ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

CÁLCULO DIFERENCIAL

Rúbrica de la Segunda Evaluación

II Término – 03/septiembre/2010

Nombre: ______________________________ Paralelo: ____

Examen: _____

Lecciones: _____

Deberes: _____

Proyecto: _____

Otro: _____

Total: _____

TEMA No. 1 (15 PUNTOS)

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Justifique formalmente su calificación.

a. Sea f una función continua en IR. Si f ” (2) no existe, entonces (2, f (2)) no es un punto de inflexión

Sea la función: $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, esta función es continua en IR y su segunda derivada es: $f``(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$, de donde f ” (2) no existe. Pero sin embargo el punto (2, f (2)) si es un punto de inflexión ya que:
f``(x)<0, si x>2; y f``(x)>0, si x<2. Lo cual corresponde a un cambio de concavidad en torno a este punto.

Por lo tanto, la proposición es **FALSA**.

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes o califica la proposición sin justificar o la califica mal dando un ejemplo.	Intenta dar un contraejemplo pero no es el adecuado o da un contraejemplo correcto pero no justifica.	Da un contraejemplo correcto y justifica correctamente; pero, no concluye o la conclusión es incorrecta.	Planteamiento correcto, cálculos correctos y conclusión correcta. (No necesita dar una regla de correspondencia para la función).
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

b. Dada la ecuación $x^2+y^2=1$ entonces $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{y^3}$

Calculando la primera derivada con respecto a x, tenemos:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Calculando la segunda derivada con respecto a x, tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^3}$$

Por lo tanto, la proposición es **VERDADERA.**

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No sabe derivar o califica la proposición sin justificar.	Calcula la primera derivada correctamente pero se equivoca en el cálculo de la segunda derivada.	Calcula correctamente la primera y la segunda derivada; pero, no concluye o la conclusión es incorrecta.	Planteamiento correcto, cálculos correctos y conclusión correcta.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

c. Sea g(x) =$\sqrt{9-x^2}$ y h(x) = f (g(x)) donde f es diferenciable en 3, entonces h´(0) = 0

Derivando h(x), tenemos:

$$h`(x) = f`\big(g(x)\big)g`(x)$$

Evaluando en x=0, tenemos:

$$h`(0) = f`\big(g(0)\big)g`(0)$$

De donde $g`(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ , g`(0) = 0 y g(0) = 3.

De ahí que:

$$h`(0) = f`(3)(0)$$

Y ya que f es diferenciable en 3, entonces f`(3) existe y es finito (f`(3)<+∞).

Por lo tanto h`(0) = 0 y la proposición es **VERDADERA.**

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes o califica la proposición sin justificar.	Intenta encontrar la derivada de h(x) pero se equivoca en el proceso. No aplica bien la regla de la cadena.	Calcula correctamente h`(x), evalúa correctamente en x=0, considera que f`(3) existe; pero, no concluye o la conclusión es incorrecta.	Planteamiento correcto, cálculos correctos y conclusión correcta.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

TEMA No. 2 (10 PUNTOS)

Para cada uno de los literales siguientes, calcular y' , y dejarlo expresado de la forma más simplificada posible

a. $y = \frac{e^{3x-4}}{\sqrt{5cos(3x)}} + arctan(xlnx)$

$$y` = \frac{3e^{3x-4}\sqrt{5\cos(3x)} + e^{3x-4}\frac{15}{2\sqrt{5\cos(3x)}}\operatorname{sen}(3x)}{5\cos(3x)} + \frac{lnx+1}{1+(xlnx)^2}$$

$$y` = \frac{3e^{3x-4}\left(\frac{10\cos(3x) + 15\text{sen}(3x)}{2\sqrt{5\cos(3x)}}\right)}{5\cos(3x)} + \frac{lnx + 1}{1 + (xlnx)^2}$$

$$y` = \frac{3e^{3x-4}(10\cos(3x) + 15\text{sen}(3x))}{2[5\cos^3(3x)]^{3/2}} + \frac{lnx + 1}{1 + (xlnx)^2}$$

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes.	Intenta calcular y` pero se equivoca e el proceso o la derivada es incorrecta. Errores en las reglas de derivación.	Deriva correctamente la expresión pero no simplifica la expresión o se equivoca en la simplificación.	Calcula correctamente y` y simplifica correctamente.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

b. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros tenemos:

$$lny = ln\left(\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\right)$$

$$lny = \frac{1}{3}[lnx + \ln(x^2+1) - 2\ln(x^2-1)]$$

Derivando con respecto a x tenemos:

$$\frac{1}{y}y` = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2-1}\right)$$

$$y` = \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2-1}\right)$$

$$y` = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2-1}\right)$$

$$y` = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\left(\frac{-x^4-6x^2-1}{x(x^4-1)}\right)$$

$$y` = -\frac{1}{3}\frac{x^4+6x^2+1}{\sqrt[3]{x^2(x^2+1)^2(x^2-1)^5}}$$

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes.	Intenta calcular y` pero se equivoca e el proceso o la derivada es incorrecta. Errores en las reglas de derivación.	Deriva correctamente la expresión pero no simplifica la expresión o se equivoca en la simplificación.	Calcula correctamente y` y simplifica correctamente.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

TEMA No. 3 (5 PUNTOS)

Sea f(x) = 10x^2-11x+11; $x > \frac{11}{20}$; hallar $\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)(8)$

Tenemos que $\frac{d}{dx}f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f`(x)}$, de donde:

$$f`(x) = 20x - 11$$

Por otro lado: f(x)=8

Es decir: $10x^2 - 11x + 11 = 8$

$$10x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$(10x-5)(10x-6) = 0$$

$$x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Ya que x>11/20, entonces el valor de x a tomar es x=3/5.

Por lo tanto $\frac{d}{dx}f^{-1}(8) = \frac{1}{f`\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{20\left(\frac{3}{5}\right)-11} = \frac{1}{1} = 1$

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes.	Calcula correctamente f\`(x) pero se equivoca en el cálculo de $\frac{df^{-1}}{dx}$. No sabe donde evaluar f^{-1}.	Calcula correctamente $\frac{df^{-1}}{dx}$, sabe donde evaluar f^{-1} , pero se equivoca en las cuentas.	Planteamiento y cálculos correctos.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

TEMA No. 4 (5 PUNTOS)

Utilizando diferenciales calcule el valor aproximado de $\sqrt{\frac{(2.027)^2-3}{(2.027)^2+5}}$

Para este caso tenemos que: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$, $x = 2, \triangle x = 0.027$

$$f(x+\triangle x) \approx f(x) + f`(x) \triangle x$$

$$f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}} \frac{2x(x^2+5) - 2x(x^2-3)}{(x^2+5)^2}$$

$$f`(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2-3}} \frac{16x}{(x^2+5)^2}$$

$$f`(x) = 8x \frac{1}{\sqrt{(x^2-3)(x^2+5)^3}}$$

Entonces

$$f(x+\triangle x) \approx \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}} + 8x \frac{1}{\sqrt{(x^2-3)(x^2+5)^3}} \triangle x$$

Reemplazando los valores de x y Δx, tenemos:

$$f(2.027) \approx \sqrt{\frac{2^2-3}{2^2+5}} + 8(2)\frac{1}{\sqrt{(2^2-3)(2^2+5)^3}}(0.027)$$

$$f(2.027) \approx \sqrt{\frac{1}{9}} + 16\frac{1}{\sqrt{(2^2-3)(2^2+5)^3}}(0.027)$$

$$f(2.027) \approx \frac{1}{3} + 16\frac{1}{27}(0.027)$$

$$f(2.027) \approx 0.33 + 16(0.001)$$

$$f(2.027) \approx 0.346$$

Por lo tanto $\sqrt{\frac{(2.027)^2-3}{(2.027)^2+5}} \approx 0.346$

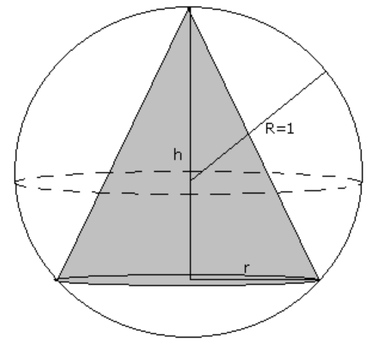
Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes.	Identifica solo parcialmente f(x), x, Δx a utilizar en la aproximación, o se equivoca en cálculo de la derivada.	Identifica correctamente f(x), x, Δx a utilizar en la aproximación, deriva correctamente pero se equivoca en el tratamiento algebraico.	Planteamiento y cálculos correctos.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

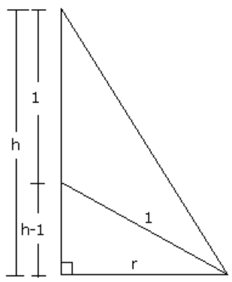
TEMA No. 5 (6 PUNTOS)

Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 1.

Función objetivo: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Para hallar una relación entre r y h, consideremos el siguiente corte geométrico:





De donde por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$1 = r^2 + (h-1)^2$$

$$r^2 = 1 - (h-1)^2$$

$$r^2 = -h^2 + 2h$$

Con esto último, la función objetivo en términos de una variable es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(-h^2 + 2h)h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2)$$

Derivando con respecto a h tenemos:

$$V` = \frac{1}{3}\ \pi(-3h^2 + 4h)$$

$$\frac{1}{3}\ \pi(-3h^2 + 4h) = 0$$

$$-3h^2 + 4h = 0$$

$$h(-3h + 4) = 0$$

$$h = 0\ \vee\ \ h = 4/3$$

Con h = 4/3 tenemos el volumen máximo ya que; si h>4/3, entonces V`<0 y si h<4/3, entonces V`>0.

Calculamos r:

$$r^2 = -\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$r^2 = -\frac{16}{9} + \frac{8}{3} = \frac{-16+24}{9} = \frac{8}{9}$$

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto las dimensiones del cono recto de volumen máximo son $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $h = 4/3$.

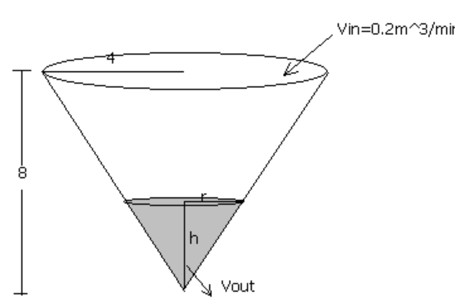
Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes.	Obtiene parcialmente la función objetivo en términos de una variable, pero se equivoca en el cálculo de la derivada o de encontrar la relación geométrica entre las dos variables.	Obtiene la función objetivo en términos de una variable, calcula correctamente la derivada pero no identifica correctamente el valor en que se produce el volumen máximo.	Planteamiento y cálculos correctos.
0	**1 - 3**	**4 - 5**	**6**

TEMA No. 6 (6 PUNTOS)

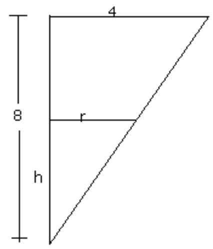
En un depósito de forma cónica se está vertiendo agua a razón de 0,2 m^3/min. El cono tiene una altura de 8m y una radio de 4m. Si el depósito tiene una fuga y el nivel sube a una razón de 0.02 m/min, cuando el agua tiene una altura de 5m. ¿Con que rapidez sale agua del depósito?

$$Ventra - Vsale = Vqueda$$

$$Vqueda = Vcono = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Para hallar una relación entre r y h, consideremos el siguiente corte geométrico:



De ahí que por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}h$$

Por lo tanto $Vcono = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$

Derivando con respecto a t, tenemos:

$$\frac{d}{dt}Ventra - \frac{d}{dt}Vsale = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

Despejando lo requerido y reemplazando los datos tenemos:

$$\frac{d}{dt}Vsale = \frac{d}{dt}Ventra - \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}Vsale = 0.2 - \frac{\pi}{4}5^2 0.02 = (0.2 - 0.125\pi)m^3/min$$

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
No realiza procesos coherentes.	Realiza un gráfico del problema, encuentra la fórmula correcta del volumen del cono V(r, h); pero se equivoca en la relación entre r y h.	Encuentra la fórmula correcta del volumen del cono V(h); deriva correctamente; pero no reemplaza los datos o los cálculos son incorrectos.	Planteamiento y cálculos correctos.
0	**1 - 3**	**4 - 5**	**6**

TEMA No. 7 (5 PUNTOS)

Determine el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$$

Para este caso tenemos la forma indeterminada $1^{+\infty}$ y un método para calcular este límite es mediante la regla de L`Hopital. Para esto necesitamos expresar la función de tal manera que la forma indeterminada sea $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left(cos\sqrt{x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(cos\sqrt{x}\right)}{x}}$$

En esta última expresión se presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. De ahí que aplicamos la regla de L`Hopital y tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{cos\sqrt{x}}\left(-\mathrm{sen}\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2cos\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)} = e^{-1/2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = e^{-1/2}$$

Otra forma de resolver este límite consiste en la aplicación de algún límite notable:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\left[1+\left(cos\sqrt{x}-1\right)\right]^{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\left[1+\left(cos\sqrt{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{cos\sqrt{x}-1}\frac{cos\sqrt{x}-1}{x}}$$

Calculando el límite del exponente tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{cos\sqrt{x}-1}{x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1-cos\sqrt{x}}{x} = -1/2$$

Entonces: $\lim_{x\to 0^+}\left[1+\left(cos\sqrt{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{cos\sqrt{x}-1}\frac{cos\sqrt{x}-1}{x}} = e^{-1/2}$

Y por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = e^{-1/2}$$

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**

No realiza procesos coherentes.	No rearregla la expresión para aplicar L`Hopital, o deriva incorrectamente. Intenta llegar a la expresión de límites notables.	Deriva correctamente pero se equivoca en los cálculos.	Planteamiento y cálculos correctos.
0	**1 - 2**	**3 - 4**	**5**

TEMA No. 8 (8 PUNTOS)

Sea la función con regla de correspondencia $y = ax^3 + bx^2 + cx + 5$, para todo x real.

Determinar a,b,c si:

i. Tiene un punto estacionario en (0,5)
ii. Tiene un punto de inflexión en x=1
iii. Interseca al eje x en x=1
iv. Bosqueje la curva

Calculando la primera derivada:

$$f`(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Ya que f tiene un punto estacionario en x = 0, tenemos que f`(0)=0; es decir:

$$f`(0) = 3a(0^2) + 2b(0) + c = 0$$

Por lo tanto c = 0.

Por otro lado, calculamos la segunda derivada:

$$f``(x) = 6ax + 2b$$

Ya que f tiene un punto de inflexión en x = 1, tenemos que f``(1)=0; es decir:

$$f``(1) = 6a(1) + 2b = 0$$

Por lo tanto 3a + b = 0.

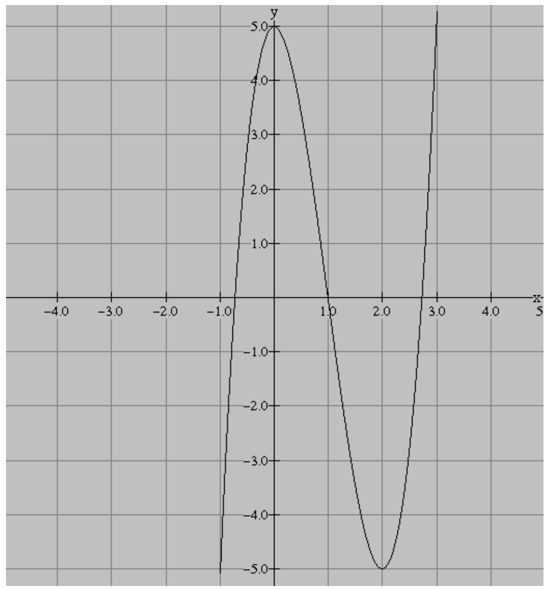
Finalmente, ya que f interseca al eje x en x = 1, tenemos:

$$f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + 5 = 0$$

Por lo tanto a + b = -5.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -5 \end{cases}$, tenemos que a =5/2 y b =-15/2 .

El bosquejo de la curva $f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 5$ es:



i)	No considera esta condición para calcular los valores de a, b, c.	Calcula correctamente y\` pero comete errores en las cuentas.	Calcula correctamente y\` y calcula el valor de c correctamente.
	0	**1**	**2**
ii)	No considera esta condición para calcular los valores de a, b, c.	Calcula correctamente y\`\` pero comete errores en las cuentas.	Calcula correctamente y\`\` y obtiene correctamente la condición 6a+2b=0
	0	**1**	**2**
iii)	No considera esta condición para calcular los valores de	Plantea la condición f(1)=0 pero se equivoca	Evalúa correctamente, y obtiene la condición

	a, b, c.	en las cuentas.	a+b = -5
	0	**1**	**2**
iv)	No grafica o gráfica incorrecta.	Grafica la función pero se equivoca en ubicar los puntos dados en las condiciones.	Grafica la función correctamente y ubica correctamente los puntos dados en las condiciones.
	0	**1**	**2**