos Avilés

**DELEGADO DEL DECANO**

## RESUMEN

El presente proyecto relata sobre las posibles soluciones para mitigar los diferentes tipos de desvanecimientos que se presentan en un canal multitrayectoria, en el cual se escogerá un escenario específico para un sistema WiMAX fijo, donde el principal problema es eliminar el ISI con la ayuda del análisis teórico para después plantear soluciones óptimas, donde nos enfocaremos únicamente en dos soluciones, serán implementadas en un software usando los elementos básicos que se usa para este sistema de comunicación inalámbrica usando como base un sistema OFDM el cual adquiere ventaja del uso de la FFT/IFFT, también los datos serán modulados y demodulados en 16QAM y 32QAM, para al final; poder realizar una comparación de los datos enviados con los datos recuperados a la salida del sistema y de esta forma poder establecer una tasa de error de bits como resultado final, para luego proceder con un respectivo análisis y conclusión del mismo.

## INTRODUCCION

El sistema WiMAX fijo (IEEE 802.16-2004), es uno de los sistemas de comunicaciones inalámbricos de banda ancha que ha logrado acaparar la atención mundial y que hoy en día muchos países especialmente europeos han adoptado este tipo de sistema, debido a que ofrece una gran capacidad de transmisión y recepción de datos; así como también posee un gran alcance de cobertura, pero por sobre todo, es aplicable en ambientes NLOS; el mismo que será objeto de nuestro estudio y análisis.

Dado que el sistema WiMAX fijo, se basa en un sistema de modulación multiportadora denominado OFDM, el procedimiento para realizar este proyecto, sería básicamente implementar un sistema de transmisión y recepción OFDM, incluyendo el canal multitrayectoria; analizando exclusivamente los efectos de desvanecimiento en pequeña escala, todo esto se lo realizará, mediante el uso de un software de simulación que en este caso el escogido es MATLAB.

Luego de haber completado todo el sistema implementado en MATLAB, realizaremos diferentes pruebas; modificando diversos parámetros (modulación, nivel de ruido, ecualización, etc.), para finalmente comparar y analizar los resultados obtenidos en las pruebas.

## INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS .....	II
DEDICATORIAS .....	V
DECLARATORIA EXPRESA .....	VIII
TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN.....	IX
RESUMEN .....	X
INTRODUCCION .....	XI
INDICE GENERAL .....	XIII
INDICE DE FIGURAS .....	XVI
CAPÍTULO 1 .....	18
1  COMPRESIÓN DEL PROBLEMA.....	18
1.1  CANAL DE DESVANECIMIENTO A PEQUEÑA ESCALA .....	19
1.1.1  FACTORES INFLUYENTES .....	19
1.1.2  EFECTO DOPPLER.....	19
1.1.3  CARACTERÍSTICAS DEL EFECTO MULTICAMINO .....	21
1.2  MODELO DE RESPUESTA AL IMPULSO DE UN CANAL MULTICAMINO .....	22
1.2.1  TIEMPO COHERENTE Y ANCHO DE BANDA COHERENTE.....	23
1.3  TIPOS DE DESVANECIMIENTOS EN PEQUEÑA ESCALA .....	26
1.3.1  DESVANECIMIENTO PLANO Y SELECTIVO EN FRECUENCIA .....	27
1.3.2  DESVANECIMIENTO RÁPIDO Y LENTO .....	28
CAPÍTULO 2 .....	30
2  DEFINICIÓN DEL PROBLEMA EN NUESTRO PROYECTO .....	30
2.1  CANAL DE DESVANECIMIENTO TIPO RAYLEIGH .....	31
2.2  INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA (ISI) .....	32

CAPÍTULO 3 .....	36
3  COMPRESIÓN DE LA SOLUCIÓN .....	36
3.1  ORTOGONALIDAD. ....	37
3.1.1  MODULACIÓN MULTIPORTADORA .....	38
3.1.2  SISTEMA MULTIPORTADORA OFDM .....	39
3.1.3  EL PREFIJO CÍCLICO. ....	42
3.1.4  VENTAJAS Y DESVENTAJAS. ....	45
3.2  ECUALIZACIÓN ADAPTIVA. ....	47
3.3  TRANSMISIÓN LIBRE DE ISI .....	47
3.4  ECUALIZADOR ZERO FORCING .....	52
3.5  ECUALIZADOR DE ERROR CUADRÁTICO MEDIO MÍNIMO (MMSE) .....	54
CAPÍTULO 4 .....	60
4  MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DEL SISTEMA WIMAX .....	60
4.1  DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA A SIMULAR .....	60
4.2  PARÁMETROS DE SIMULACIÓN .....	61
4.3  DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO WIMAX 802.16 – 2004 .....	62
4.3.1  TRANSMITTER.M .....	63
4.3.2  CHANNEL.M .....	63
4.3.2  RECEIVER_ZF.M Y RECEIVER_MMSE.M .....	64
CAPÍTULO 5 .....	65
5  ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	65
5.1  SOBRE LA TASA DE ERROR DE BIT Y MODULACIÓN .....	65
5.2  ANÁLISIS DE LAS SEÑALES EN DIFERENTES ETAPAS.....	70

CONCLUSIONES .....	78
APÉNDICE .....	79
APÉNDICE A .....	80
APÉNDICE B .....	84
ABREVIATURAS.....	97
REFERENCIAS.....	98

## INDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> Efecto Doppler .....	19
<b>Figura 1.2</b> REFLEXIÓN, DIFRACCIÓN Y DISPERSIÓN DE LA SEÑAL .....	21
<b>Figura 1.3</b> Muestra las relaciones entre la función de correlación del canal y la función de densidad de potencia.....	25
<b>Figura 1.4</b> Clasificación de diversos tipos de desvanecimientos.. .....	26
<b>Figura 1.5</b> Ilustración de a) Un Canal Selectivo en Frecuencia y b) Un Canal Plano... ..	28
<b>Figura 1.6</b> Matriz ilustrativa del tipo de desvanecimiento experimentado por una señal como función de a) Periodo del Símbolo y b) Ancho de banda de la señal.....	29
<b>Figura 2.1</b> Distribución Rayleigh Teórica y Experimental.. .....	31
<b>Figura 2.2</b> Sistema de transmisión bandabase binario.....	33
<b>Figura 3.1</b> Representación de 8 subportadoras OFDM a) en el dominio de la frecuencia y b) en el dominio del tiempo... ..	39
<b>Figura 3.2</b> El prefijo cíclico OFDM.....	42
<b>Figura 3.3</b> Sistema de extremo a extremo.....	48
<b>Figura 3.4</b> Ecuador MMSE con filtro blanqueador de Ruido.....	55
<b>Figura 4.1</b> Arquitectura del Sistema... ..	59
<b>Figura 4.2</b> Estructura del Código.....	61
<b>Figura 5.1</b> Tasa de error de bit, para un sistema WiMAX Fijo utilizando modulación 16QAM e Intervalo de Guarda de a) 1/4, b) 1/8, c) 1/16 y d) 1/32.....	64-65
<b>Figura 5.2</b> Tasa de error de bit, para un sistema WiMAX Fijo utilizando modulación 32QAM e Intervalo de Guarda a) 1/4, b) 1/8, c) 1/16 y d) 1/32.....	66-67
<b>Figura 5.3</b> a) Constelación 16QAM b) Constelación 32QAM.....	69
<b>Figura 5.4</b> Señal en el dominio del tiempo a) 16QAM y b) 32QAM... ..	70

<b>Figura 5.5</b> Señal antes de pasar por el canal tipo Rayleigh a) Modulación 16QAM y b) Modulación 32QAM.....	71
<b>Figura 5.6</b> Salida del canal tipo Rayleigh a) Modulación 16QAM y b) Modulación 32QAM.....	72
<b>Figura 5.7</b> Parámetros del Canal tipo Rayleigh.....	73
<b>Figura 5.8</b> a) Respuesta al Impulso del Canal y b) Respuesta en Frecuencia del Canal.....	74
<b>Figura 5.9</b> Constelación de los símbolos recibidos para el receptor ZF y MMSE utilizando Modulación a) 16QAM y b) 32QAM.....	76
<b>Figura B.1.</b> Esquema de partida del problema de filtrado óptimo .....	86
<b>Figura B.2.</b> Superficie de error para un filtro FIR adaptivo de dos coeficientes.....	91

# CAPÍTULO 1

## 1 COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA

Cuando analizamos sistemas de tipo inalámbrico, el principal problema que existe dentro de estos sistemas, es establecer el tipo de comportamiento del canal de comunicaciones; debido a que es variante en el tiempo.

Para un sistema WiMAX fijo, perteneciente al estándar IEEE 802.16 – 2004, y que opera sobre ambientes NLOS, es necesario analizar cuál es el impacto que provoca este tipo de ambientes sobre las señales transmitidas, especialmente en el estudio de pequeña escala; es decir analizaremos, las variaciones que sufre la señal en periodos cortos de tiempo y distancia.

En este capítulo, se estudiará el impacto producido por estos tipos de ambientes NLOS, los cuales son conocidos como *desvanecimientos*; así como también, se establecerá el tipo de distribución estadística adecuada para modelar un ambiente NLOS.

## 1.1 Canal de Desvanecimiento a Pequeña Escala

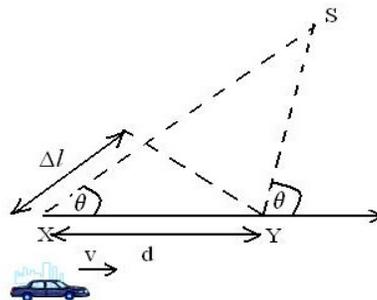
### 1.1.1 Factores Influyentes

Dentro de los factores físicos, en la propagación de la señal a través de un canal de desvanecimiento a pequeña escala se encuentran los siguientes [1]:

- Efecto Doppler.
- Efecto Multicamino.
- Velocidad del receptor.
- Ancho de banda de la señal transmitida.

### 1.1.2 Efecto Doppler

Considere a un receptor moviéndose a una velocidad constante a lo largo de un camino de longitud  $d$  entre los puntos  $X$  e  $Y$ ; mientras recibe la señal desde un punto  $S$  como se ilustra en la figura 1.1



**Figura 1.1** Efecto Doppler.

La diferencia de longitud en que viaja la onda desde la fuente  $S$  hasta el receptor entre los puntos  $X$  e  $Y$  es  $\Delta l = d \cos \theta = v \Delta t \cos \theta$ , donde  $\Delta t$  es el tiempo requerido por el receptor para viajar de  $X$  a  $Y$  puesto que se asume que la fuente se encuentra muy lejos. El cambio de fase en la señal recibida debido a la diferencia de longitudes de camino es como sigue:

$$\Delta \phi = \frac{2\pi \Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi v \Delta t}{\lambda} \cos \theta \quad \text{Ecuación 1.1}$$

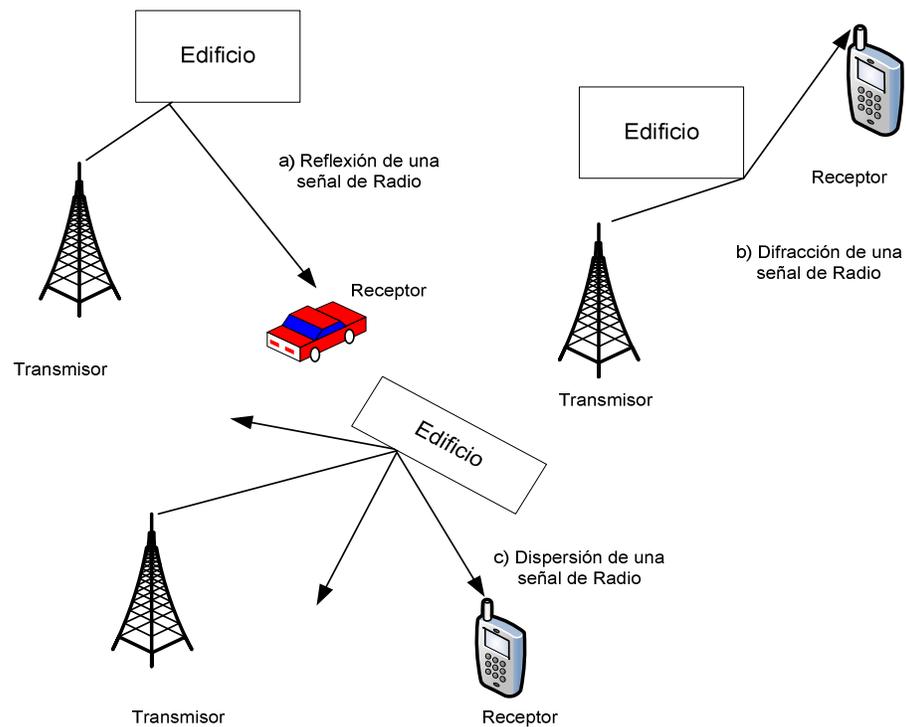
Y por tanto el cambio aparente en frecuencia o cambio Doppler, que se encuentra definido por  $f_d$  donde:

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda} \cos \theta \quad \text{Ecuación 1.2}$$

De la ecuación 1.2 muestra la relación entre el cambio Doppler, la velocidad del receptor y el ángulo que existe entre la dirección del movimiento del receptor y la dirección de arribo de la señal. Se puede observar de la ecuación 1.2; que si el receptor se está moviendo hacia la dirección de arribo de la señal, el cambio Doppler es positivo, caso contrario si el receptor se aleja de la dirección de arribo de la señal, el cambio Doppler es negativo. El efecto Doppler causa un incremento en el ancho de banda de la señal [1].

### 1.1.3 Características del Efecto Multicamino

El efecto multicamino o desvanecimiento multicamino, se debe a la combinación en forma constructiva y destructiva de las componentes reflejadas, dispersadas y difractadas de la señal transmitida. Este tipo de desvanecimiento, es relativamente rápido y es responsable de las variaciones de la señal en términos cortos. Dependiendo del ambiente de radio propagación, existen diferentes modelos que describen el comportamiento estadístico del canal multicamino [2].



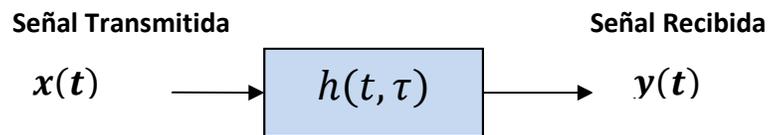
**Figura 1.2** Reflexión, Difracción y Dispersión de la Señal.

Dentro de los modelos que describen el comportamiento estadístico de un canal multicamino, podemos mencionar algunos de los más frecuentemente utilizados:

- Modelo *Rayleigh*.
- Modelo *Nakagami-q (Hoyt)*.
- Modelo *Nakagami-n (Rice)*.
- Modelo *Nakagami-m*.

## 1.2 Modelo de Respuesta al impulso de un Canal Multicamino

Un canal multicamino puede ser representado como un filtro lineal y variante en el tiempo, el mismo que se puede interpretar como la sumatoria de diferentes caminos o rayos con su propio retardo y amplitud compleja asociada [3].



$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i(t) \delta(\tau - \tau_i) \quad \text{Ecuación 1.3}$$

De manera que:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(t, \tau)d\tau \quad \text{Ecuación 1.4}$$

### 1.2.1 Tiempo Coherente y Ancho de Banda Coherente

Aparte del esparcimiento multicamino (tiempo)  $T_m$  y el esparcimiento Doppler (frecuencia)  $B_d$ , hay otros dos parámetros que son útiles en la caracterización de desvanecimiento de canales multicamino. El tiempo de coherencia se define como el recíproco del esparcimiento Doppler, y es una medida del intervalo de tiempo, sobre el cual el canal permanece estático o cambia muy poco; el tiempo de coherencia puede definirse matemáticamente como sigue:

$$T_c = \frac{1}{B_d} \quad \text{Ecuación 1.5}$$

Mientras que el ancho de banda coherente se define como el recíproco del esparcimiento multicamino, y es una medida del ancho de banda, sobre el cual las características del canal (magnitud y fase), están altamente correlacionadas. En otras palabras las componentes de frecuencia de una señal dentro de este ancho de banda, se desvanecerán simultáneamente [4].

El ancho de banda coherente puede definirse matemáticamente como sigue:

$$B_c = \frac{1}{T_m} \quad \text{Ecuación 1.6}$$

Este máximo exceso de retraso  $T_m$  no es necesariamente el mejor indicador; en cuanto a como se desempeña el sistema cuando las señales se propagan a través del canal; porque diferentes canales con diferentes valores de  $T_m$  pueden mostrar diferentes perfiles de intensidad de la señal. Un parámetro más útil es el esparcimiento de retraso, más a menudo caracterizado en términos de RMS (Root Mean Square); denominándose el esparcimiento de retraso RMS ( $\sigma_\tau$ ).

$$\sigma_\tau = \sqrt{\overline{\tau^2} - (\bar{\tau})^2} \quad \text{Ecuación 1.7}$$

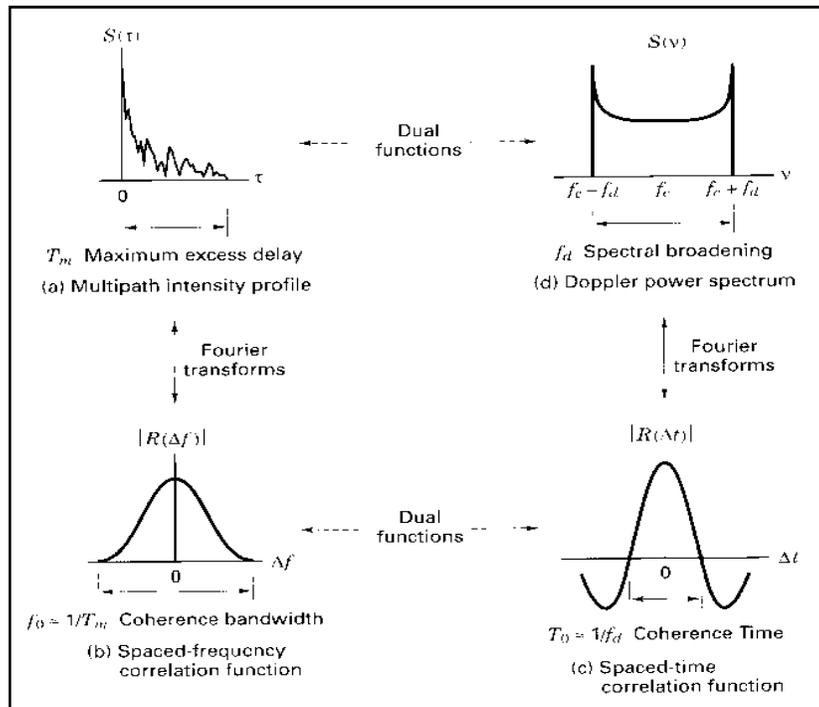
Donde  $\bar{\tau}$  es el exceso de retraso medio,  $(\bar{\tau})^2$  es la media cuadrada,  $\overline{\tau^2}$  es el segundo momento y  $\sigma_\tau$  es la raíz cuadrada del segundo momento central de  $S(\tau)$ , el cual representa el perfil de intensidad multicamino [5].

Una relación universal entre el ancho de banda coherente y el esparcimiento de retraso que sea útil para todas las aplicaciones no existe. Estudios involucran efectos de la ionosfera y a menudo emplean la siguiente definición:

$$B_c = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau} \quad \text{Ecuación 1.8}$$

Una aproximación más popular correspondiente al ancho de banda coherente en relación al esparcimiento de retraso RMS es la siguiente:

$$B_c \approx \frac{1}{5\sigma_\tau} \quad \text{Ecuación 1.9}$$



**Figura 1.3** Muestra las relaciones entre la función de correlación del canal y la función de densidad de potencia.

### 1.3 Tipos de Desvanecimientos en Pequeña Escala

Los mecanismos de dispersión en tiempo y frecuencia, en un canal de radio móvil; permiten cuatro posibles efectos de desvanecimiento, los cuales dependen de la naturaleza de la señal transmitida, el canal y la velocidad. Mientras el retraso multicamino conduce a *dispersión en tiempo y desvanecimiento en frecuencia selectiva*, por su parte el efecto Doppler conduce a *dispersión en frecuencia y desvanecimiento en tiempo selectivo*. Los dos mecanismos de propagación son independiente uno del otro [1].

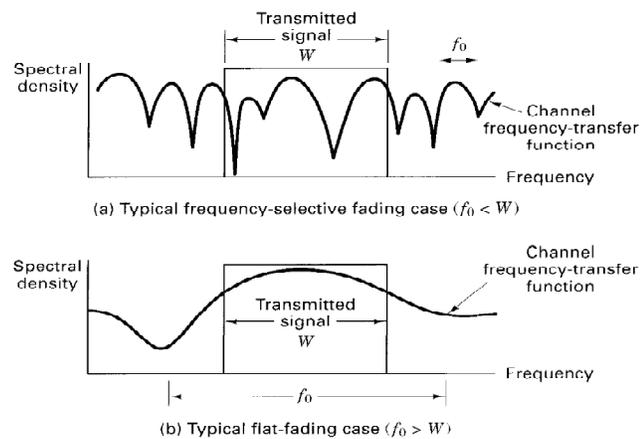
Desvanecimiento a Pequeña Escala (Basado en el esparcimiento de retardo multicamino)	
Desvanecimiento Plano	Desvanecimiento de Frecuencia Selectiva
1. BW de la señal < BW del canal	1. BW de la señal > BW del canal
2. Esparcimiento de retardo < Periodo de símbolo.	2. Esparcimiento de retardo > Periodo de símbolo
Desvanecimiento a Pequeña Escala (Basado en el esparcimiento Doppler)	
Desvanecimiento Rápido	Desvanecimiento Lento
1. Esparcimiento Doppler alto	1. Esparcimiento Doppler bajo
2. Tiempo coherente < Periodo de símbolo.	2. Tiempo coherente > Periodo de símbolo.
3. La variación del canal es más rápido que la variación de la señal en banda base.	3. La variación del canal es más lento que la variación de la señal en banda base.

**Figura 1.4** Clasificación de diversos tipos de desvanecimientos.

### 1.3.1 Desvanecimiento Plano y Selectivo en Frecuencia

La pérdida de ancho de banda coherente  $B_c$  en un sistema de comunicaciones inalámbricas, se debe a la dispersión del efecto multicamino, esto implica que la señal transmitida llegara al receptor como un grupo de símbolos únicos con tiempo de retraso único. Esto en el dominio del tiempo causa *Interferencia Intersimbólica (ISI)*. Por su parte en el dominio de la frecuencia, un canal disperso posee picos y valles al otro lado del ancho de banda de interés.

Este comportamiento en el dominio de la frecuencia conduce a dos tipos de desvanecimiento. Un canal inalámbrico con un ancho de banda coherente que es menor que el ancho de banda de la señal transmitida, se dice que tiene un *desvanecimiento selectivo en frecuencia*; mientras que un canal con ancho de banda coherente que es mucho más grande que el ancho de banda de la señal transmitida, se dice que tiene un *desvanecimiento no selectivo en frecuencia o plano* [6]. Ambos tipos de canales son mostrados en la figura 1.5



**Figura 1.5** Ilustración de a) Un Canal Selectivo en Frecuencia y  
b) Un Canal Plano.

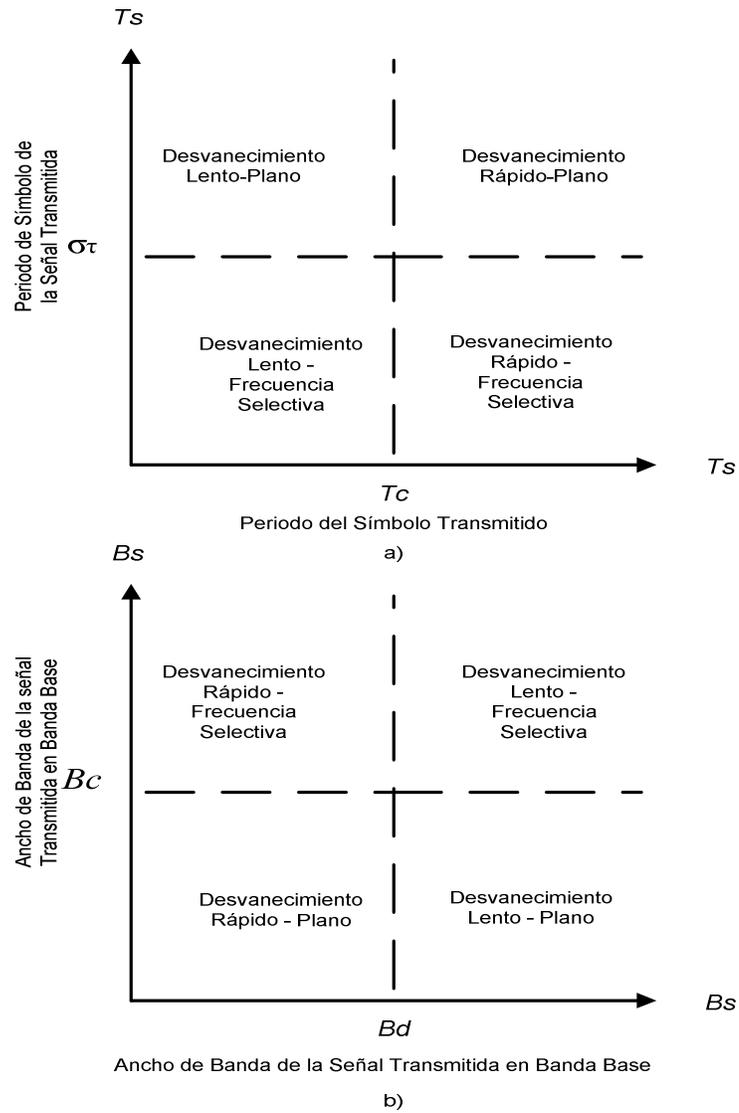
### 1.3.2 Desvanecimiento Rápido y Lento

La distinción entre un desvanecimiento rápido y lento es muy importante para el modelamiento matemático de canales con desvanecimiento y para la evaluación del desempeño de los sistemas de comunicación sobre estos canales.

Un desvanecimiento se dice que es lento, si el periodo de duración del símbolo  $T_s$  es mucho más pequeño que el tiempo coherente del canal  $T_c$  de otra manera, se considera un desvanecimiento rápido.

En un desvanecimiento lento, un nivel particular de desvanecimiento, afectara muchos símbolos sucesivos generando una ráfaga de errores;

mientras que en un desvanecimiento rápido, se produce una decorrelación entre símbolos [2].



**Figura 1.6** Matriz ilustrativa del tipo de desvanecimiento experimentado por una señal como función de a) Periodo del Símbolo y b) Ancho de banda de la señal.

## CAPÍTULO 2

### **2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA EN NUESTRO PROYECTO**

En esta sección, describiremos claramente las limitaciones de nuestro proyecto, es decir las asunciones que se harán para poder desarrollar la solución al problema planteado.

De este modo; tal y como se analizó en el capítulo anterior de los diferentes tipos de desvanecimientos, escogeremos un escenario específico, el cual será un canal con desvanecimiento lento y selectivo en frecuencia, en donde se presenta el problema de ISI y donde el canal puede considerarse casi estático o invariante en el tiempo.

El canal será considerado que posee una distribución tipo Rayleigh, con esta asunción; empezaremos a realizar el capítulo 2, para luego definir el problema del ISI.

## 2.1 Canal de Desvanecimiento tipo Rayleigh

La distribución tipo Rayleigh de forma estadística, la naturaleza de la envolvente recibida de una señal con desvanecimiento plano o la envolvente de una componente individual multicamino [6]. La distribución Rayleigh está dada por:

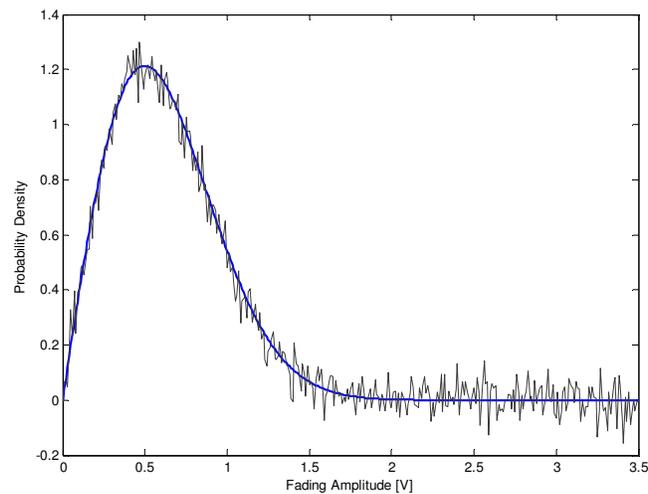
$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)} \text{ para } 0 \leq r \leq \infty \text{ Ecuación 2.1}$$

Donde:

$\sigma$  = Es el valor RMS de la señal recibida.

$r^2/2$  = Es la potencia instantánea.

$\sigma^2$  = La potencia local promedio de la señal recibida.



**Figura 2.1** Distribución Rayleigh Teórica y Experimental.

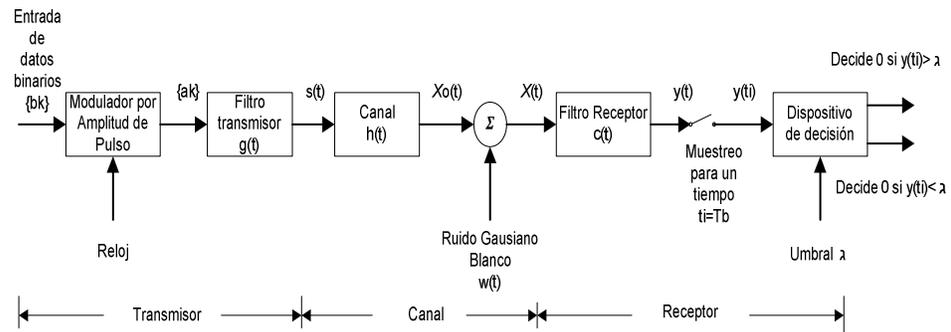
## 2.2 Interferencia Intersimbólica (ISI)

Un desvanecimiento selectivo en frecuencia, incrementa la interferencia entre símbolos; donde un símbolo recibido, sobre un cierto periodo de tiempo, experimenta interferencia sobre otros símbolos que han sido retrasados debido al efecto multicamino. Ya que si se incrementa la potencia de la señal, también se incrementará la potencia del ISI, este incremento conlleva a un irreducible nivel de error, el cual es independiente del nivel del ruido.

Este nivel de error es difícil de analizar, puesto que depende de las características del ISI y de la forma de modulación e incluso las características del ISI dependen de las características del canal y de los símbolos transmitidos [7].

Consideremos entonces un sistema PAM binario, tal y como se muestra en la figura 2.2, donde la secuencia binaria de entrada  $b_k$  consiste de símbolos 1 y 0, cada uno con duración  $T_b$ , el modulador de amplitud de pulsos modifica esta secuencia binaria, en una nueva secuencia de pulsos cortos (aproximadamente en un pulso unitario), cuya amplitud es representada en forma polar, como sigue:

$$a_k = \begin{cases} +1; & \text{Si el simbolo } b_k = 1 \\ -1; & \text{Si el simbolo } b_k = 0 \end{cases}$$



**Figura 2.2** Sistema de transmisión bandabase binario.

La secuencia de pulsos cortos aquí producidos, son aplicados al filtro de respuesta al impulso  $g(t)$ ; produciéndose la señal transmitida:

$$s(t) = \sum_k a_k g(t - kT_b) \quad \text{Ecuación 2.2}$$

La señal  $s(t)$  es modificada como resultado de la transmisión a través del canal de respuesta al impulso  $h(t)$  además de que existe la presencia de ruido aleatorio a la entrada del receptor. El resultado del filtro  $y(t)$  es muestreado sincrónicamente con el transmisor, con instantes de muestreo determinados por el reloj, finalmente la secuencia de muestras, es obtenida y utilizada para reconstruir la secuencia de datos original por medio de un dispositivo de decisión.

La señal  $y(t)$  se describe como sigue:

$$y(t) = \mu \sum_k a_k p(t - kT_b) + n(t) \quad \text{Ecuación 2.3}$$

Donde  $\mu$  es un factor de escala y  $p(t)$  el pulso que será luego definido. Para ser preciso se debe considerar, un retardo de tiempo arbitrario  $t_0$  incluido dentro del argumento del pulso  $p(t - kT_b)$  en la ecuación 2.3.

El pulso escalado  $\mu p(t)$ , es obtenido por una doble convolución que involucra la respuesta al impulso del filtro transmisor  $g(t)$ , del canal  $h(t)$  y del filtro receptor  $c(t)$ , de manera que:

$$\mu p(t) = g(t) * h(t) * c(t) \quad \text{Ecuación 2.4}$$

Asumimos que  $p(t)$  está normalizado en  $t = 0$  es decir que  $p(0) = 1$ , lo cual justifica el uso de  $\mu$  como un factor escalar para medir los cambios de amplitud que ocurren dentro del sistema. Dado que la convolución en el dominio del tiempo es la multiplicación en el dominio de la frecuencia, a través del uso de la *Transformada de Fourier*, la ecuación anterior queda expresada de la siguiente manera:

$$\mu P(f) = G(f) \times H \times C(f) \quad \text{Ecuación 2.5}$$

Donde  $P(f)$ ,  $G(f)$ ,  $H(f)$  y  $C(f)$  son la transformada de Fourier de  $p(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  y  $c(t)$  respectivamente. Finalmente el término  $n(t)$  es considerado como un ruido AWGN. La salida del filtro receptor  $y(t)$ , es muestreada en el tiempo  $t_i = iT_b$  siendo  $i$  un valor entero, lo cual lleva a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 y(t_i) &= \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p[(i-k)T_b] + n(t_i) \\
 &= \mu a_i + \underbrace{\mu \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} a_k p[(i-k)T_b]}_{\text{ISI}} + n(t_i) \quad \text{Ecuación 2.6}
 \end{aligned}$$

El primer término,  $\mu a_i$  representa la contribución del  $i$ -ésimo bit transmitido, mientras que el segundo, representa el efecto residual de todos los otros bits transmitidos en la decodificación del  $i$ -ésimo bit transmitido; y es aquí donde ocurre el ISI y el tercer término muestra el ruido en el instante  $t_i$  [8].

## CAPÍTULO 3

### 3 COMPRESIÓN DE LA SOLUCIÓN

Dentro de las posibles soluciones para resolver el problema de ISI, se encuentran las siguientes:

- OFDM.
- Ecuación Adaptiva.
- DSSS y FHSS.
- Señal Piloto.

De todas estas soluciones, nos enfocaremos en tomar únicamente, las dos primeras; en la cual se analizará y comprenderá el funcionamiento de los mismos. Así como también se indicara sus ventajas y desventajas, al ser utilizadas en sistemas inalámbricos.

### 3.1 Ortogonalidad.

Las subportadoras son ortogonales entre sí cuando, multiplicamos la forma de onda de cualesquiera dos subportadoras e integramos sobre el periodo del símbolo y el resultado es cero.

La ortogonalidad de las portadoras significa que cada portadora tiene un número entero de ciclos sobre un periodo de símbolo. Debido a esto, el espectro de cada portadora tiene un nulo en la frecuencia central entre cada una de las portadoras del sistema.

La señal OFDM surge de una suma de sinusoides, con cada una de las correspondientes subportadoras. El grupo de funciones son ortogonales para cada otro con las condiciones de la siguiente ecuación 3.1.

$$\int_0^T S_i(t)S_j(t)dt = \begin{cases} C & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.1}$$

Si dos funciones cualesquiera diferentes dentro del grupo son multiplicadas, y se integra sobre un período del símbolo y el resultado es cero, entonces existe ortogonalidad [9].

### 3.1.1 Modulación Multiportadora

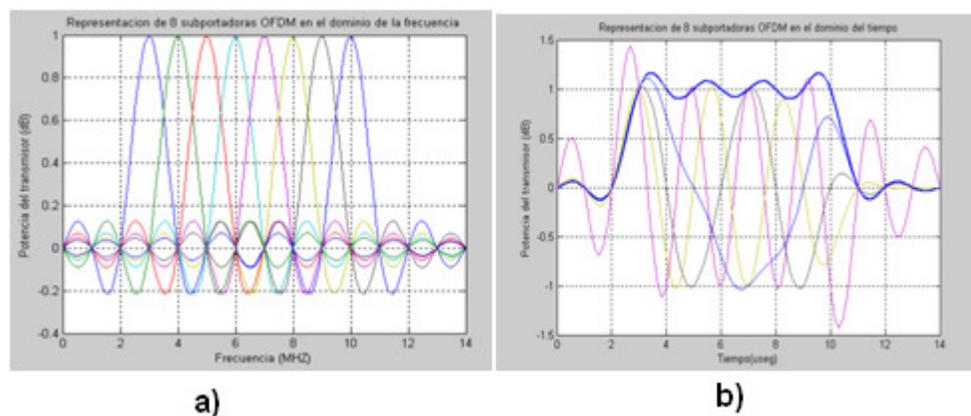
La idea básica de modulación multiportadora es muy simple y sigue el concepto de altas tasas de datos y canal libre de ISI. De hecho para tener un canal libre de ISI, el periodo del símbolo  $T_s$  debe ser mucho más grande que el espaciamiento de retardo del canal  $\tau$ , puesto que los sistemas de comunicación digital simplemente no pueden funcionar si el ISI está presente.

Para sobre llevar este problema la modulación multiportadora divide la alta tasa de transmisión de bits en  $L$  subportadoras de baja tasa, cada una de las cuales tiene  $T_s/L \gg \tau$  y por lo tanto se mitiga el ISI. Típicamente estas subportadoras son ortogonales bajo condiciones ideales de propagación, en cuyo caso la modulación multiportadora es a menudo referenciada como OFDM. La tasa de datos sobre cada subportadora es mucho menor que la tasa de datos total, y el ancho de banda correspondiente a cada subportadora es mucho menor que el ancho de banda total del sistema. El número de subportadoras es elegido para asegurar que cada una de ellas experimente un desvanecimiento relativamente plano, así el ISI sobre cada subcanal es pequeño. Además en la implementación digital de OFDM el ISI puede ser completamente eliminado a través del uso de prefijo cíclico [10].

### 3.1.2 Sistema Multiportadora OFDM

La Modulación por División Ortogonal de Frecuencias (OFDM) es un esquema de modulación/demodulación multiportadora, una técnica de comunicación que divide el canal de comunicación en un número de frecuencias igualmente espaciadas agrupadas. Cada subportadora es ortogonal con otra subportadora, diferenciando OFDM comúnmente usando la división de frecuencia por multiplexación (FDM) [10].

En los sistemas OFDM, el espectro de subportadora individual es trasladado con frecuencia mínima, lo cual es cuidadosamente diseñado a fin de que cada subportadora sea ortogonal para los otros subportadoras. La eficiencia de ancho de banda de OFDM es otra ventaja como se muestra en Figure 3.1.



**Figura 3.1** Representación de 8 subportadoras OFDM a) en el dominio de la frecuencia y b) en el dominio del tiempo.

La principal característica para su implementación en la actualidad es la utilización de la transformada rápida de Fourier o FFT para lograr la transmisión por medio de subportadoras paralelas de manera que se elimina en lo posible la interferencia o traslape entre ellas. Por eso el dato numérico de subportadoras está ligado al número de muestras que usa la FFT (NFFT). Así es que, de manera general, OFDM refiere a la transmisión de una trama digital que requiere una gran tasa de transferencia mediante NFFT líneas paralelas más lentas, en subportadoras contiguas y ortogonales, que transportan símbolos independientes que son producto de algún tipo de modulación digital como QPSK, 16-QAM, 64-QAM, etc. Siendo N subportadoras ortogonales las que se utilizan para un sistema OFDM cualquiera, éstas estarán separadas en frecuencia justamente por el valor correspondiente a la inversa del tiempo útil del símbolo OFDM ( $T_u$ ).

Entonces si la señal se la codifica por QPSK o cualquier otro tipo de modulación I/Q se la puede expresar de la siguiente forma:

$$s(t) = \text{Re} \left[ e^{j\omega_c t} \sum_{K=1}^N A_k e^{j\frac{2\pi kt}{T_u}} \cdot e^{j\theta_k} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k \cos \left[ \left( \omega_c + \frac{2\pi k}{T_u} \right) \cdot t + \theta_k \right] \quad \text{Ecuación 3.2}$$

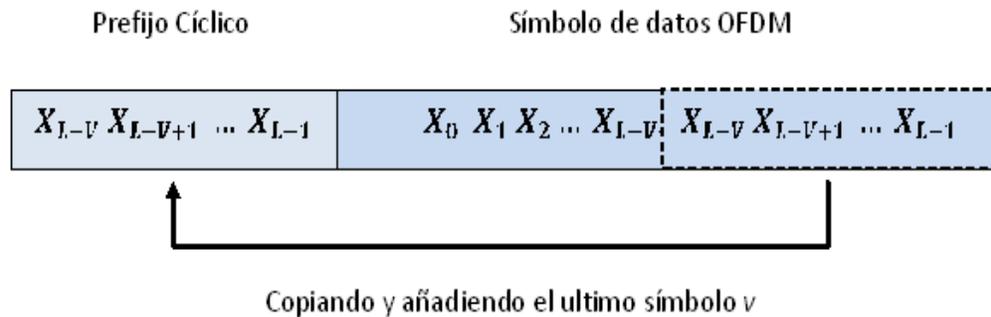
Donde  $A_k$  y  $\theta_k$  toman los valores posibles de acuerdo a su constelación correspondiente.

Esta técnica ha encontrado adopción en el ancho de banda para los sistemas con alta tasa de datos para la radio-telegrafía LANS, video conferencias broadcasting y ahora WIMAX(802.16e/f/g/k) y otros sistemas inalámbricos emergentes de banda ancha Flash-OFDM y 3G LTE( cuarta generación de los sistemas celulares). La popularidad de OFDM está en que puede aplicar para la transmisión de una alta tasa de datos y es flexible en la interferencia entre símbolos (ISI) para canales altamente dispersivos [10].

En el sistema WiMAX donde por lo general no existe línea de vista existe una gran inclinación al efecto ISI para ello requerirán técnicas para disminuir este efecto en los transmisores y receptores como OFDM.

### 3.1.3 El Prefijo Cíclico.

La clave para hacer realizable OFDM es el uso de algoritmos FFT, la cual baja su complejidad. Para crear un IFFT/FFT para un canal libre del ISI, en el canal debe recobrar un pedazo de la trama de la señal, añadiendo un prefijo cíclico a la señal transmitida, como se muestra en la figura 4.3, creando una señal que aparezca para ser  $x[n]$ ; entonces  $y[n]=x[n]*h[n]$ .



**Figura 3.2** El prefijo cíclico OFDM.

Si el máximo retardo de esparcimiento (delay spread) tiene una duración de  $v + 1$ , añadiendo un intervalo de vanguardia por lo menos  $v$  entre muestras de símbolo OFDM haciendo cada una de estas independiente de los anteriores y posteriores, entonces un solo simple símbolo puede ser considerado. A continuación presentamos un símbolo en el dominio del tiempo como un vector de longitud  $L$ .

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_L].$$

Después aplicando un prefijo cíclico de tamaño  $v$ , la señal transmitida es

$$\mathbf{x}_{cp} = \left[ \underbrace{x_{L-v} \ x_{L-v+1} \ \dots \ x_{L-1}}_{\text{Prefijo ciclcico}} \ \underbrace{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{L-1}}_{\text{Dato original}} \right]$$

La salida del canal es por definición  $y_{cp} = h * x_{cp}$ , donde  $h$  es una longitud  $v + 1$  vector describe la respuesta al impulso de la duración del canal del símbolo OFDM.

La salida  $y_{cp}$  como  $(L + v) + (v + 1) - 1 = L + 2v$  muestras. La primera muestra  $v$  de  $y_{cp}$  contiene interferencia desde la precedencia del símbolo OFDM, entonces son descartados. La última muestra  $v$  dispersa dentro de la subsecuencia símbolo OFDM también son descartados. Este deja exactamente  $L$  muestras para la salida solicitada  $y$ ; la cual es prescindible que requiera recobrar los  $L$  símbolos de datos incrustados en  $x$ .

Entonces podemos acotar que las  $L$  muestras de  $y$  serán equivalentes a  $y = h\Theta x$ . El prefijo cíclico, depende en adelante de los valores circularmente envueltos  $X_{L-v} \dots X_{L-1}$ . Esto es:

$$y_0 = h_0 x_0 + h_1 x_{L-1} + \dots + h_v x_{L-v}$$

$$y_1 = h_0 x_1 + h_1 x_0 + \dots + h_v x_{L-v+1}$$

⋮

$$y_{L-1} = h_0 x_{L-1} + h_1 x_{L-2} + \dots + h_v x_{L-v-1}$$

Donde  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{L-1}$  son los resultados de  $y = h\Theta x$

El prefijo cíclico, aunque selectivo y simple no es completamente libre. Vienen ambos con un ancho de banda y una alteración en la potencia. Desde que los símbolos redundantes son enviados, el ancho de banda requerido para OFDM aumenta de  $B$  para  $(L + v/L)B$ . Similarmente, un símbolo  $v$  añadido debería ser contado nuevamente por la potencia de transmisión perdida.

En resumen, el uso del prefijo cíclico conlleva tasa de datos y a la pérdida de potencia de  $10 \log(L + v/L)dB$  en adición para la pérdida del ancho de banda. Entonces la tasa de perdida se expresa de la siguiente manera [10]:

$$\text{Perdida de potencia} = \text{Tasa de perdida} = \frac{L}{L + v}$$

### 3.1.4 Ventajas y desventajas.

#### Ventajas:

- La inmunidad para el retardo de esparcimiento y multicamino, robusta en contra la interferencia entre símbolo (ISI) y desvanecimiento causado por la propagación de multicamino.
- Resistencia al desvanecimiento de frecuencia selectiva.
- Robusta en contra a la interferencia de co-canales para banda angosta.
- Uso eficiente del ancho de banda, alta eficiencia espectral.
- Baja sensibilidad para la sincronización de tiempo de errores.
- Implementación eficiente en el uso de la transformada rápida de Fourier.
- La diversidad multiusuario OFDMA da a usuarios diferentes permiso de transmitir sobre porciones diferentes del espectro de banda ancha.
- La simplicidad del aparato receptor: OFDMA tiene el mérito de desciframiento fácil en el aparato receptor, como elimina la interferencia entre celdas evitando tipo CDMA de detección multiusuario [9].

**Desventajas:**

- Sensitivo para el desplazamiento de frecuencia del trasportador y el ruido de fase.
- La relación de pico promedio la cual tiende a reducirse la eficiencia de potencia del amplificador de radio frecuencia.
- Sensitivo para el cambio Doppler.
- Los efectos no lineales generados por el amplificador de potencia podría introducir interferencia entre portadora y estos destruirían la ortogonalidad debido a que los dispositivos electrónicos emiten calor y esto genera ruido [9].

### 3.2 Ecuación Adaptiva.

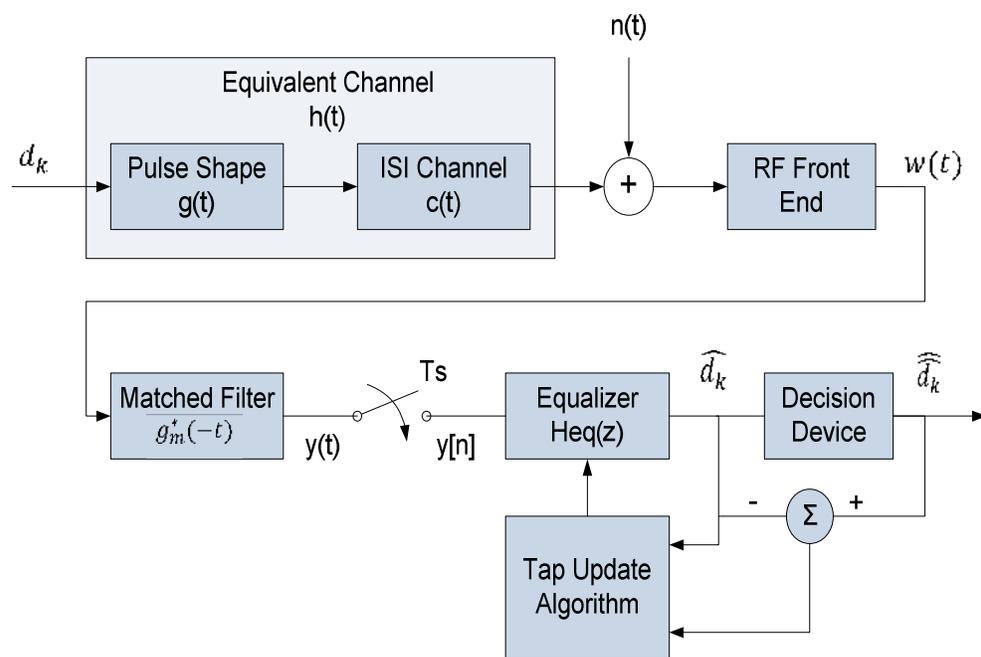
Los ecualizadores pueden mitigar los efectos de ISI incluidos por un canal con desvanecimiento selectivo en frecuencia, lo cual ayuda a modificar el desempeño del sistema.

Existen numerosas aplicaciones en el procesamiento de la señal digital en las que los coeficientes de un filtro no pueden determinarse a priori. Esto se debe a que las características estadísticas de las señales a filtrar son desconocidas en principio o variantes con el tiempo. Un filtro con parámetros ajustables es un filtro adaptativo, o también denominado ecualizador adaptativo [11].

### 3.3 Transmisión Libre de ISI

Los ecualizadores son implementados digitalmente. En la figura 3.3 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de terminal con un ecualizador digital. La entrada de símbolo  $d_k$  es pasado a través un filtro en forma de pulsos  $g(t)$  y entonces transmitimos sobre un canal ISI con una respuesta al impulso  $c(t)$ . Nosotros definimos el equivalente del canal como  $h(t) = g(t) * c(t)$ , y la señal transmitida está dada por  $d(t)g(t) * c(t)$  para un  $d(t) = \sum_k d_k \delta(t - kT_s)$  el tren de información de símbolos.

La forma de pulso  $g(t)$  beneficia las propiedades espectrales de la señal transmitida, esta forma de pulso está por debajo del control del diseño del sistema, si el canal  $c(t)$  es introducido por naturaleza y su salida de control es diseñada.



**Figura 3.3** Sistema de extremo a extremo.

Un ruido Gaussiano  $n(t)$  es sumado al receptor entonces obtendremos como resultado  $w(t)$ . Esta señal es pasada a través un filtro analógico adaptado  $g_m^*(-t)$  para obtener una salida  $y(t)$ , la cual entonces es muestreada en un convertidor A/D. El propósito de un filtro analógico conjugado es para maximizar la relación señal a ruido (SNR) de una señal antes muestreada y subsecuentemente procesada [7].

En un AWGN el SNR de la señal recibida es maximizado previamente a la muestra para usar un filtro que es el conjugado de la forma de pulso. Este resultado indica que para el sistema mostrado en la figura 3.3, antes del muestreo se maximiza mediante la aprobación de  $w(t)$  a través de un filtro adaptado por  $h(t)$ , entonces idealmente nosotros deberíamos tener  $g_m(t) = h(t)$ . Sin embargo, dado que la respuesta al impulso del canal  $c(t)$  es variante en el tiempo y los filtros analógicos no son fácilmente sintonizables. Generalmente no es posible tener  $g_m(t) = h(t)$ . Por lo tanto parte del diseño del ecualizador es elegido  $g_m(t)$  para obtener un buen desempeño. A menudo  $g_m(t)$  es adaptado para la forma de pulso  $c(t)$ , y es óptimo cuando  $c(t) = \delta(t)$ , pero este diseño claramente sub-óptimo cuando  $c(t) \neq \delta(t)$ .

El factor  $g_m(t)$  no puede ser adaptado para  $h(t)$  este puede generar una degradación en el rendimiento y además hace que receptor sea extremadamente sensible a errores de sincronismo. Estos problemas son un tanto atenuados por muestreo  $y(t)$  a una tasa mucho más rápido que la velocidad de símbolo y el diseño del ecualizador para una señal en exceso de muestras. Este proceso es llamado **ecualización fraccionalmente espaciada**<sup>1</sup> [7].

---

1.- Revisar Apéndice A.

A la salida del ecualizador se obtiene una estimación del símbolo transmitido. Esta estimación es entonces pasada a través de un dispositivo de decisión que redondea la salida del ecualizador para un símbolo en el alfabeto de los posibles símbolos transmitidos. Durante el proceso a la salida del ecualizador los taps o pesos son actualizados a través de un algoritmo por cada valor de paso a la salida del ecualizador.

Denotamos  $f(t)$  como la combinación de la respuesta al impulso en banda-base del transmisor, canal y el filtro adaptivo.

$$f(t) = g(t) * c(t) * g_m^*(-t) \quad \text{Ecuación 3.3}$$

Entonces la salida del filtro adaptivo está dada por:

$$y(t) = d(t) * f(t) + n_g(t) = \sum d_k f(t - kT) + n_g(t) \quad \text{Ecuación 3.4}$$

Donde  $n_g(t) = n(t) * g_m^*(-t)$  es la equivalencia del ruido banda-base a la entrada del ecualizador y  $T$  es el periodo del símbolo [7].

Si nosotros tenemos que  $f[n] = f(nT_s)$  que denota muestras de  $f(t)$  de cada  $T_s$  segundos entonces el rendimiento de muestreo  $y(t)$  cada  $T_s$  segundos de una señal  $y[n] = y(nT_s)$  en tiempo discretos está dada por:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{K=-\infty}^{\infty} d_k f(nT_s - kT_s) + n_g(nT_s) \\
 &= \sum_{K=-\infty}^{\infty} d_k f[n - k] + v[n] \\
 &= d_n f[0] + \sum_{k \neq n} d_k f[n - k] + v[n] \quad \text{Ecuación 3.5}
 \end{aligned}$$

Donde el primer término de la ecuación 3.5 es el bit de datos deseados, el segundo término es el ISI, y el tercer término es el ruido muestreado en banda-base [7].

En la ecuación 3.6 obtenemos cero ISI si  $f[n - k] = 0$  para  $k \neq n$ , por ejemplo  $f[k] = \delta[k]f[0]$ . En este caso la ecuación 3.5 se reduce a  $y[n] = d_n f[0] + v[n]$ .

### 3.4 Ecuador Zero Forcing

Partiendo de la ecuación 3.5, la muestra  $\{y_n\}$  de entrada para el ecualizador puede ser representado en base sobre la respuesta del sistema discreto combinado.  $f(t) = h(t) * g^*(-t)$  como:

$$Y(z) = D(z)F(z) + N_g(z) \quad \text{Ecuación 3.6}$$

Donde  $N_g(z)$  es el espectro de potencia del ruido blanco después de pasar a través de un filtro acoplado  $G^*(1/z^*)$  y

$$F(z) = H(z)G_m^*(1/z^*) = \sum_n f(nT_s)z^{-n} \quad \text{Ecuación 3.7}$$

El ecualizador zero-forcing remueve todo el ISI introducido en la respuesta combinada  $f(t)$ . Desde la ecuación 3.7 vemos que el ecualizador para lograr esto, esta dado por

$$H_{ZF}(z) = \frac{1}{F(z)} \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Esto es el tiempo-discreto equivalente a él ecualizador analógico ecuación 3.8 descrito anteriormente, padece las mismas características en el incremento del ruido [7]. Específicamente, el espectro de potencia  $N(z)$  está dado por

$$N(z) = N_g(z)|H_{ZF}(z)|^2 = \frac{N_0|G_m^*(1/z^*)|^2}{|F(z)|^2} = \frac{N_0}{|H(z)|^2} \quad \text{Ecuación 3.9}$$

El ecualizador ZF está definido por  $H_{ZF}(z) = 1/F(z)$  no se puede implementar como un filtro de respuesta al impulso finito (FIR). Específicamente, no podría lograr encontrar un conjunto finito de coeficientes  $w_{-L} + \dots + w_L$ , tal que:

$$w_{-L}z^L + \dots + w_Lz^{-L} = \frac{1}{F(z)} \quad \text{Ecuación 3.10}$$

En este caso nosotros encontramos los coeficientes  $\{w_i\}$  que mejor se aproximen al ZF. Note que este no es confiable, dado que la aproximación debe ser válida para todos los valores de  $z$ . Hay muchas formas para la construcción de esta aproximación. Una técnica es representar  $H_{ZF}(z)$  como un filtro de respuesta al impulso infinito (IIR),  $1/F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^{-i}$  y entonces el conjunto de  $w_i = c_i$  puede ser demostrado que minimiza.

$$\left| \frac{1}{F(z)} - (w_{-L}z^L + \dots + w_Lz^{-L}) \right|^2$$

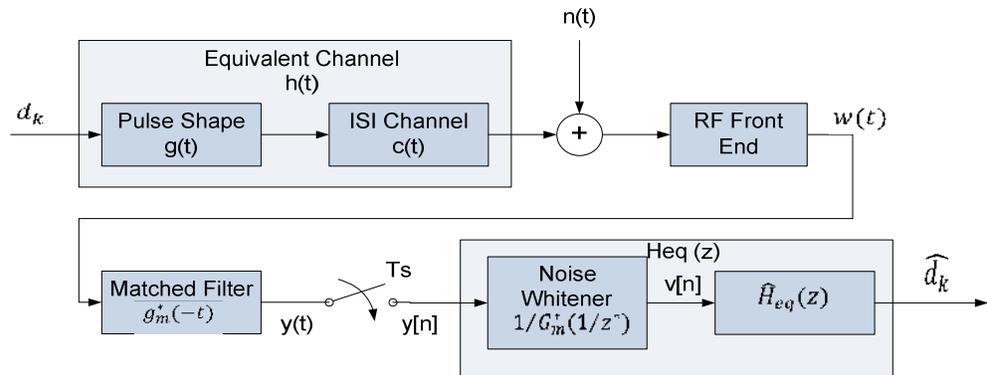
Para  $z = e^{j\omega}$  Alternativamente, los pesos de los tap pueden ser agrupados para minimizar los picos de distorsión (ISI). Encontrar los pesos que minimicen la distorsión es un problema de optimización y puede ser resuelto por una técnica, como por ejemplo la **técnica de descenso profundo**<sup>2</sup> [7].

### 3.5 ECUALIZADOR DE ERROR CUADRÁTICO MEDIO MÍNIMO (MMSE)

En el ecualizador MMSE el tema de diseño del ecualizador es para minimizar el error cuadrático medio entre la transmisión de símbolo  $d_k$  y el estimado  $\hat{d}_k$  para la salida del ecualizador. En otras palabras los  $\{w_i\}$  son escogidos para minimizar el valor  $E[d_k - \hat{d}_k]^2$ . Dado que el MMSE es un ecualizador lineal, los  $\hat{d}_k$  a su salida son una combinación lineal de las muestras de entrada  $y[k]$ :

$$\hat{d}_k = \sum_{i=-L}^L w_i y[k-i] \quad \text{Ecuación 3.11}$$

Tal como encontramos los coeficientes óptimos de filtro  $\{w_i\}$  conlleva a un problema estándar en la estimación lineal. De hecho, si la entrada de ruido para el ecualizador es blanca, este es un problema estándar de filtrado Wiener. Sin embargo, debido al filtro de acoplamiento  $g_m^*(-t)$  al final de la parte delantera del receptor, el ruido en la entrada del ecualizador no es blanco sino coloreado con un espectro de potencia  $N_0 |G_m^*(1/z^*)|^2$ . Por consiguiente, para ejercer técnicas conocidas para la estimación lineal óptima, expandimos el filtro  $H_{eq}(z)$  dentro de dos componentes, un blanqueamiento de las componentes del ruido  $1/G_m^*(1/z^*)$  y un removedor de las componentes del ISI  $\hat{H}_{eq}(z)$ , como se muestra en la figura 3.4 [7].



**Figura 3.4** Ecuador MMSE con filtro blanqueador de Ruido

El propósito del filtro blanqueador de ruido, como indica su nombre, es para blanquear el ruido tal que la componente de ruido a la salida de este filtro tenga un espectro de potencia constante. Dado que el ruido a la entrada de este receptor tiene un espectro de potencia  $N_0 |G_m^*(1/z^*)|^2$ , lo apropiado del filtro blanqueador de ruido es  $1/G_m^*(1/z^*)$ . El espectro de potencia del ruido a la salida del filtro blanqueador de ruido es entonces  $N_0 |G_m^*(1/z^*)|^2 / |G_m^*(1/z^*)|^2 = N_0$ .

Note que el filtro  $1/G_m^*(1/z^*)$  no es únicamente un filtro que blanquea el ruido, otros filtros blanqueadores de ruido con deseables propiedades (como estabilidad) podrían ser escogidos. Podría verse extraño a primera vez la introducción del filtro de acoplamiento  $g_m^*(-t)$  para la cancelación de los efectos de la parte final del ecualizador. Sin embargo el filtro de acoplamiento significa maximizar el SNR antes del muestreo [7].

Para remover los efectos de este filtro acoplado a través del blanqueamiento del ruido después del muestreo, simplificaremos el diseño de  $\hat{H}_{eq}(z)$  para minimizar el MSE. De hecho si el filtro blanqueador de ruido no rinde un desempeño óptimo entonces estos efectos podrían ser cancelados a través del diseño de  $\hat{H}_{eq}(z)$ , veremos el caso de un ecualizador MMSE con IIR.

Nosotros asumimos el filtro  $\hat{H}_{eq}(z)$ , con entrada  $v_n$ , es un filtro lineal con  $N = 2L + 1$  pasos:

$$\hat{H}_{eq}(z) = \sum_{i=-L}^L w_i z^{-i} \quad \text{Ecuación 3.12}$$

Nuestro objetivo es el diseño de los coeficientes  $\{w_i\}$  tal que minimice  $E[d_k - \hat{d}_k]^2$ . Este es el mismo objetivo como para el filtro total  $H_{eq}(z)$ , justamente hemos añadimos un filtro blanqueador de ruido para resolver simplemente los coeficientes.

Definimos

$V = (c[k + L], v[k + L - 1], \dots, v[k - L]) = (v_{k+L}, v_{k+L-1}, \dots, v_{k-L})$  como un vector de entrada para el filtro  $\hat{H}_{eq}(z)$  usado para obtener  $\hat{d}_k$  a la salida del filtro y  $W = (w_{-L}, \dots, w_L)$  como el vector de coeficientes del filtro [7].

Entonces

$$\hat{d}_k = W^T V = V^T W. \quad \text{Ecuación 3.13}$$

Por lo tanto, queremos minimizar el error cuadrático medio.

$$J = E[d_k - \hat{d}_k]^2 = E[d_k^2 - 2d_k\hat{d}_k + \hat{d}_k^2] = E[\hat{d}_k^2 - 2d_k\hat{d}_k + d_k^2]$$

Donde  $\hat{d}_k^2 = W^T V V^H W^*$

$$= E[W^T V V^H W^* - 2R\{V^H W^* d_k\} + |d_k|^2] \quad \text{Ecuación 3.14}$$

$$= E[W^T V V^H W^*] - E[2R\{V^H W^* d_k\}] + E[|d_k|^2]$$

$$= E[W^T V V^H W^*] - E[2R\{V^H W^* d_k\}] + E[|d_k|^2]$$

$$= W^T E[V V^H] W^* - 2R\{E[V^H W^* d_k]\} + E[|d_k|^2]$$

$$= W^T E[V V^H] W^* - 2R\{E[V^H d_k] W^*\} + E[|d_k|^2]$$

Definimos  $M_V = E[V V^H]$  y  $V_d = E[V^H d_k]$ . La matriz  $M_V$  es una matriz Hermitiana de  $N \times N$  y  $V_d$  es un vector fila de tamaño  $N$ . Asumimos que  $E|d_k|^2 = 1$ . Entonces el MSE  $J$  es

$$J = W^T M_V W^* - 2R\{V_d W^*\} + 1 \quad \text{Ecuación 3.15}$$

Obtenemos el vector óptimo de paso  $W$  aplicando el gradiente  $\nabla_W J = 0$  y resolviendo para  $W$ . Aplicando el gradiente a la ecuación 3.16 se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_W J &= \left( \frac{\partial J}{\partial w_{-L}}, \dots, \frac{\partial J}{\partial w_L} \right) = 0 \\ &= \left( \frac{\partial(W^T M_V W^* - 2R\{V_d W^*\} + 1)}{\partial w_{-L}}, \dots, \frac{\partial(W^T M_V W^* - 2R\{V_d W^*\} + 1)}{\partial w_L} \right) \end{aligned}$$

$$= 2W^T M_v - 2V_d \quad \text{Ecuación 3.16}$$

Ajustando un rendimiento de cero  $W^T M_v = V_d$  o equivalente a que los pesos de los tap están dados por

$$W_{opt} = (M_v^T)^{-1} V_d^T \quad \text{Ecuación 3.17}$$

Note que la solución para  $W_{opt}$  requiere una matriz inversa con respecto al filtro de entrada. Así que la complejidad de este cálculo es bastante alta, típicamente en el orden de  $N^2$  a  $N^3$  operaciones. Sustituyendo estos pesos de paso obtenemos el error cuadrático medio como

$$J_{min} = 1 - V_d M_v^{-1} V_d^H \quad \text{Ecuación 3.18}$$

Para un tamaño finito para el ecualizador,  $V = (v_{n+\infty}, \dots, v_n, v_{n-\infty})$  y  $W = (w_{-\infty}, \dots, w_0, \dots, w_{\infty})$ . Entonces  $W^T M_v = V_d$  puede ser escrito como

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_i (f[j-i] + N_0) \delta[j-i] = g_m^*[-j], \quad -\infty \leq j \leq \infty \quad \text{Ecuación 3.19}$$

Tomando la transformada de  $z$  y observando que  $\hat{H}_{eq}(z)$  es la transformada de los coeficientes del filtro  $w$

$$\hat{H}_{eq}(z)(F(z) + N_0) = G^*(1/z^*) \quad \text{Ecuación 3.20}$$

Resolviendo para  $\hat{H}_{eq}(z)$

$$\hat{H}_{eq}(z) = \frac{G_m^*(1/z^*)}{F(z) + N_0} \quad \text{Ecuación 3.21}$$

La ecualización MMSE consiste en el filtro blanqueamiento de ruido  $1/G_m^*(1/z^*)$  más la eliminación de las componentes del ISI  $\hat{H}_{eq}(z)$ , obtenemos el ecualizador completo, cuando no se restringe un tamaño finito se obtiene [7]

$$\begin{aligned} H_{eq}(z) &= \frac{\hat{H}_{eq}(z)}{G_m^*(1/z^*)} \\ &= \frac{G_m^*(1/z^*)}{G_m^*(1/z^*)(F(z) + N_0)} \\ &= \frac{1}{F(z) + N_0} \quad \text{Ecuación 3.22} \end{aligned}$$

Para la ecuación 3.22 el mínimo MSE de la ecuación 3.18 puede expresarse en el espectro de la siguiente manera aplicando la definición:

$$J_{min} = T_s \int_{-0.5/T_s}^{0.5/T_s} \frac{N_0}{F_\Sigma(f) + N_0} df \quad \text{Ecuación 3.23}$$

Esta expresión para MMSE tiene varias propiedades interesantes. En primer lugar se puede demostrar que, como se esperaba,  $0 \leq J_{min} = E[d_k - \hat{d}_k]^2 \leq 1$ . Además,  $J_{min} = 0$  en la ausencia del ruido ( $N_0 = 0$ ) siempre y cuando  $F_\Sigma(f) \neq 0$  en el ancho de banda de la señal de interés. Además, como se esperaba  $J_{min} = 1$  si  $N_0 = \infty$ .

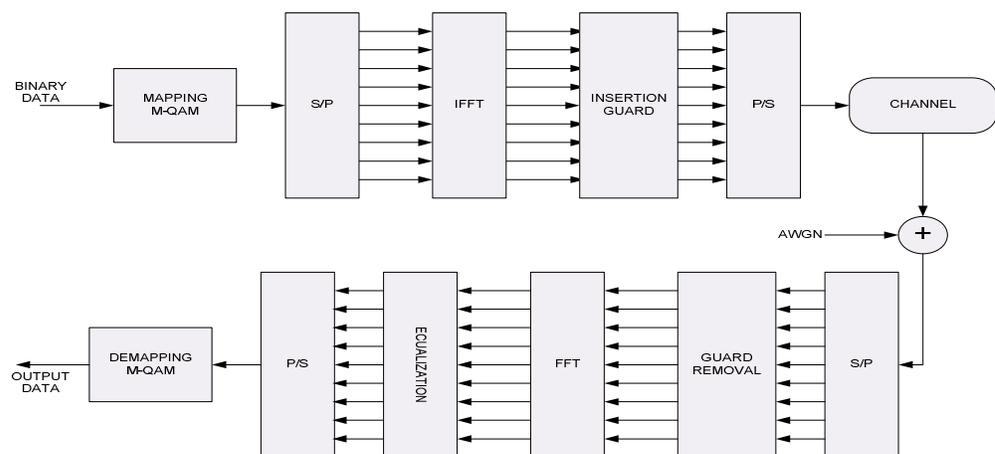
# CAPÍTULO 4

## 4 MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DEL SISTEMA WIMAX

### 4.1 Descripción del Sistema a Simular

Como cualquier sistema de comunicaciones es necesario considerar los siguientes bloques esquemáticos, los cuales son:

- Fuente de datos.
- Modulador/Transmisor.
- Canal.
- Demodulador/ Receptor.
- Medición del BER.



**Figura 4.1** Arquitectura del Sistema.

## 4.2 Parámetros de Simulación

Para el proceso de simulación de un Sistema WiMAX Fijo sobre un ambiente NLOS, hemos determinado los siguientes parámetros, los cuales serán utilizados en nuestro código.

- Número de Subportadoras: 256
- Número de Subportadoras Dato: 256
- Número de Subportadoras Piloto: 0
- Numero de Subportadoras nulas/guardas: 0
- Prefijo Cíclico: [4, 8, 16, 32]
- Tipo de Canal: Rayleigh
- Tipo de Modulación: 16QAM y 32QAM

### 4.3 Descripción del Código WiMAX 802.16 – 2004

Tal como lo habíamos mencionado anteriormente en la parte de introducción a este proyecto, nuestro proceso de simulación, se basa en realizar un código de programación realizado en MATLAB, utilizando diversas herramientas del mismo programa, he implementado varias funciones necesarias para el desarrollo de nuestra simulación del proyecto.

Para empezar, en esta simulación se ha creado o definido un archivo denominado *ofdm\_multisymbol\_ZFvsMMSE.m* el mismo que contiene la descripción de las dos posibles soluciones, mencionadas en el capítulo 3; las cuales son OFDM y ecualización adaptativa; dentro de esta ultima hemos escogido dos tipos de ecualizadores: el ecualizador ZF y el MMSE.

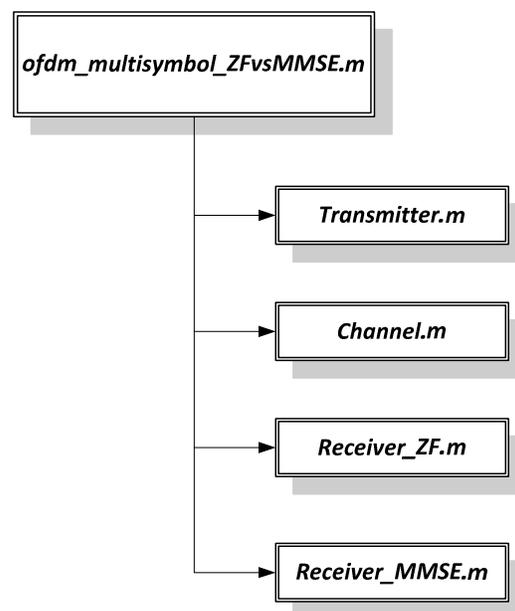


Figura 4.2 Estructura del Código.

### 4.3.1 Transmitter.m

Este código, se encarga de transmitir los datos, los cuales previamente pasaran por un proceso similar al indicado en la figura 4.1, esto significa que los datos tendrán que ser modulados, mediante una modulación M-QAM; y que para este caso específico únicamente serán 16QAM y 32QAM, luego estos datos modulados serán pasados por la IFFT, es decir transformar los datos en el dominio del tiempo; para últimamente agregar el intervalo de guarda o prefijo cíclico.

### 4.3.2 Channel.m

Dentro de este código, se encuentra representado el canal tipo Rayleigh cuyo desvanecimiento será selectivo en frecuencia y lento, para lograr aquello, se utilizara un comando o función denominado *rayleighchan* el mismo que se encuentra definido y establecido en MATLAB y será de mucha utilidad para nuestro proyecto, además de establecer este tipo de canal, también existirá una adición de ruido de tipo blanco gaussiano (AWGN), esto se lo hará después que los datos hayan sido filtrados por el canal tipo Rayleigh.

El comando *rayleighchan* permite ingresar varios parámetros relacionados con el efecto multicamino, como son la frecuencia Doppler, un conjunto de retardos, la potencia promedio de cada retardo, entre otros.

### 4.3.2 Receiver\_ZF.m y Receiver\_MMSE.m

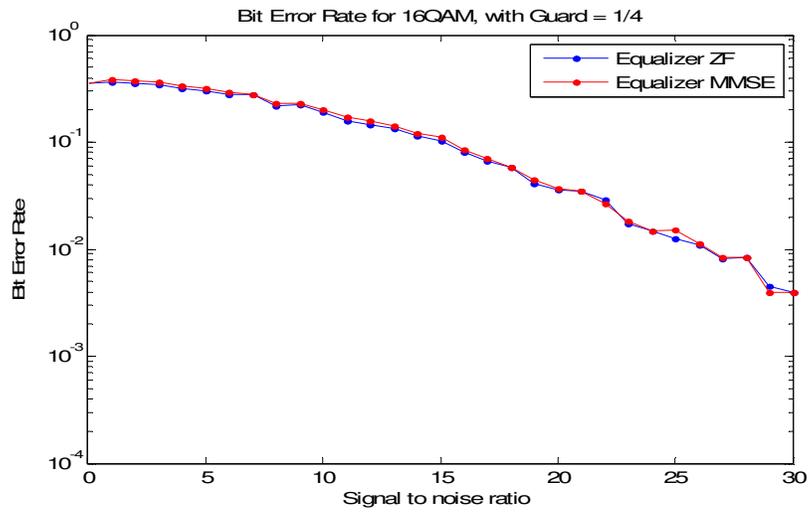
Ambos códigos son encargados de recibir el dato que ha sido filtrado por el canal, y cada uno de ellos establecerá su propio algoritmo de estimación de canal para así poder demodularlos, pero previamente ambos realizarán operaciones contrarias al del transmisor, es decir el dato recibido en receptor sea este ZF o MMSE, primero se le removerá el intervalo de guarda, para luego aplicar la FFT y pasar al dominio de la frecuencia, y es ahí donde actúa el ecualizador correspondiente en cada receptor.

Al final se realizará un cálculo de la tasa de error de bit, comparando los datos de entrada con los datos recibidos, por parte de cada receptor, esto se logra mediante el comando *biterr* el cual se encuentra definido y establecido en MATLAB.

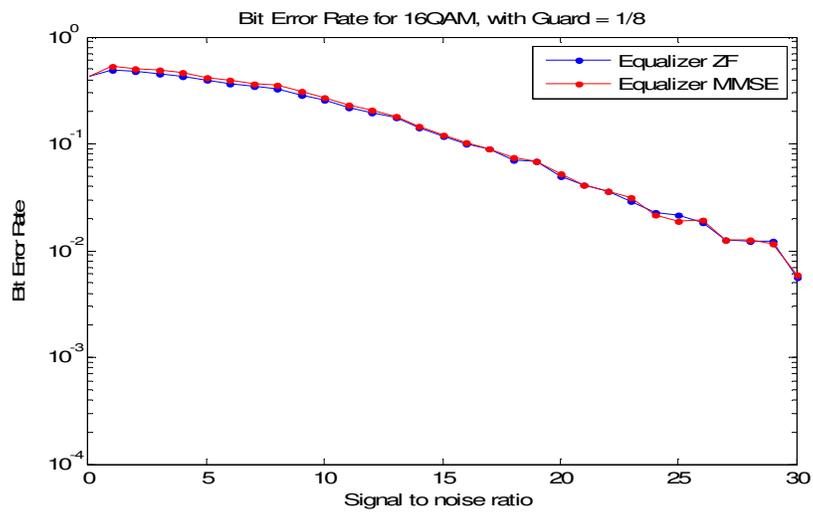
# CAPÍTULO 5

## 5 Análisis de Resultados y Conclusiones

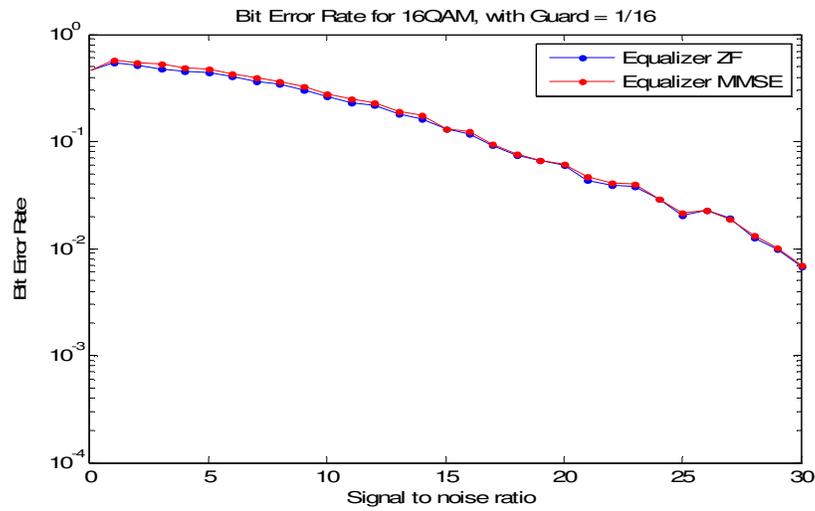
### 5.1 Sobre la Tasa de Error de Bit y Modulación



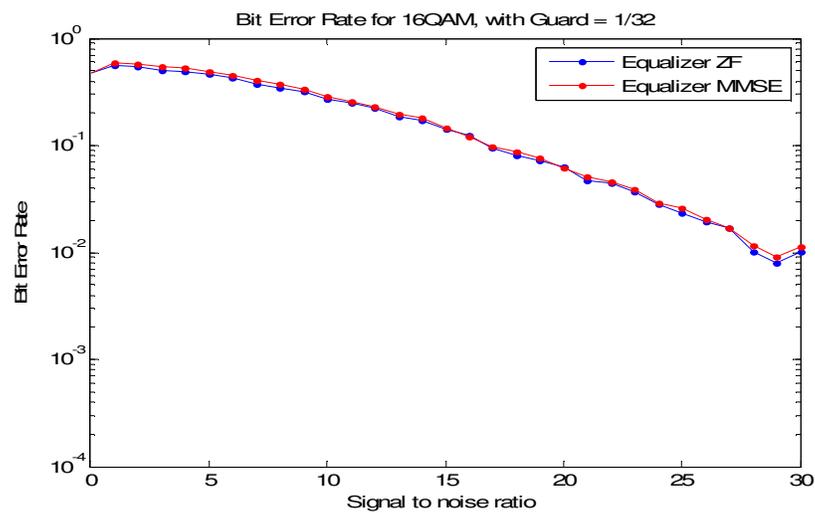
a)



b)

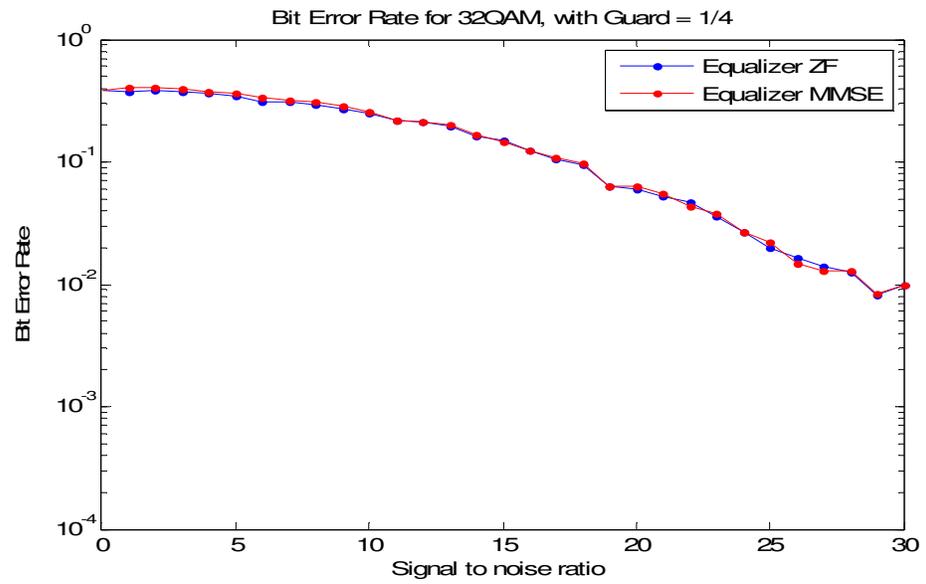


c)

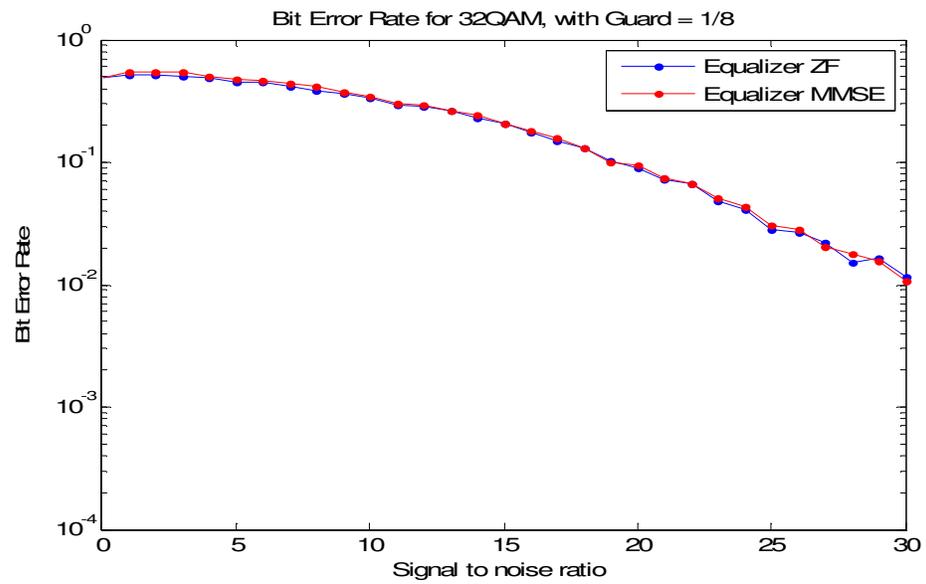


d)

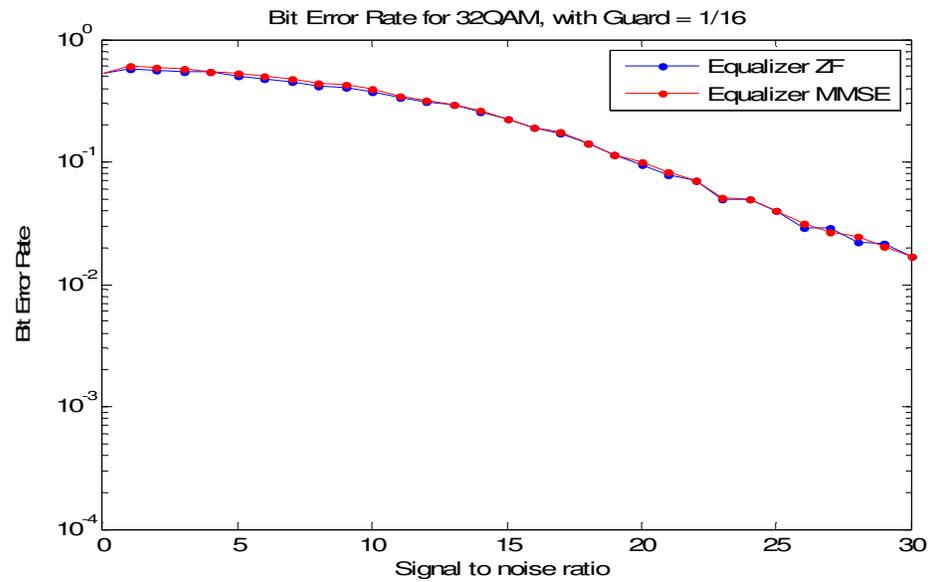
**Figura 5.1** Tasa de error de bit, para un sistema WiMAX Fijo utilizando modulación 16QAM e Intervalo de Guarda de a) 1/4, b) 1/8, c) 1/16 y d) 1/32.



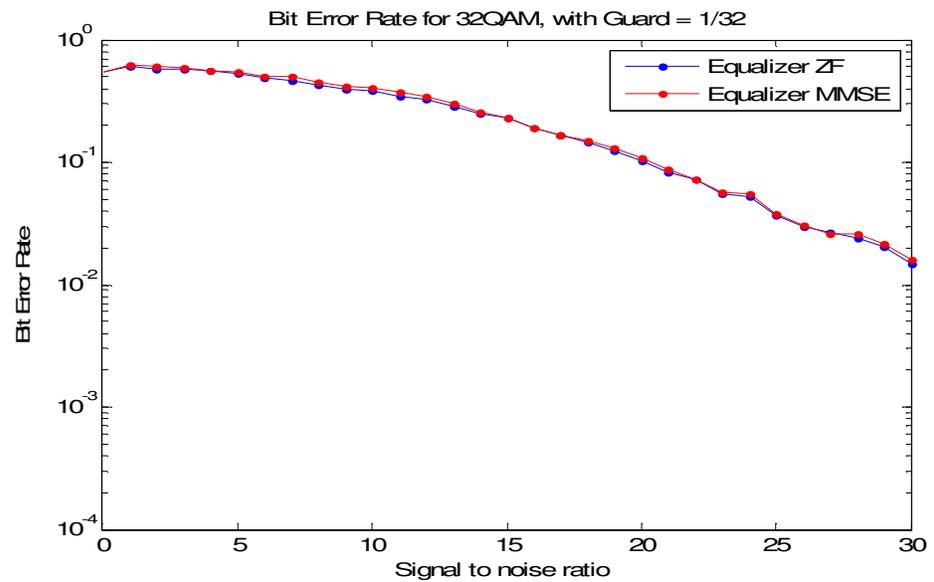
a)



b)



c)



d)

**Figura 5.2** Tasa de error de bit, para un sistema WiMAX Fijo utilizando modulación 32QAM e Intervalo de Guarda a) 1/4, b) 1/8, c) 1/16 y d) 1/32.

Como se observa en la figuras 5.1 a existe un ligero cambio en la tasa de error de bits para la curva cuando se aplica el ecualizador Zero-Forcing comparado con la curva de la tasa de error de bit con el ecualizador MMSE, por ejemplo cuando tenemos una relación de señal a ruido de 25 en la curva con el ecualizador ZF el BER es de 0.0097 en cuanto a la curva con el ecualizador MMSE el BER es de 0.009 con modulación 16QAM ambas.

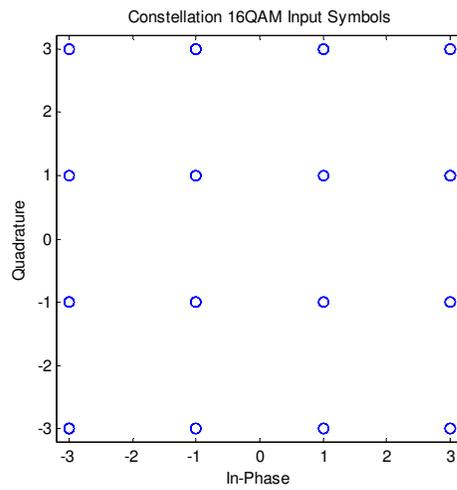
Por consiguiente el prefijo cíclico es un factor relevante en el proceso de la mitigación del ISI como observamos en la figuras 5.1 y 5.2 de la curva del BER tanto para 16QAM como 32QAM existe una diferencia al aplicar distintos prefijos cíclicos como se muestra en las figura 5.1 a, b, c y d; por lo que a mayor longitud del prefijo cíclico (en el código es CPLen) la tasa de error de bit es mayor.

En cuanto al tipo de modulación influye poco en el análisis de tasa de error de bit ya que al aumentar el número de símbolos, existe solamente un ligero cambio.

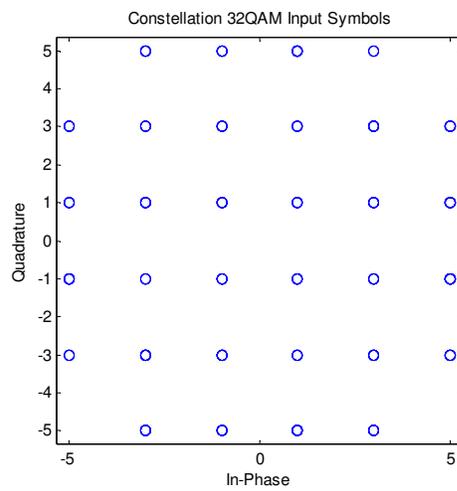
A continuación en la siguiente sección mostraremos una representación en cuanto a la constelación de los datos transmitidos para los diferentes tipos de modulación; de igual forma se mostrará como va cambiando la señal en

diferentes etapas del sistema, como por ejemplo antes de pasar por el canal y después del canal.

## 5.2 Análisis de las señales en diferentes etapas



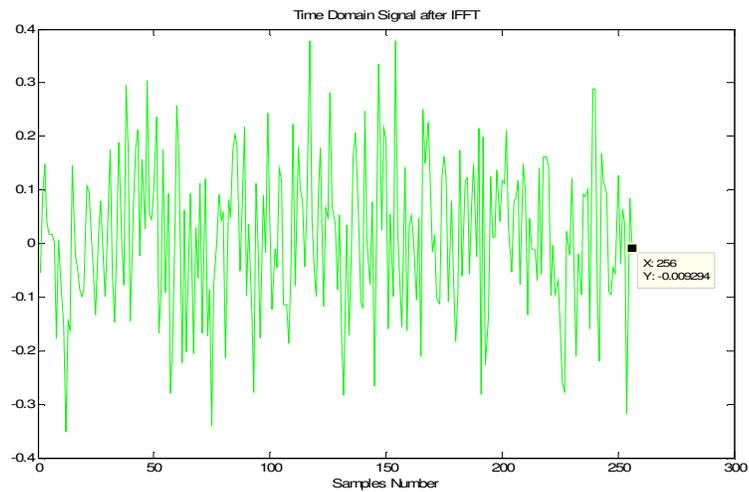
a)



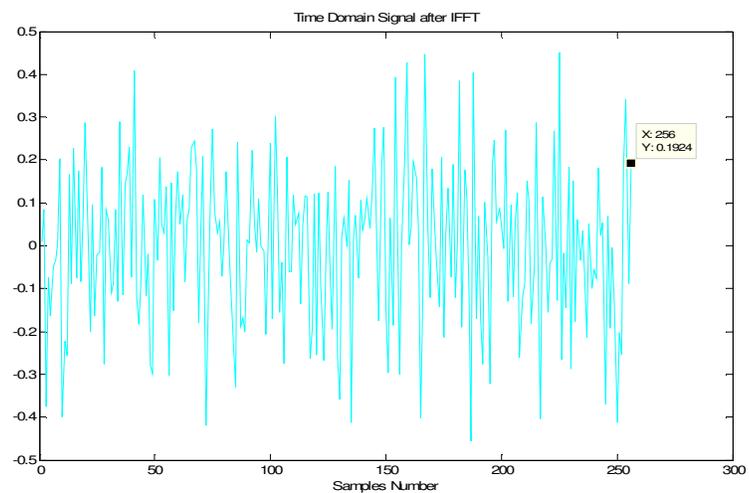
b)

Figura 5.3 a) Constelación 16QAM b) Constelación 32QAM

La figura 5.3 a y b muestra las constelaciones respectivas de los símbolos a través de una modulación 16QAM y 32QAM, estos símbolos serán llevados al dominio del tiempo mediante el uso de la transformada inversa de Fourier (IFFT), tal como se muestra en la figura 5.4 a y b.



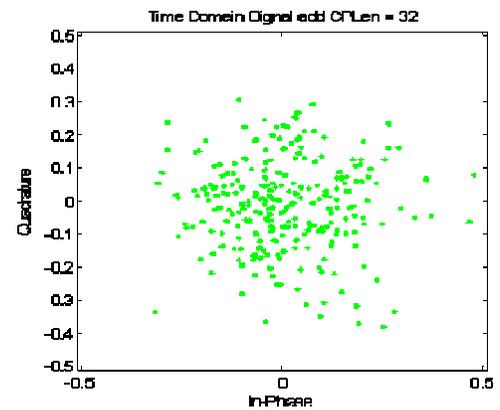
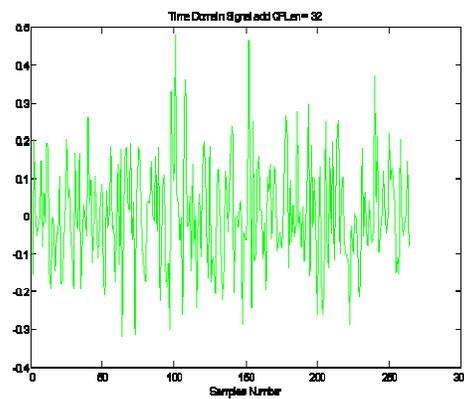
a)



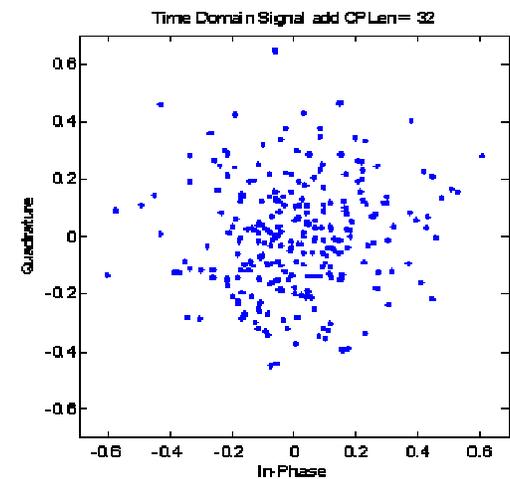
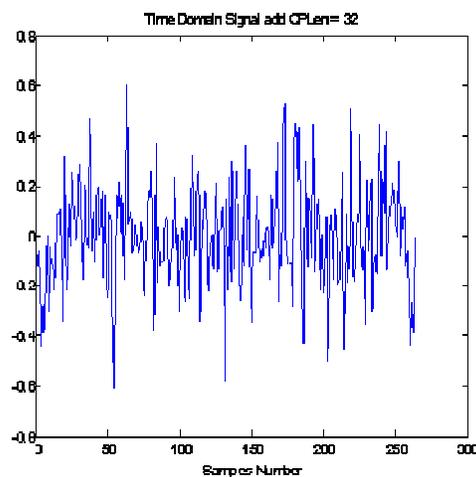
b)

**Figura 5.4** Señal en el dominio del tiempo a) 16QAM y b) 32QAM

Luego a esta señal que se encuentra en el dominio del tiempo, se le agrega un intervalo de guarda, y es la señal que ingresara por el canal tipo Rayleigh; por ejemplo tomaremos un prefijo cíclico de referencia (Guard = 1/32), la cual será representada en la figura 5.5 a y b, para las modulaciones 16QAM y 32QAM respectivamente.



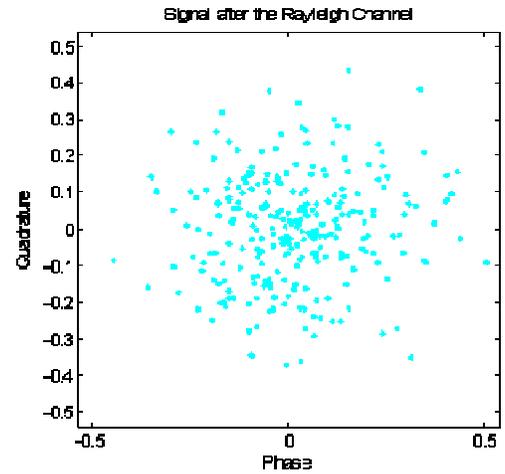
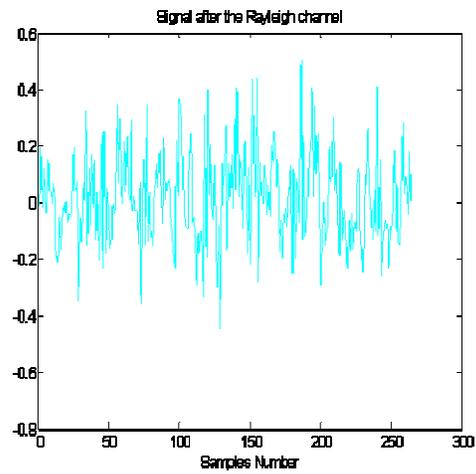
a)



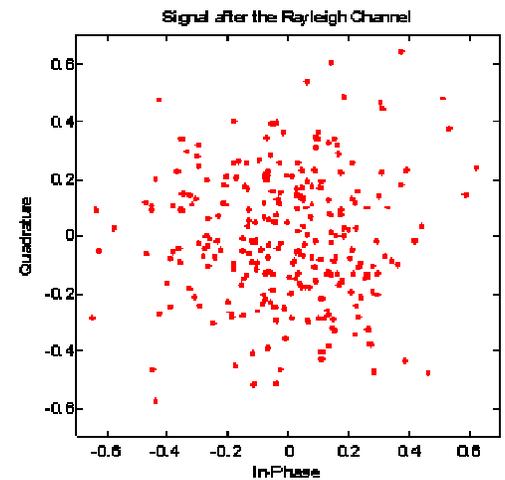
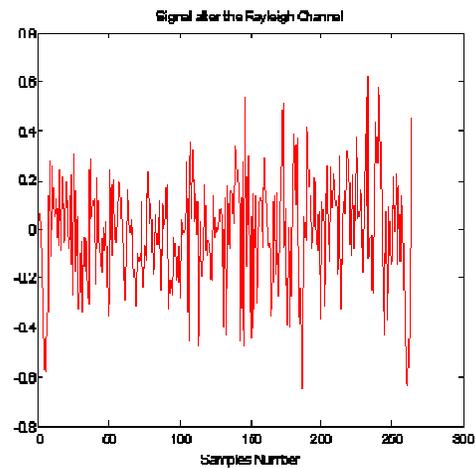
b)

**Figura 5.5** Señal antes de pasar por el canal tipo Rayleigh a) Modulación 16QAM y b) Modulación 32QAM

En la figura 5.6 a y b presentaremos la salida del canal tipo Rayleigh, tanto para la modulación 16QAM y 32QAM respectivamente.



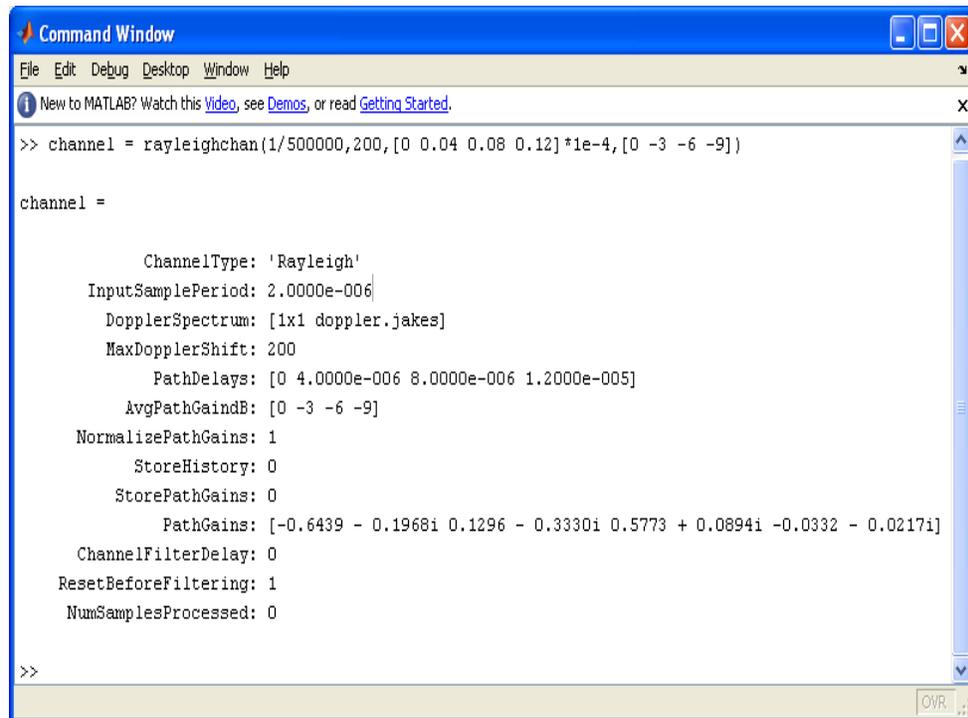
a)



b)

**Figura 5.6** Salida del canal tipo Rayleigh a) Modulación 16QAM y b) Modulación 32QAM.

En cuanto al canal cuyos parámetros son mostrados a continuación:



```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> channel = rayleighchan(1/500000,200,[0 0.04 0.08 0.12]*1e-4,[0 -3 -6 -9])

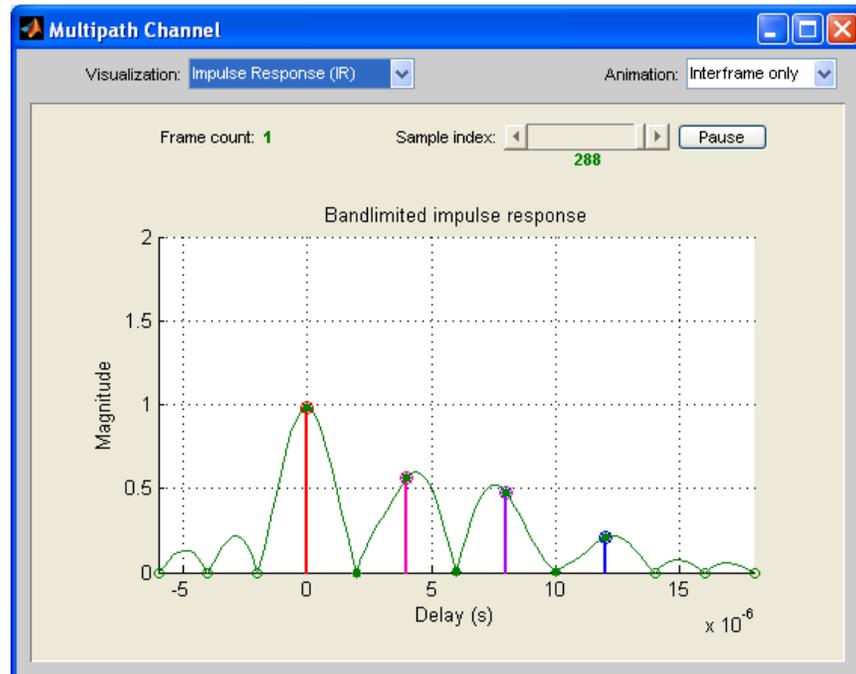
channel =

    ChannelType: 'Rayleigh'
  InputSamplePeriod: 2.0000e-006
  DopplerSpectrum: [1x1 doppler_jakes]
    MaxDopplerShift: 200
      PathDelays: [0 4.0000e-006 8.0000e-006 1.2000e-005]
    AvgPathGaindB: [0 -3 -6 -9]
  NormalizePathGains: 1
    StoreHistory: 0
    StorePathGains: 0
      PathGains: [-0.6439 - 0.1968i 0.1296 - 0.3330i 0.5773 + 0.0894i -0.0332 - 0.0217i]
  ChannelFilterDelay: 0
  ResetBeforeFiltering: 1
  NumSamplesProcessed: 0

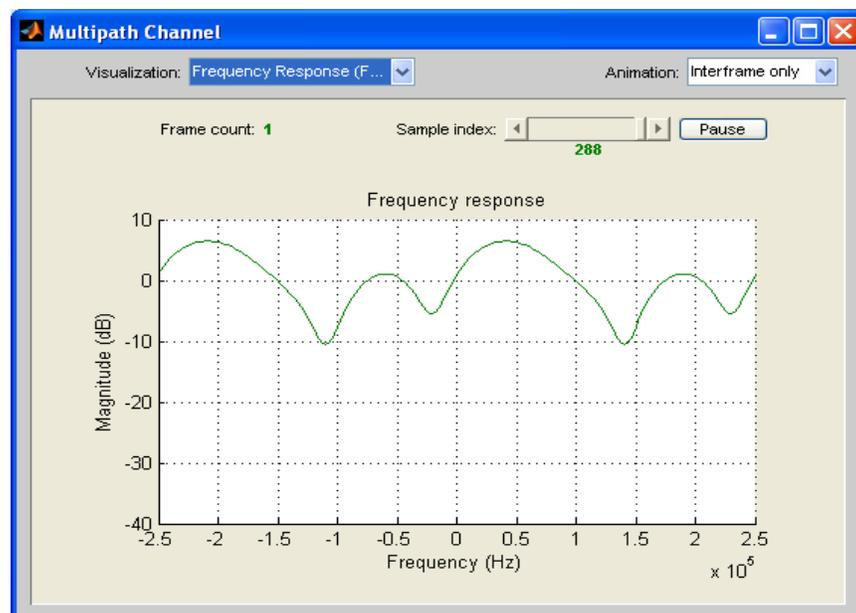
>>
```

**Figura 5.7** Parámetros del Canal tipo Rayleigh.

Y utilizando ciertas herramientas o comandos en MATLAB, podemos obtener la representación de la respuesta al impulso y frecuencia de canal, tal como se muestra en la figura 5.8 a y 5.8 b respectivamente.



a)

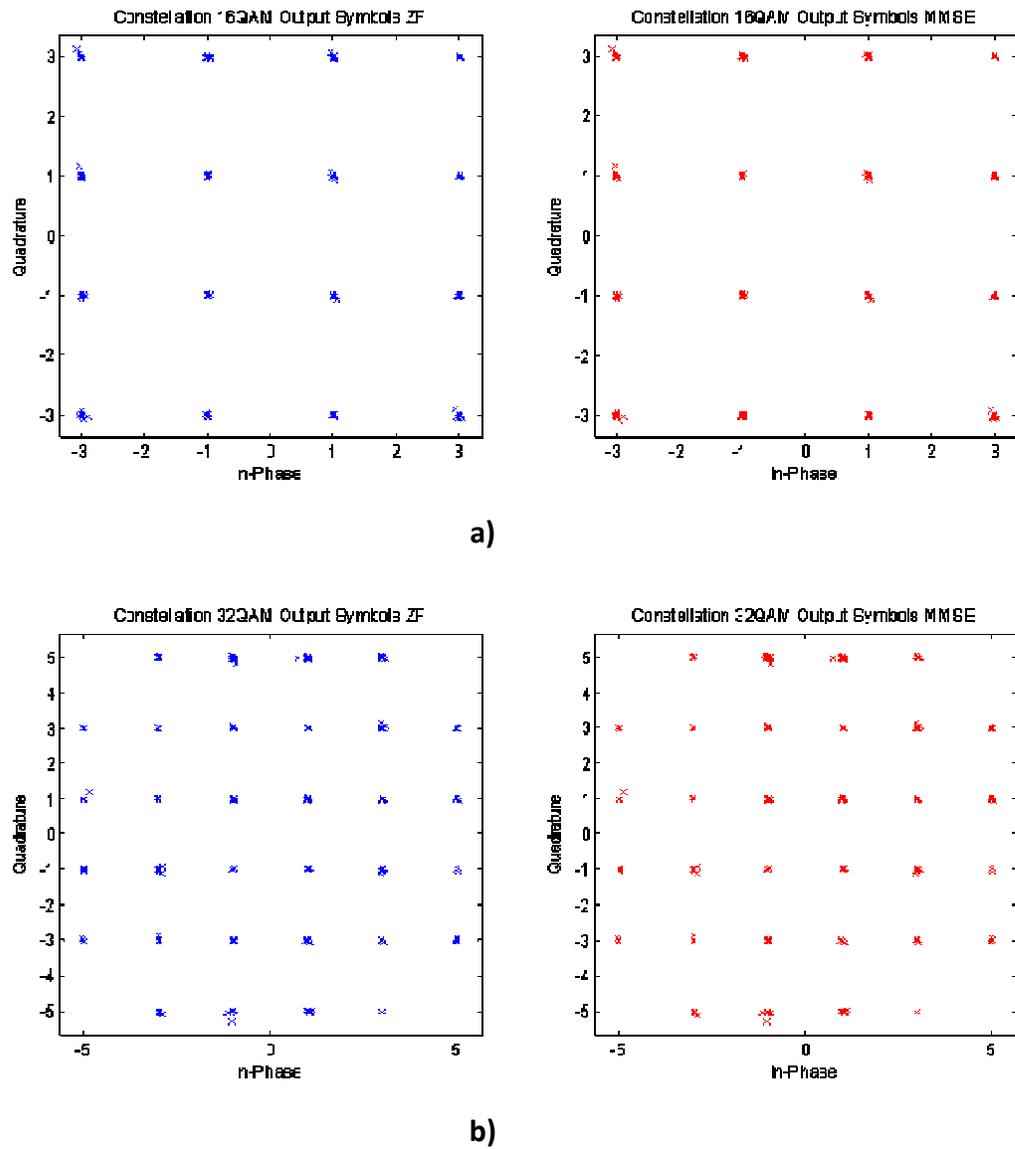


b)

**Figura 5.8** a) Respuesta al Impulso del Canal y b) Respuesta en Frecuencia del Canal.

En cuanto al tipo de desvanecimiento que se produce en una señal transmitida cuando pasa a través del canal, el periodo de la señal  $T_s$  para el sistema es menor a diez veces tiempo de retardo de trayectoria  $\sigma_\tau$  (máximo del vector  $[0 \ 4e^{-6} \ 8e^{-6} \ 12e^{-6}]$  segundos) para este caso  $2 \mu\text{seg} < (12)(10)\mu\text{seg} \rightarrow 2 \mu\text{seg} < 120 \mu\text{seg}$  el desvanecimiento es de *frecuencia selectiva*, además como el periodo de la señal  $T_s$  es mucho menor que el periodo de coherencia  $T_c$  donde  $T_c = 1/f_d$  y la frecuencia Doppler es de  $f_d = 200 \text{ Hz}$ , el tipo de desvanecimiento que sufre mi señal es de tipo *lento* porque cumple con la condición  $2e^{-6}\text{seg} \ll 0.005 \text{ seg}$  que se muestra en las relaciones que se encuentran figura 1.4 del capítulo 1 en descripción de los tipos desvanecimiento a pequeña escala basado en el esparcimiento de retardo multicamino, aplicado a los parámetros del canal que se usó en la simulación del sistema WiMAX fijo que se muestra en la figura 5.7 de esta sección.

Por último representaremos los datos recuperados por parte de cada receptor ZF y MMSE de tal forma que puedan ser demodulados, a continuación estos datos son mostrados en la figura 5.9 a y b respectivos a las modulaciones 16QAM y 32QAM.



**Figura 5.9** Constelación de los símbolos recibidos para el receptor ZF y MMSE utilizando Modulación a) 16QAM y b) 32QAM.

## Conclusiones

Al finalizar el análisis del proyecto, se llegó a las siguientes conclusiones:

- 1)** Como observamos en las gráficas tanto el ecualizador Zero-Forcing como el MMSE son muy similares, debido a que toman los mismo coeficientes de adaptación al filtro, los resultados finales sin embargo como se explico en la teoría de ecualización adaptiva, el ecualizador ZF no es un ecualizador óptimo debido a que engrandece el ruido de la señal por otro lado el MMSE utiliza un algoritmo de estimación del mínimo error cuadrático medio, en el cual el ruido es reducido al mínimo.
- 2)** También como pudimos observar en el análisis de la tasa de error de bits, se puede concluir que entre más grande sea el prefijo cíclico, la curva del BER tiende a crecer.
- 3)** De igual manera se obtuvo un resultado similar a lo anterior en cuanto al BER, cuando se incrementaba el nivel de modulación QAM, la tasa de error de bit tiende a incrementarse.
- 4)** Con respecto al canal que se utilizó al simular el sistema WiMAX una señal que pase atravez de este sufrirá un desvanecimiento de frecuencia selectiva debido a que el periodo de muestreo es menor al camino con el mayor retraso. Además como el periodo de muestreo de mi sistema es mucho menor que el periodo de coherencia mi señal se atenuará por desvanecimiento de tipo lento.

## APÉNDICE

## APÉNDICE A

## Ecuación fraccionalmente Espaciada

En las estructuras estudiadas, el filtro ecualizador trabaja a velocidad de símbolo  $r=1/T$ . Este espaciado es óptimo si el filtro va precedido de un filtro adaptado a la distorsión del canal introducido sobre el pulso transmitido. Pero cuando las características del canal son variantes o desconocidas, el filtro del receptor se adapta usualmente al pulso transmitido, y el instante de la recepción estará optimizado para este filtro *subóptimo*. Este hecho provoca por lo general que el comportamiento del ecualizador sea muy sensible a la elección del instante de muestreo.

Por otro lado, el espectro de la señal a la entrada del ecualizador tendrá por lo general un ancho de banda algo superior a  $r/2$ . Por tanto, la señal que “ve” el filtro a su entrada es una versión con solapamiento (*aliasing*) del espectro de la señal, y será esta versión la que el ecualizador tratará de compensar.

Estos problemas son los que trata de solucionar el ecualizador fraccional, en el que la velocidad de trabajo del ecualizador es superior a la velocidad de símbolo  $r$ .

Consideremos un canal con respuesta global  $h(t)$ . Si se produce un error en la elección del instante de muestreo, podemos considerar que la respuesta del canal es  $h(t-t_0)$ , en donde  $t_0$  es el error cometido.

Al muestrear a periodo de símbolo  $kT$ , obtendremos una respuesta en frecuencia:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \sum_k H\left(f - \frac{k}{T}\right) e^{-j2\pi\left(f - \frac{k}{T}\right)t_0} \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \cdot \sum_k H\left(f - \frac{k}{T}\right) e^{j2\pi \frac{k}{T} t_0} \quad (A.1) \end{aligned}$$

Que en el rango de frecuencia de trabajo, y considerando solo las frecuencias positivas,  $0 < f < 1/2 T$  :

$$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot \left[ H(f) + H\left(f - \frac{1}{T}\right) \cdot e^{j2\pi \frac{1}{T} t_0} \right]$$

$$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot H(f) \left( 1 + \alpha \cdot e^{j2\pi \frac{1}{T} t_0} \right) \quad 0 < f < 1/2 T \quad (A.2)$$

con  $\alpha = \frac{H(f - \frac{1}{T})}{H(f)}$ , y  $|\alpha| < 1$  generalmente, ya que  $H(f)$  decrece monótonamente.

Así, vemos que el espectro ha quedado afectado por el factor  $(1 + \alpha \cdot e^{j2\pi\frac{1}{T}t_0})$ , cuyo modulo puede escribirse como:

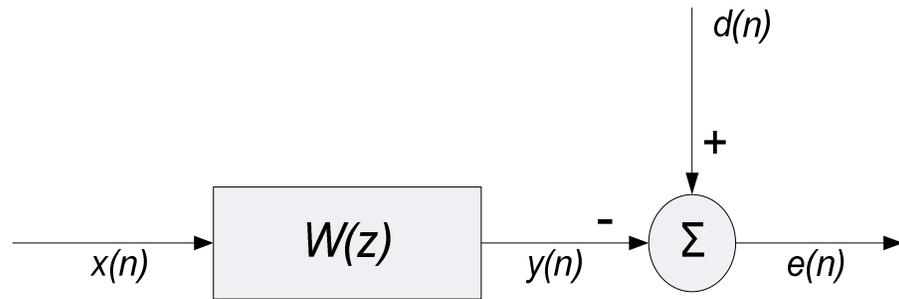
$$1 + |\alpha|^2 + 2 \cdot R\{\alpha\} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{T} t_0 \quad (A.3)$$

Así, la respuesta que ve el filtro varía en función de  $t_0$ . Son especialmente problemáticos los valores de  $t_0$  para los cuales se produzcan nulos o casi nulos, ya que el ecualizador tratará de compensarlos introduciendo mucha ganancia, y enfatizando el ruido. El peor valor para el error cometido es  $t_0 = T/2$

La solución viene dada con el empleo de un filtro que trabaje a velocidad superior, con una frecuencia de muestreo tal que no se produzca *aliasing*. Considerando un ancho de banda para la señal recibida  $B = \frac{r}{2}(1 + \rho)$ , utilizaremos  $f_s > 2B = r(1 + \rho)$ . Un ecualizador que trabaja con espaciado entre muestras de  $T$  se llama ecualizador T-espaciado, si  $\rho = 0.5$ ,  $2T/3$ -espaciados, etc. Los símbolos siguen calculándose cada  $T$ , por lo que en un filtro adaptativo tiene una longitud temporal mitad de la un T-espaciado con el mismo número de coeficientes, el comportamiento del ecualizador fraccionalmente espaciado es al menos tan bueno como el del T-espaciado para cualquier tipo de canal, y es notablemente superior cuando el canal presenta distorsiones severas en los bordes de la banda.

## APÉNDICE B

## El Filtro Óptimo.



**Figura B.1.** Esquema de partida del problema de filtrado óptimo

Conocemos escribiendo la expresión del error de estimación  $e(n)$ :

$$e(n) = d(n) - \sum_{l=0}^{L-1} w_l \cdot x(n-l) = d(n) - \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x}(n) \quad (B.1)$$

La función de coste a minimizar es, como hemos determinado anteriormente, el valor cuadrático medio de la señal de error, esto es:

$$\xi = E[e^2(n)] = E[d^2(n)] - 2 \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w} \quad (B.2)$$

Siendo  $\mathbf{p}$  el vector de correlación cruzada entre la señal de entrada  $x(n)$  y la señal de referencia  $d(n)$  y se define como:

$$\mathbf{p} = E[\mathbf{x}(n) \cdot d(n)] = [p(0)p(-1) \dots \dots p(1-L)]^T \quad (B.3)$$

La matriz de autocorrelación  $\mathbf{R}$  se define como:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n) \cdot \mathbf{x}^T(n)] = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(L-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(L-1) & r_{xx}(L-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Donde el vector de entrada  $\mathbf{x}(n)$  es:

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ \dots \ \dots \ x(n-L+1)]^T \quad (B.5)$$

El filtro óptimo minimiza el valor de la función de coste definida en la ecuación B.2. Para obtener las componentes del mismo, podemos derivar dicha ecuación, obteniendo de esa forma el vector gradiente de la superficie de error:

$$\nabla \xi = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}} = 2 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w} - 2 \cdot \mathbf{p} \quad (B.6)$$

E imponiendo la condición de mínimo:

$$2 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w} - 2 \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (B.7)$$

Obtenemos finalmente la solución del filtro óptimo de Wiener  $\mathbf{w}^0$ :

$$\mathbf{w}^0 = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{p} \quad (B.8)$$

Para obtener el valor mínimo de la función de coste, sustituimos el valor obtenido para el filtro óptimo de la ecuación B.8 en la ecuación B.2:

$$\begin{aligned}\xi_{min} &= E[d^2(n)] - 2 \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^{0T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}^0 = \\ &= E[d^2(n)] - 2 \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{p} + [\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{p}]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{p} = \quad (B.9) \\ &= E[d^2(n)] - \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{p} = E[d^2(n)] - \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{w}^0\end{aligned}$$

El error cuadrático medio de la señal de error puede expresarse en términos de la matriz de autocorrelación  $\mathbf{R}$  de la señal de entrada:

$$\xi = \xi_{min} + (\mathbf{w} - \mathbf{w}^0)^T \cdot \mathbf{R} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}^0) \quad (B.10)$$

Si introducimos el vector  $\mathbf{v}$  como la traslación del vector de coeficientes con respecto a la solución óptima:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^0 \quad (B.11)$$

La función de coste puede escribirse como:

$$\xi = \xi_{min} + \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \quad (B.12)$$

Por otro lado, la matriz  $\mathbf{R}$  es semidefinida positivamente (todos sus valores propios son reales no negativos) y puede expresarse en términos de sus valores propios como sigue:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{Q}^T \quad (B.13)$$

Donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal que tiene en su diagonal principal los valores propios de  $\mathbf{R}$ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_L \end{bmatrix} \quad (B.14)$$

Y  $\mathbf{Q}$  tiene como columnas los vectores propios de la matriz de autocorrelación  $\mathbf{R}$ . Como los valores propios son ortogonales entre si y están normalizados, la matriz  $\mathbf{Q}$  es ortogonal y cumple:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad (B.15)$$

O lo que es lo mismo:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad (B.16)$$

Si definimos una versión rotada del vector de desajuste de coeficientes de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v} \quad (B.17)$$

Entonces podemos reescribir la función de coste a minimizar como:

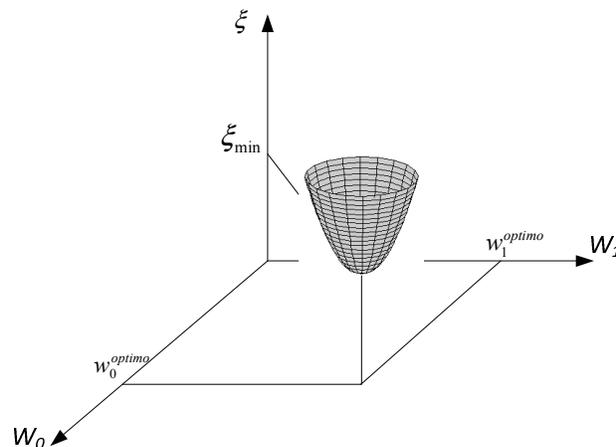
$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_{min} + (\mathbf{w} - \mathbf{w}^0)^T \cdot \mathbf{R} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}^0) = \\
 &= \xi_{min} + \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = \\
 &= \xi_{min} + \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{Q} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{v} = \\
 &= \xi_{min} + (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v})^T \cdot \Lambda \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v}) = \\
 &= \xi_{min} + \mathbf{v}'^T \cdot \Lambda \cdot \mathbf{v}' \qquad (B.18)
 \end{aligned}$$

Si desacoplamos la notación matricial, podemos expresar la función de coste como indica la ecuación B.19:

$$\xi = \xi_{min} + \sum_{l=1}^L \lambda_l \cdot \mathbf{v}'^2 \qquad (B.19)$$

## El método de descenso profundo o máxima pendiente.

Hemos visto que la superficie MSE es una función cuadrática de los coeficientes del filtro y que, por lo tanto, ajustar los coeficientes para minimizar el error implica descender a lo largo de la superficie, hasta alcanzar el punto más bajo. Con esta idea fueron desarrollados algoritmos descendentes basados en el cálculo del gradiente en un punto de la superficie. El desarrollo matemático del algoritmo se facilita observando la Figura B.2.



**Figura B.2.** Superficie de error para un filtro FIR adaptivo de dos coeficientes.

Supongamos un valor inicial de los coeficientes del filtro  $\mathbf{w}(0)$ , que corresponden a un único valor de  $\xi(0)$ . El conjunto de estos valores determinan un punto inicial en la superficie MSE.

Calculando el gradiente en ese punto, obtenemos el grado de variación de la superficie con respecto a sus coordenadas.

Tomando la dirección negativa del gradiente, nos vamos desplazando por sucesivos puntos de la superficie, hasta alcanzar el punto donde el error cuadrático medio se minimiza. Además siguiendo la dirección contraria al gradiente, avanzamos hacia el mínimo de la manera más rápido posible. Este concepto puede ser implementado por el siguiente algoritmo:

$$\mathbf{w}(n + 1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{2} \cdot (-\nabla\xi(n)) \quad (B.20)$$

Donde  $\nabla\xi(n)$  es el gradiente de la superficie MSE dado por las derivadas direccionales  $\partial\xi(n)/\partial w_i$ , y  $\mu$  es el factor de convergencia (o tamaño de peso) que controla el compromiso entre la estabilidad del algoritmo y la rapidez de alcanzar el punto deseado.

Reemplazando la ecuación B.6 en B.20, obtenemos que el algoritmo de descenso máxima pendiente queda:

$$\mathbf{w}(n + 1) = \mathbf{w}(n) + \mu \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}) \quad (B.21)$$

Cuando  $\mathbf{w}(n)$  ha convergido hasta  $\mathbf{w}^0$ , es decir, cuando se alcanza el mínimo punto de la superficie MSE, el gradiente se anula,  $\nabla\xi(n) = 0$

Continuando con el desarrollo del algoritmo, reescribimos la ecuación B.21

$$\mathbf{w}(n+1) = [\mathbf{I} - \mu \cdot \mathbf{R}] \cdot \mathbf{w}(n) + \mu \cdot \mathbf{p} \quad (B.22)$$

Sustituyendo en la ecuación B.22 el valor del filtro óptimo de Wiener (ecuación B.8) tenemos:

$$\mathbf{w}(n+1) = [\mathbf{I} - \mu \cdot \mathbf{R}] \cdot \mathbf{w}(n) + \mu \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}^0 \quad (B.23)$$

Realizando una traslación del vector de coeficientes y rotando el nuevo vector empleando la matriz  $\mathbf{Q}$  de vectores propios de la matriz de autocorrelación  $\mathbf{R}$ , como se expresa en las ecuaciones B.11 y B.17, respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(n+1) &= [\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{Q} - \mu \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}] \cdot \mathbf{v}'(n) \\ &= [\mathbf{I} - \mu \cdot \mathbf{\Lambda}] \cdot \mathbf{v}'(n) \end{aligned} \quad (B.24)$$

Reiterando la ecuación B.24 desde el primer valor de  $n$  tenemos:

$$\mathbf{v}'(n) = [\mathbf{I} - \mu \cdot \mathbf{\Lambda}]^n \cdot \mathbf{v}'(0) \quad (B.25)$$

El vector de coeficientes converge si se cumple:

$$[\mathbf{I} - \mu \cdot \mathbf{\Lambda}]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (B.26)$$

La convergencia debe darse para las  $L$  componentes de la diagonal de la matriz:

$$\begin{bmatrix} [1 - \mu \cdot \lambda_1]^n & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & [1 - \mu \cdot \lambda_2]^n & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & [1 - \mu \cdot \lambda_L]^n \end{bmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (B.27)$$

Por lo tanto, la condición exigida al factor de convergencia para garantizar la estabilidad del algoritmo adaptativo se impone sobre el mayor de los valores propios para asegurar la convergencia de todos los modos,

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}} < \frac{2}{\lambda_l} \quad (B.28)$$

Siendo  $\lambda_{max}$  el mayor valor propio de la matriz de autocorrelación  $\mathbf{R}$ .

Para estimar la velocidad de convergencia de cada modo consideramos el tiempo que debe transcurrir para una caída:

$$(1 - \mu \cdot \lambda_l)^{\tau_l} = \frac{1}{e} \quad (B.29)$$

Despejando  $\tau_l$  tenemos:

$$\tau_l = \frac{-1}{\ln(1 - \mu \cdot \lambda_l)} \quad (B.30)$$

Si la convergencia es lenta y el paso de adaptación suficientemente pequeño, se puede emplear una aproximación empleando el desarrollo en serie de Taylor, obteniendo:

$$\tau_l \approx \frac{1}{\mu \cdot \lambda_l} \quad (B.31)$$

El modo más lento será el de menor energía, es decir:

$$\tau_l \approx \frac{1}{\mu \cdot \lambda_l} \leq \frac{1}{\mu \cdot \lambda_{min}} = \tau_{l,max} \quad (B.32)$$

De modo que  $\tau_{l,max}$  define la convergencia de los coeficientes.

Analicemos ahora la convergencia de la función de coste  $\xi(n)$ . Según la ecuación B.19,  $\xi(n)$  puede escribirse en términos de  $\lambda_l$  y de  $v'$ . Reiterando desde el primer valor de los coeficientes de acuerdo con la ecuación B.25 tenemos:

$$\xi(n) = \xi_{min} + \sum_{l=1}^L \lambda_l \cdot (1 - \mu \cdot \lambda_l)^{2n} v_l'^2(0) \quad (B.33)$$

Si el algoritmo de máxima pendiente converge con  $0 < \mu < 2/\lambda_{max}$  - entonces sin importar cuales sean las condiciones iniciales, tenemos:

$$\xi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_{min} \quad (B.34)$$

Esto implica que en el límite se anule el segundo término de la ecuación B.33.

La constante de tiempo en la curva de aprendizaje puede calcularse de un modo serial al cálculo realizado para la convergencia de los coeficientes:

$$(1 - \mu \cdot \lambda_l)^{2\tau_{l,MSE}} = \frac{1}{e} \quad (B.35)$$

Despejando  $\tau_{l,MSE}$  tenemos:

$$\tau_{l,MSE} \approx \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot \lambda_l} \leq \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot \lambda_{min}} = \tau_{MSE,max} \quad (B.36)$$

Quedando calculada la constante de tiempo del MSE. Como el factor de convergencia esta acotado,  $\mu < 2/\lambda_{max}$  se tiene:

$$\tau_{MSE,max} = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot \lambda_{min}} > \frac{\lambda_{max}}{4 \cdot \lambda_{min}} \quad (B.37)$$

De modo que la dispersión de valores propios  $\lambda_{max}/\lambda_{min}$  define la velocidad de la convergencia del algoritmo. A partir de la ecuación B.36 podemos promediar la constante de tiempo media:

$$\begin{aligned} \tau_{MSE,max} &= \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot \bar{\lambda}} = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot \sum_{l=1}^L \frac{\lambda_l}{L}} = \frac{L}{\sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{l,MSE}}} \quad (B.38) \\ &= \frac{L}{2 \cdot \mu \cdot tr[\mathbf{R}]} = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot P_x} \end{aligned}$$

A la vista de la ecuación anterior, la constante de tiempo promedio es la media armónica de las constantes de tiempo de cada modo. En cuanto al desajuste del algoritmo de máxima pendiente, es nulo ya que los coeficientes convergen a la solución de Wiener, esto es:

$$M_{MSE} = \frac{\xi_{exceso}}{\xi_{min}} = 0 \quad (B.39)$$

A modo de resumen, el método de descenso de máxima pendiente precisa del conocimiento de la matriz  $\mathbf{R}$  de autocorrelación de la señal de entrada y del vector  $\mathbf{p}$  de correlación cruzada entre la entrada y la señal deseada.

La dificultad de implementar el método es doble; por un lado realizar en cada iteración el cálculo de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{p}$  es computacionalmente costoso y por otro lado, aún disponiendo de la capacidad de llevar a cabo los cálculos puede no ser posible calcular los momentos estadísticos al tener sólo una realización de los procesos.

Además, la condición de estacionaria las señales  $x(n)$  y  $d(n)$  sólo suele ser válida en la práctica para algunos tipos de señales y en determinados intervalos de tiempo.

**ABREVIATURAS**

AWGN	Additive White Gaussian Noise
BER	Bit Error Rate
CP	Cyclic Prefix
DFT	Discrete Fourier Transform
DSSS	Direct Sequence Spread Spectrum
FDM	Frequency Division Multiplexing
FFT	Fast Fourier Transform
FHSS	Frequency Hopping Spread Spectrum
FIR	Finite Impulse Response
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
ISI	Inter Symbol Interference
LOS	Line Of Sight
MMSE	Minimum Mean Square Error
NLOS	Non Line Of Sight
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
PAM	Pulse Amplitude Modulation
QAM	Quad Amplitude Modulation
RF	Radio Frequency
SNR	Signal to Noise Ratio
ZF	Zero Forcing

## REFERENCIAS

- [1] **Rappaport Theodore S.**, Wireless Communications: Principles and Practice Second Edition, Prentice Hall, 1996
- [2] **Marvin K. Simon, Mohamed-Slim Alouini**, Digital Communication over Fading Channels, Jhon Wiley, 2000
- [3] **Fernández Fernández Oscar**, Tesis Doctoral: Caracterización Experimental y Modelado de Canal MIMO para Aplicaciones WLAN y WMAN Universidad de Cantabria Departamento de ingeniería de comunicaciones, Mayo 2007.
- [4] **Proakis Jhon G., Salehi Masoud**, Communication Systems Engineering Second Edition, Pearson Prentice Hall, 2005
- [5] **Sklar Bernard**, Digital Communication Systems: Fundamentals and Applications, Second Edition, Prentice Hall PTR, September 2004.
- [6] **Garg Vijay K.**, Wireless Communications and Networking, Morgan Kaufmann Publisher, 2007.
- [7] **Goldsmith Andrea**, Wireless Communications, Cambridge University Press, 2005.
- [8] **Simon Haykin**, Communications Systems Fourth Edition, John Wiley & Sons, 2001.
- [9] **Ahmed Alywa Abdo Gad**, Performance Evaluation and Coverage Prediction of Fixed WiMAX , Shorouk Academy The Higher Institute of Engineering Department of Communication and Electronics, 2008
- [10] **Andrews Jeffrey G., Ghosh Arunabha, Muhamed Rias**, Fundamentals of WiMAX: Understanding Broadband Wireless Networking First edition, Prentice Hall, February 2008.
- [11] **kungl Tekniska Hogskolan**, Equalization Techniques, Vetenskap Och Konst, [http://www.cos.ict.kth.se/education/msc/radio/courses/WTRANSMISSION\\_2E1514\\_2006/downloads/lecture\\_4.pdf](http://www.cos.ict.kth.se/education/msc/radio/courses/WTRANSMISSION_2E1514_2006/downloads/lecture_4.pdf).