ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRIMERA EVALUACIÓN DE ÁLGEBRA LINEAL

Nombre: ………………………………. Paralelo: ……

Firma: ……………………….. 8 de julio de 2009

1. (16 ptos) Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. **Justifique su respuesta**.

a. Si $(V,\oplus,\square)$ es un espacio vectorial, y sean H y W dos subespacios de V tales que:

$W = \text{Gen}\ \ w_1, w_2, w_3$ y $w_1, w_2 \in H$, entonces $\dim\ \ H \cap W\ \ = 2$

Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \square \right\}$ y $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ \frac{1}{2} y_1 y_2 \end{pmatrix}$, entonces:

b. $\exists u \in V\ \forall v \in V:\ u \oplus v = v$

c. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V: v_1 \oplus\ \ v_2 \oplus v_3\ \ =\ \ v_1 \oplus v_2\ \ \oplus v_3$

d. Sea A una matriz equivalente a una matriz B, se tiene que $\rho\ \ A\ \ = \rho\ \ B$

2. (16 ptos) Sea $V = \mathrm{M}_{2\times 2}$ y sean los subespacios:

$W_1 = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$, $W_2 = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$. Determine:

a. Una base para W_1 y W_2

b. Una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$

c. Una base y la dimensión de $W_1 + W_2$

d. ¿Es $W_1 \cup W_2$ un subespacio de $\mathrm{M}_{2\times 2}$?

3. (10 ptos) Sea $V = P_2$ y sean los vectores:

$$p(x) = ax^2 + x + 1, \quad q(x) = 2x^2 + ax + 1, \quad r(x) = x^2 + 2x + 1$$

y sea $W = Gen\{p(x), q(x), r(x)\}$. Determine el valor de a tal que:

a. $\dim(W) = 1$, $\dim(W) = 2$

b. Si $a = 1$, determine la base de W.

4. (14 ptos) Sean $B_1 = \; -x^2+1, x^2, x^2+x-1 \;$ y $B_2 = \; v_1, v_2, v_3 \;$ bases de P_2. Sea C la matriz de transición de B_1 a B_2:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Determine los vectores de la base B_2

b. Si B_3 es la base canónica de P_2. Encuentre la matriz de cambio de base de B_3 a B_1

5. (14 ptos) Sean $u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ elementos de $\mathbb{R}^2$ y sea

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Si u, v, w son colineales ¿cuál es el rango de A?

b. Determine una base para el espacio fila de A.