

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la**

**Producción**

Modelo Cinemático Brazo Robótico de cinco grados de libertad para uso

didáctico

**TRABAJO FINAL DE GRADUACION**

Materia Integradora

Previo la obtención del Título de:

**INGENIERO MECÁNICO**

Presentado por:

Gonzalo Roberto Benavides Sabando

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año: 2016

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios por cada día de vida, a mis padres por su infinito amor y siempre fe en mí, a mi novia por su incalculable apoyo en cada momento para poder lograr el objetivo que estoy alcanzando y a mis abuelitos en el cielo.

Agradezco al Ing. Eloy Moncayo Triviño y al Ing. Rodolfo Paz por haber sido guías fundamentales en el desarrollo del proyecto en cuanto a los ámbitos teóricos y metodológicos.

A mis seres queridos, mi tías Aura, Norma, Mercedes y Cristina quienes supieron darme a mano cuando lo necesité.

## DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad del contenido desarrollado en la presente propuesta de la materia integradora corresponde exclusivamente al equipo conformado por:

Gonzalo Roberto Benavides Sabando  
Ing. Eloy Leonardo Moncayo Triviño

y el patrimonio intelectual del mismo a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción (FIMCP) de la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”.

Estamos también de acuerdo que el vídeo de la presentación oral es de plena propiedad de

  
Gonzalo Benavides S.

la FIMCP.  
  
Eloy Moncayo T.  
Director del Proyecto

## RESUMEN

El presente proyecto consistió en la determinación de un modelo matemático que describe el movimiento del brazo robótico SCORBOT ER 4u, conocido como Modelo Cinemático y su correspondiente validación mediante programas informáticos como Matlab.

El proyecto fue desarrollado con la finalidad de crear un recurso adicional a la investigación y en el desarrollo de modelos de control, ya que ESPOL posee el brazo robótico con fines educativos. Scrobot ER 4u pertenece a una serie de robots diseñados con fines educativos para simular situaciones industriales de manufactura asistida.

Para esto fue necesaria la búsqueda de información tanto bibliográfica como de internet de los aspectos y parámetros geométricos para el desarrollo del Modelo Cinemático y su validación mediante el ingreso de valores y observando su comportamiento lo que concierne a la localización del robot definida por sus variables articulares o por las coordenadas de localización de su extremo y sus derivadas, velocidad y aceleración.

El proceso de la determinación del Modelo Cinemático comenzó con la lectura de varios libros de Robótica y de los trabajos anteriores tanto del Scrobot ER 4u, como de robots similares del mismo fabricante. Los parámetros geométricos se los determinó con el modelo en tres dimensiones de Autocad y con las herramientas que éste posee.

Finalmente con la utilización de programas como Matlab dio paso la programación respectiva para tener a disposición un recurso que permitió el cálculo de la posición, velocidad y aceleración del extremo final del robot de manera general mediante el ingreso de las variables de sus articulaciones.

El desarrollo de este proyecto sirve de base para la continuidad de una línea de investigación, orientada al desarrollo de modelos de control.

### **Palabras Clave:**

Cinemática, Modelos de Control, Manufactura, Modelado Cinemático.

## **ABSTRACT**

*This project involved the determination of a mathematical model describing the motion of the robot arm SCORBOT ER 4u, known as kinematic model and its corresponding validation by software such as Matlab.*

*The project was developed in order to create additional resources for development of control models, ESPOL has the robotic arm for educational purposes. Scrobot ER 4u belongs to a series of robots designed for educational purposes to simulate industry situations of aided manufacturing.*

*For this, it was necessary to find information, both literature and Internet, of the aspects and geometric parameters of the kinematic model development and validation by entering values and observing their behavior with regard to the location of the robot defined by its joint variables or location coordinates of its end and its derivatives, velocity and acceleration.*

*The process of determining the kinematic model began with the reading of several books on Robotics and previous works about Scrobot ER 4u and similar robots from the same manufacturer. The geometrical parameters are determined using the three-dimensional model that through Autodesk Inventor and with the tools that he possesses.*

*Finally, the use of programs such as Matlab gave way to the respective programming to have available a resource that allowed the calculation of the position, velocity and acceleration of the final end of the robot generally by entering variables the joint variable.*

*The development of this project is the basis for the continuation of a line of research aimed at developing control models.*

### **Keywords:**

*Kinematic, Control Models, Manufacturing, Kinematic Modeling.*

# ÍNDICE GENERAL

	Pág.
AGRADECIMIENTOS	I
DECLARACION EXPRESA	II
RESUMEN	III
ABSTRACT	IV
ÍNDICE GENERAL	V
ABREVIATURAS	VI
SIMBOLOGÍA	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
INDICE DE TABLAS	IX
INDICE DE CONTENIDO	X

## ABREVIATURAS

ISO	Organización Internacional para la Estandarización
JIRA	Asociación de Robótica Industrial de Japón
D-H	Parámetros Denavit-Hartenberg
GDL	Grados de Libertad
ESPOL	Escuela Superior Politécnica del Litoral
I	Matriz Identidad
PUMA	Assembly, or Programmable Universal Manipulation Arm
inv	Comando Matlab para calcular la inversa de una Matriz
jacobian	Comando en Matlab para obtener la matriz jacobiana
diff	Comando para ejecutar la derivación en Matlab

## SIMBOLOGIA

$l_i$	Longitud de Eslabón
$q_i$	Coordenada de Nodo
$\dot{q}_i$	Velocidades de Nodo
T	Matriz de Transformación Homogénea
n	Número de Grados de Libertad o de Articulaciones
${}^{i-1}A_i$	Matriz de Transformación del i-ésimo eslabón
$R_{3 \times 3}$	Matriz de Rotación de 3x3
$p_{3 \times 1}$	Vector de Traslación de 3x1
$f_{1 \times 3}$	Vector de Transformación de Perspectiva
$w_{1 \times 1}$	Vector de Escalado Global
$\theta_1$	Ángulo de la Cintura (°)
$\theta_2$	Ángulo del Hombro (°)
$\theta_3$	Ángulo del Codo (°)
$\theta_4$	Ángulo de la Muñeca (°)
$\theta_5$	Ángulo de la Pinza (°)
$Z_{i-1}$	Eje Z del i-ésimo eslabón
$\alpha_i$	Rotación alrededor del eje $X_i$
$\theta_i$	Rotación alrededor del eje $Z_i$
$d_i$	Distancia de Traslación a través del eje $Z_i$
$a_i$	Distancia de Traslación a través del eje $X_i$
$X_i$	Eje X del i-ésimo eslabón
$J_v$	Matriz Jacobiana de Velocidad Lineal
$J_\omega$	Matriz Jacobiana de Velocidad Angular
J	Matriz Jacobiana
V	Velocidades Lineales
$\alpha$	Ángulo auxiliar (°)
$\beta$	Ángulo auxiliar (°)
$\gamma$	Ángulo auxiliar (°)
$n_x, n_y, n_z$	Orientación del eje X
$o_x, o_y, o_z$	Orientación del eje Y
$r_x, r_y, r_z$	Orientación del eje Z
$x_i, y_i, z_i$	Ejes cartesianos del sistema i
$P_x, P_y, P_z$	Posición del Extremo Final del Robot
$C\theta_i$	Coseno del ángulo $\theta_i$
$S\theta_i$	Seno del ángulo $\theta_i$
Q	Matriz de Rotación
$\Omega$	Matriz Antisimétrica de dimensión 3



## INDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Elementos de Subsistema de un Robot .....	4
Figura 2-1. Brazo Robótico y sus partes .....	4
Figura 3-1 Relación de la Cinemática entre las coordenadas articulares de posición y orientación del extremo del robot. ....	5
Figura 4-1 Robot planar de dos grados de libertad .....	7
Figura 5-1 Parámetros D-H para un eslabón giratorio.....	9
Figura 6-1 Robot articular.....	11
Figura 7-1 Configuración codo arriba elementos 2 y 3 de la figura contenidos en un plano.....	12
Figura 8-1 Configuración codo abajo elementos 2 y 3 de la figura contenidos en un plano.....	13
Figura 9-2 Relación de la matriz jacobiana entre las velocidades de las articulaciones y la velocidad del extremo del robot.....	14
Figura 10-2 Diagrama de Ishikawa para la Formulación del problema.....	19
Figura 11-2 Análisis del Problema mediante Caja Negra .....	19
Figura 12-2 Análisis del Problema mediante caja transparente.....	20
Figura 13-2 Analogía entre brazo humano y brazo robótico.....	20
Figura 14-2 Movimientos de articulaciones Scorbot ER 4u .....	21
Figura 15-2 Modelo tridimensional de Scorbot ER 4u realizado en Autocad.....	21
Figura 16-2 Parámetros Geométricos de la base y cuerpo .....	22
Figura 17-2 Parámetro Geométrico del Antebrazo .....	22
Figura 18-2 Parámetro Geométrico del brazo .....	22
Figura 19-2 Parámetros Geométricos de la Pinza .....	23
Figura 20-2 Punto de origen para el análisis cinemático directo .....	23
Figura 21-2 Diagrama esquemático Scorbot ER 4u .....	24
Figura 22-2 Punto de referencia para Análisis Cinemático Inverso .....	26
Figura 23-2 Esquema alámbrico para el Análisis Cinemático Inverso .....	26
Figura 24-2 Esquema tridimensional para la Cinemática Inversa.....	27
Figura 25-2 Proyección en un plano para la configuración codo arriba a) y codo abajo b) .....	28
Figura 26-3 Esquema de Resolución del Algoritmo para el cálculo de la Matriz de Transformación homogénea.....	33
Figura 27-3 Esquema de Programación de Matriz Jacobiana.....	34

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1 Estados A y B del Problema .....	18
Tabla 2 Parámetros Denavit-Hartenberg Scorbot ER 4u.....	24

# INDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1.....	1
1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 Descripción del problema .....	2
1.2 Objetivos .....	2
1.2.1 Objetivo General .....	2
1.2.2 Objetivos Específicos .....	2
1.3 Marco Teórico .....	3
1.3.1 Generalidades de los Brazos Robóticos de tipo Industrial .....	3
1.3.2 Robots Seriales .....	3
1.3.3 Subsistemas de Robots .....	3
1.3.4 Cinemática del Robot.....	5
1.3.4.1 Cinemática Directa .....	6
1.3.5 Cinemática Inversa .....	9
1.4 Matriz Jacobiana .....	13
CAPÍTULO 2.....	18
2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DIRECTO .....	18
2.1 Identificación del Problema .....	18
2.2 Formulación del Problema.....	19
2.3 Análisis del Problema – Caja Negra .....	19
2.4 Análisis del Problema – Caja Transparente .....	20
2.5 Características del Brazo Robótico Scorbot ER 4U .....	20
2.5.1 Geometría de los Eslabones .....	21
2.6 Análisis Cinemático Directo.....	23
2.7 Análisis Cinemático Inverso .....	26
2.8 Matriz Jacobiana .....	28
CAPÍTULO 3.....	32
3. RESULTADOS.....	32
3.1 Estructura del Programa.....	32
3.2 Simulación.....	33
3.3 Matriz Jacobiana .....	35
CAPÍTULO 4.....	36
4.1 DISCUSIONES Y CONCLUSIONES.....	36

4.2	Conclusiones.....	36
4.3	Recomendaciones.....	36
	BIBLIOGRAFÍA.....	37
	APÉNDICE .....	38
	PROGRAMACIÓN EN MATLAB .....	38
3.1	Cinemática Directa .....	38
4.4	Función para calcular Matriz de Transformación Homogénea .....	39
4.5	Matriz Jacobiana .....	39

# CAPÍTULO 1

## 1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia del hombre, éste se ha visto siempre en la necesidad de crear herramientas y artefactos que le permitan realizar ciertas actividades, es así que con el pasar del tiempo poco a poco se fueron optimizando las labores y trabajos que se le presentaban, con diferentes metodologías, procesos y tecnologías hasta nuestros días.

El surgimiento de la robótica como un recurso tecnológico en el desarrollo de herramientas y la mejora de procesos trajo consigo un gran avance en los procesos industriales y de automatización en todo el mundo, cada vez con un mayor grado de desarrollo que exige tareas y soluciones más complejas y precisas, teniendo ventaja sobre las limitaciones físicas que se presentaban debido a la exigencia durante las labores de un trabajador humano, ya sea por la dificultad, fatiga o riesgo.

Un brazo robótico es un tipo de brazo mecánico, también llamado manipulador, que se asemeja a un brazo humano, puede cumplir varios tipos de tareas de acuerdo a la programación a la que esté sometido. Posee actuadores, eslabones y articulaciones las cuales le permiten realizar movimientos de tipo rotacional y traslacional.

El presente proyecto tiene como propósito realizar un análisis de la cinemática de un brazo robótico, el cual estudia el movimiento del mismo respecto a un sistema de referencia, resultado del ingreso de valores en sus coordenadas articulares, de posición, velocidad y aceleración y su respuesta a éstas en el extremo final del robot, desarrollando las ecuaciones de movimiento del brazo robótico.

Un modelo cinemático se puede usar como base para la obtención del modelo dinámico el mismo que sirve para desarrollar estrategias apropiadas de control, por ejemplo acelerar un manipulador desde una posición estática, deslizarlo a una velocidad constante y luego desacelerarlo para detenerlo y llegar a la posición requerida.

Hoy en día debido a la incursión de la robótica en varios campos de acción como la medicina, la ingeniería, un brazo robótico puede estar en varias condiciones de operación, por lo que un modelo cinemático es muy útil para la simulación por computadora del sistema robótico y la su comportamiento en el cambio de diversas posiciones de su extremo final.

Para el presente proyecto se eligió el brazo robótico Scorbot ER 4u de uso didáctico, a más de desarrollar su modelo cinemático, con una simulación en Matlab. Hoy en día debido a la incursión de la robótica en varios campos de acción como la medicina, la ingeniería, un brazo robótico puede estar en varias condiciones de operación, por lo que un modelo cinemático es muy útil para la simulación por computadora del sistema robótico y la su comportamiento en el cambio de diversas posiciones de su extremo final.

Para el presente proyecto se eligió el brazo robótico Scrobot ER 4u de uso didáctico. A más de desarrollar su modelo cinemático se realizó una simulación en Matlab.

## **1.1 Descripción del problema**

Actualmente la Robótica en el sector industrial representa una herramienta que permite consigo la mejora en el desarrollo de procesos de manufactura, ofreciendo una serie de tareas que su ejecución sería difícil con el tiempo frente al trabajo realizado por un humano.

La ESPOL posee, desde el año 2009, un brazo robótico Scrobot ER 4u, orientado a la enseñanza. Este brazo permite desarrollar algunas soluciones de manufactura automatizada, pero también ofrece oportunidades de investigación en el desarrollo de modelos de control. Para el avance en la investigación es necesario un modelo cinemático del robot.

Para la obtención del modelo cinemático del brazo robótico es necesario el conocimiento detallado de los parámetros geométricos del robot, posteriormente el análisis de velocidad y aceleración en sus articulaciones ya que por su geometría y al estar ya ensamblado requerirá de una ardua investigación para llegar a dar con aquellos valores, los datos que no se encuentren se tendrá que realizar una estimación en base a experimentos anteriores con robots similares.

Hay que recalcar que no existe la suficiente documentación de todos los parámetros y datos necesarios para el desarrollo del proyecto, lo cual representa un problema, frente a esto es necesaria la investigación y el aprovechamiento de los recursos que se tienen a disposición.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

- Desarrollar un modelo matemático que describa el movimiento de un brazo robótico Scrobot ER 4u (conocido como Modelo Cinemático).

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

- Determinar los aspectos y parámetros necesarios para el desarrollo del modelo cinemático.
- Obtener el Modelo Cinemático del Brazo Robótico.

## **1.3 Marco Teórico**

### **1.3.1 Generalidades de los Brazos Robóticos de tipo Industrial**

Un robot se define, de manera formal en la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), como un operador multifuncional reprogramable, apto de mover la materia prima fragmentos instrumentos o mecanismos especiales a través de movimientos variables programados para el desempeño de diversos trabajos.

En cláusulas frecuentes, los Robots son clasificados como industriales, no industriales o para usos específicos. Un típico robot industrial podría ser un brazo robótico con una tarea de la soldadura de una tubería con costura, a éste tipo de robots industriales son también llamados seriales, debido a que las partes o eslabones que lo conforman están colocadas una a continuación de otra unidas por una articulación.

Tanto como la medicina, biomecánica, e ingeniería hoy en día utilizan robots para la optimización de los procesos tomando en cuenta las ventajas que existen al momento de utilizar un robot.

### **1.3.2 Robots Seriales**

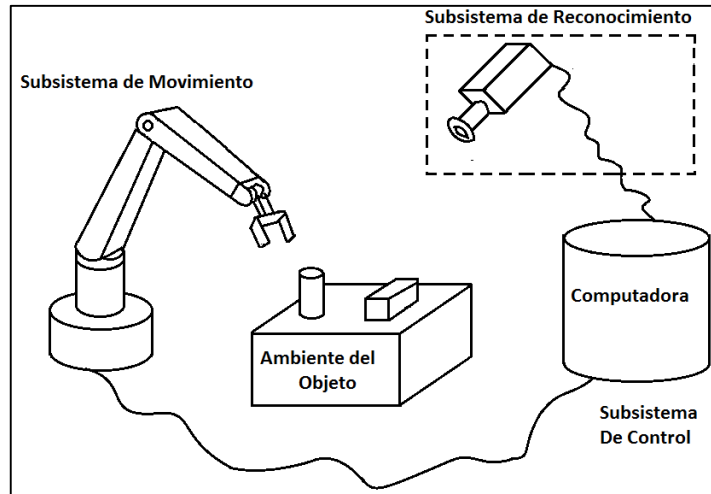
La mayoría de robots industriales, son de tipo serial, posee una forma antropomórfica, es decir que la configuración de sus eslabones se asemeja a la de un brazo humano, con el objetivo de realizar tareas similares.

Según la Asociación de Robótica Industrial de Japón (JIRA, por sus siglas en inglés), un robot serial, también llamado manipulador de define como: "Todo mecanismo permitiendo efectuar, enteramente o por parte, una tarea generalmente realizada por un hombre. "

### **1.3.3 Subsistemas de Robots**

Subsistemas de robots son las partes en que se divide un Sistema Robótico

- Subsistema de movimiento
- Subsistema de reconocimiento
- Subsistema de control



**Figura 1-1. Elementos de Subsistema de un Robot**

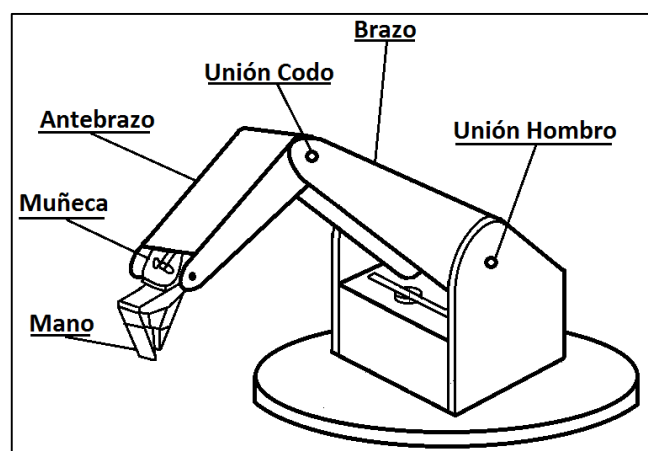
### 1.3.3.1 Subsistema de Movimiento

Al mencionar esto, se refiere a la estructura física del robot, realizando un movimiento similar al de los brazos humano.

El Subsistema de movimiento se divide en las siguientes partes:

### 1.3.3.2 Manipulador

Se trata de la estructura física, la parte que se está moviendo. Esta se compone de los eslabones (cuerpos) y articulaciones (pares cinemáticos), normalmente los eslabones son conectados en serie, es decir uno a continuación de otro; las articulaciones son por lo general de tipo rotatorio (revoluta) y traslacional (prismática).



**Figura 2-1. Brazo Robótico y sus partes**



### 1.3.3.3 Efector Final

Equivalente a una mano humana, se ubica en el extremo del manipulador; puede ser una pinza mecánica o un electrodo de soldadura especializado.

### 1.3.3.4 Actuador

Es la parte encargada de proporcionar el movimiento al manipulador y al efector final. Pueden ser de tipo neumático, hidráulico o eléctrico, según sea el diseño del robot. Por ejemplo un motor eléctrico unido a un tren de engranajes, es encargado de dotar movimiento al manipulador, este sistema en conjunto es llamado actuador.

## 1.3.4 Cinemática del Robot

La cinemática del robot tiene como eje el cambio de posición del efector final, esto conlleva a que para que un robot ejecute una tarea, se deberá establecer una relación entre la posición y orientación del efector final, es decir la posición respecto a su base.

Existen dos métodos para determinar la posición y orientación de robot y esto depende del tipo de dato conocido, estas formas se conocen como Cinemática Directa y Cinemática Inversa.

La cinemática del Robot Scorbobot ER 4u se enfoca en el estudio del movimiento del brazo robótico respecto a su sistema de referencia.

La importancia del Modelo Cinemático es la información que éste brinda, una descripción analítica del movimiento en las tres dimensiones en función del tiempo y como se ha dicho anteriormente la relación existente entre la posición y la orientación del efector final (pinza) al definir las coordenadas de las articulaciones.

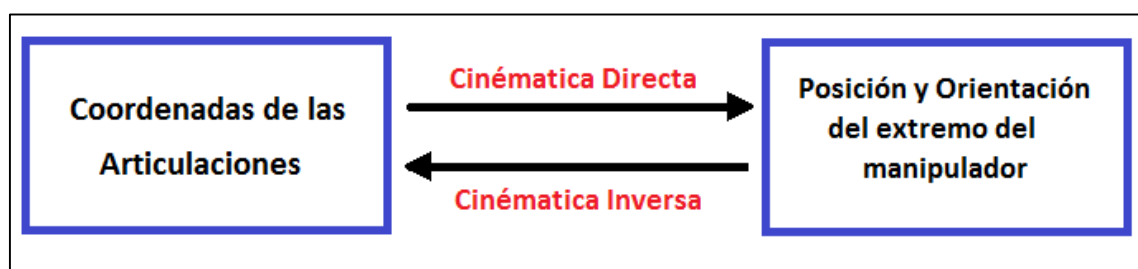


Figura 3.1 Relación de la Cinemática entre las coordenadas articulares de posición y orientación del extremo del robot.

Existen dos procedimientos para resolver la cinemática del brazo robótico, en la Figura 3.1 se establecen la Cinemática Directa y la Cinemática Inversa.

La cinemática directa establece el cálculo de la posición y orientación de cualquier punto del robot, en función de las variables articulares.

La segunda metodología, la Cinemática inversa, es contraria a la directa, ya que debe resolver la configuración de las articulaciones del robot, para una posición y orientación establecida del efector final (Gonzalez-Echeverri.A, 2014).

Para la realización de cada metodología se utiliza el método sistemático de Denavit – Hartenberg, este método consiste en la obtención de una matriz homogénea que describe la relación espacial entre cada parte adyacente constitutiva del robot (base, cuerpo y eslabones), de esta manera la cinemática directa se simplifica a la obtención de la matriz homogénea de cuatro dimensiones que permita relacionar la posición en el espacio del extremo del robot respecto a la referencia ubicada en su base.

No solamente la cinemática consiste en hallar la relación existente entre la posición y orientación del robot, sino también en base a esto encontrar las relaciones existentes entre velocidades y aceleraciones que experimentan las articulaciones al realizar movimiento con las del efector final. La relación se obtiene mediante el modelo diferencial denominado matriz Jacobiana para la velocidad y la aceleración.

### 1.3.4.1 Cinemática Directa

Consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia (Acosta-Sanchez.L & Sigut-Saavedra.M, 2005), al conocimiento de cada uno de los valores en las articulaciones y podemos suscribir cada uno de los parámetros exactos del robot.

El objetivo principal es encontrar una matriz de Transformación Homogénea T que relacione la posición y orientación del extremo del robot con respecto a un sistema de referencia fijo situado en su base (Guanín-Tenelema.E, 2015). A manera de modelo se puede favorecer las coordenadas cartesianas y sus respectivos ángulos para poder representar las posiciones y orientaciones de un robot de cinco grados de libertad.

$$\begin{aligned}
 x &= f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\
 y &= f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\
 z &= f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\
 \alpha &= f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\
 \beta &= f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\
 \gamma &= f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)
 \end{aligned}$$

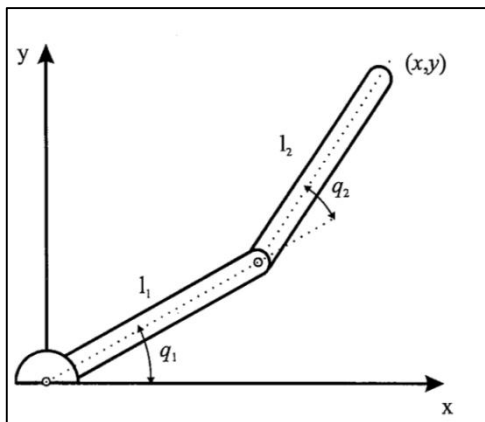
Según Barrietos, 95, la obtención de estas relaciones no es en general complicada, siendo en ciertos casos (robots de pocos grados de libertad) fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas. Por ejemplo para un robot de dos grados de libertad (Figura 4-1), es fácil comprobar que:

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2) \quad (1.1)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2) \quad (2.1)$$

Cuando se trata de robots de mayor grado de libertad se puede plantear un método sistemático basado en la utilización de matrices de transformación homogénea.

Cuando se trata de robots de mayor grado de libertad se puede plantear un método sistemático basado en la utilización de matrices de transformación homogénea.



**Figura 4-1 Robot planar de dos grados de libertad** (Fuente: BARRIENTOS, Antonio y colaboradores. Fundamentos de Robótica. Universidad Politécnica de Madrid. Mc Graw Hill, 1997)

De manera general un robot de  $n$  grados de libertad, debe estar formado por  $n$  eslabones, unidos cada uno por  $n$  articulaciones, de modo que cada par eslabón-articulación conforma un grado de libertad. Cada eslabón debe estar sujeto a la colocación de un sistema de referencia local, con la ayuda de las matrices de transformación homogénea es posible encontrar la relación existente entre los distintos eslabones que componen el robot.

### 1.3.4.2 Matriz de Transformación Homogénea

Se define como matriz de transformación homogénea  $T$  a una matriz de dimensión  $4 \times 4$  que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La Matriz de transformación homogénea está estructurada por cuatro submatrices, cada una de distinto tamaño y son las siguientes:

- $R_{3 \times 3}$ : Matriz de Rotación
- $p_{3 \times 1}$ : Vector de Traslación
- $f_{1 \times 3}$ : Transformación de Perspectiva
- $w_{1 \times 1}$ : Escalado Global

En este caso para el análisis del brazo robótico solamente son necesarias la Matriz de rotación  $R_{3 \times 3}$  y el Vector de traslación  $p_{3 \times 1}$ , la transformación de Perspectiva  $f_{1 \times 3}$  será un vector de ceros y el Escalado global  $w_{1 \times 1}$  la unidad, por lo que queda de la siguiente manera.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La matriz de transformación homogénea comúnmente se representa la orientación y posición relativa entre dos eslabones consecutivos se suele denominar matriz  ${}^{i-1}A_i$ , por lo que  ${}^0A_1$  describe la posición y orientación del sistema de referencia local del primer eslabón con relación al sistema de referencia ubicado en la base.  ${}^1A_2$  Describe la posición y orientación del segundo eslabón con respecto al primero y así sucesivamente.

Del mismo modo, denominando  ${}^0A_k$  a las matrices resultantes del producto de las matrices  ${}^{i-1}A_i$  con  $i$  desde 1 hasta  $k$ , se puede representar de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el robot, lo que significa que  ${}^0A_2$  representa la posición y orientación del segundo eslabón respecto a al sistema de coordenadas de la base.

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 \quad (5.1)$$

Siguiendo la metodología se puede expresar también la localización del tercer eslabón.

$${}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \quad (6.1)$$

Es decir que, al expresar la localización del último eslabón respecto a la referencia de la base, para este ejemplo de seis eslabones de cinco grados de libertad se tiene:

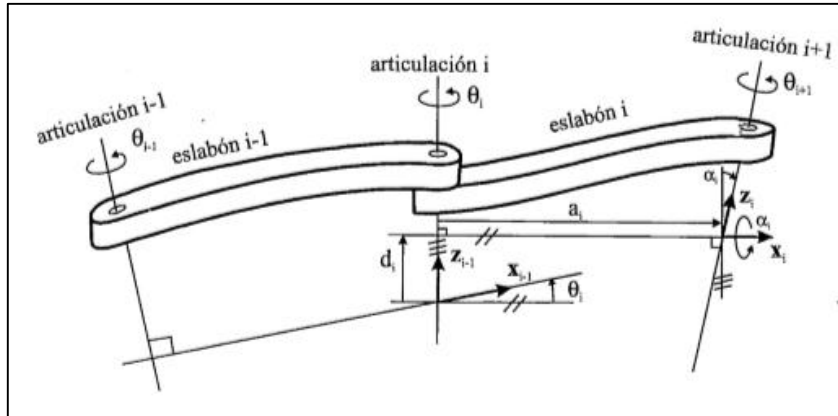
$$T = {}^0A_5 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^3A_4 {}^4A_5 \quad (7.1)$$

Aunque para describir la relación que existe entre dos elementos contiguos se puede hacer unos de cada sistema de referencia ligado a cada elemento, la forma habitual que suele ser utilizada en robótica es la representación de Denavit-Hartenberg (D-H). **(Gonzalez-Echeverri.A, 2014).**

Según las representaciones D-H, escogiendo los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón, es posible pasar de un eslabón a otro mediante 4 transformaciones básicas basadas en la geometría del robot.

Es decir que para relacionar el eslabón  $i$  con un eslabón  $i-1$  se realizaran las transformaciones siguientes, claro está definiendo previamente cada sistema de referencia de acuerdo a los requerimientos que la metodología D-H lo establezca.

1. Rotación alrededor del eje  $Z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$
2. Traslación a lo largo del eje  $Z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ ; vector  $d_i (0,0, d_i)$
3. Traslación a lo largo del eje  $X_i$  una distancia  $a_i$ ; vector  $a_i (a_i, 0,0)$
4. Rotación a lo largo del eje  $X_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .



**Figura 5-1 Parámetros D-H para un eslabón giratorio.** Fuente: BARRIENTOS, Antonio y colaboradores. Fundamentos de Robótica. Universidad Politécnica de Madrid. Mc Graw Hill, 1997

Ya que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones deben realizarse en el orden establecido, lo que conlleva:

$${}^{i-1}A_i = T(z, \theta_1) T(0,0, d_i) T(a_i, 0,0) T(x, \alpha_i) \quad (8.1)$$

Si se realiza el producto de las matrices da como resultado:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & S\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Donde  $\theta, a_i, d_i, \alpha_i$  son los parámetros D-H del eslabón i. Es así que a través de la identificación de los parámetros D-H es posible relacionar cada uno de los eslabones mediante las Matrices de Transformación.

### 1.3.5 Cinemática Inversa

Se encarga de resolver la configuración que deben tener las coordenadas articulares para una posición y orientación establecida en el efector final del robot.

El propósito de la cinemática inversa es encontrar los valores de las coordenadas de las articulaciones correspondientes a una orientación y posición del extremo final del brazo robótico; encontrar la solución a este problema se hace con el fin de transformar las especificaciones de movimiento asignadas al extremo final en el espacio operacional en los correspondientes movimientos de espacio de las articulaciones.

El análisis cinemático inverso a diferencia del directo es mucho más complejo ya que:

- Por lo general, las ecuaciones por resolver son no lineales en las coordenadas articulares es así que no siempre es posible encontrar una solución explícita.
- Pueden existir múltiples soluciones.
- Es posible que no haya soluciones admisibles debido a la arquitectura del manipulador.

Frente a este tipo de inconvenientes existe el planteamiento de resolver la cinemática inversa mediante el uso del álgebra o de la geometría, además es posible obtener una solución numérica por medio de algún tipo de algoritmo con un resultado aproximado.

### 1.3.5.1 Método Algebraico

El método algebraico se enfoca en la búsqueda de los ángulos de las articulaciones por medio de la transformación algebraica de las ecuaciones

Para el análisis cinemático inverso es necesario encontrar una solución cerrada, explícitamente hablando se tiene que una solución cerrada posee la siguiente forma:

$$q_{k,=} f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \quad k = 1 \dots n \text{ (GDL)}$$

Siendo  $q$  las coordenadas de cada articulación, en función de su orientación y posición.

Teniendo previamente el modelo cinemático directo es posible obtener el modelo cinemático inverso, se deben tener las relaciones que expresan la posición y orientación del extremo final del robot en función de las coordenadas articulares. **(Gonzalez-Echeverri.A, 2014)**

Se debe partir mediante la relación entre las matrices transformación entre cada sistema de referencia local y su producto, es decir:

$$T = {}^0A_5 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 \quad (10.1)$$

Al tener la matriz global de transformación homogénea  $T$  en función de las coordenadas articulares  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  se busca expresarlas en función de  $n, o, r, p$ .

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & r_x & P_x \\ n_y & o_y & r_y & P_y \\ n_z & o_z & r_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Utilizando la definición del producto de matrices de transformación homogéneas se puede expresar lo siguiente:

$$({}^0A_1)^{-1} {}^0T_5 = {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 \quad (12.1)$$

$$({}^1A_2)^{-1} ({}^0A_1)^{-1} {}^0T_5 = {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 \quad (13.1)$$

$$({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}{}^0T_5 = {}^3A_4 {}^4A_5 \quad (14.1)$$

$$({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}{}^0T_5 = {}^4A_5 \quad (15.1)$$

$$({}^4A_5)^{-1}({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}{}^0T_5 = I \quad (16.1)$$

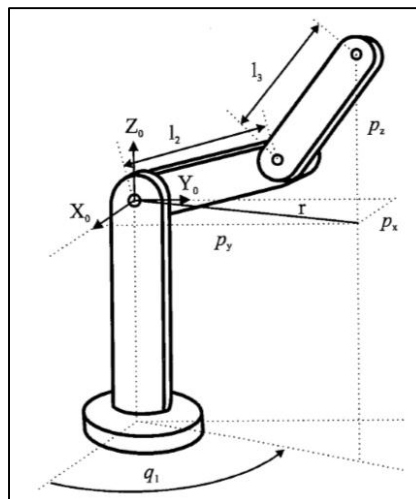
Con el objetivo de realizar un sistema de ecuaciones y despejar aquellas que dependen de una sola variable.

Sin embargo este método resultaría muy complicado y laborioso por lo cual no es recomendado para el análisis de robots de más de tres eslabones.

### 1.3.5.2 Método Geométrico

Este procedimiento se basa en encontrar el suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrían las coordenadas del extremo del robot, las coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.

Si se trataría de un robot de 3 GDL, la figura muestra la configuración del robot.



**Figura 6-1 Robot articular** Fuente: BARRIENTOS, Antonio y colaboradores. Fundamentos de Robótica. Universidad Politécnica de Madrid. Mc Graw Hill, 1997

El dato de partida son las coordenadas  $(p_x; p_y; p_z)$  referidas a  $\{S_0\}$  en las que se quiere posicionar su extremo.

Como se observa este robot posee una estructura planar, quedando este ángulo definido por el ángulo de la primera variable articular  $q_1$ .

El valor de  $q_1$  se obtiene como:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \quad (17.1)$$

Considerando ahora únicamente los eslabones 2 y 3 que están situados en un plano (Figura 6-1) y utilizando el teorema del coseno se tendrá:

$$r^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (18.1)$$

$$r^2 + p_z^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos q_3 \quad (19.1)$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \quad (20.1)$$

Esta expresión permite obtener  $q_3$  en función del vector de posición del extremo  $\mathbf{p}$ . No obstante y por motivo de ventajas computacionales, es más conveniente utilizar la expresión de la arcotangente en lugar del coseno.

Puesto que:

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3} \quad (21.1)$$

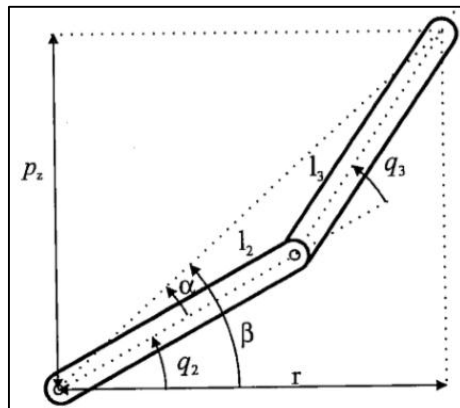
Se tendrá que:

$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right) \quad (22.1)$$

Con:

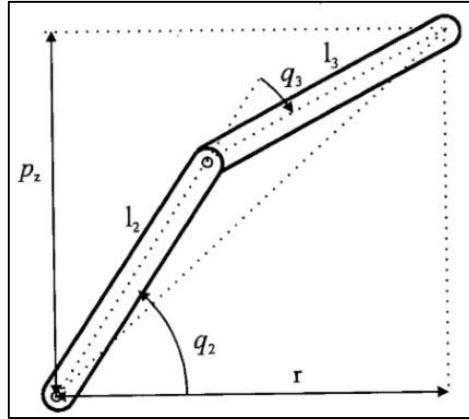
$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \quad (23.1)$$

Ya que existen dos soluciones para  $q_3$  dependiendo del signo que se elija (positivo o negativo) en la raíz, estas llevan por nombre configuraciones de codo arriba y codo abajo del robot.



**Figura 7-1 Configuración codo arriba elementos 2 y 3 de la figura contenidos en un plano.** Fuente: BARRIENTOS, Antonio y colaboradores. Fundamentos de Robótica. Universidad Politécnica de Madrid. Mc Graw Hill, 1997





**Figura 8-1 Configuración codo abajo elementos 2 y 3 de la figura contenidos en un plano**  
Fuente: BARRIENTOS, Antonio y colaboradores. Fundamentos de Robótica. Universidad Politécnica de Madrid. Mc Graw Hill, 1997

El cálculo de  $q_2$  se lo hace mediante la diferencia entre  $\beta$  y  $\alpha$ :

$$q_2 = \beta - \alpha \quad (24.1)$$

Siendo:

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2}}\right) \quad (25.1)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \text{sen} q_3}{l_2^2 + l_3^2 \cos q_3}\right) \quad (26.1)$$

Luego finalmente:

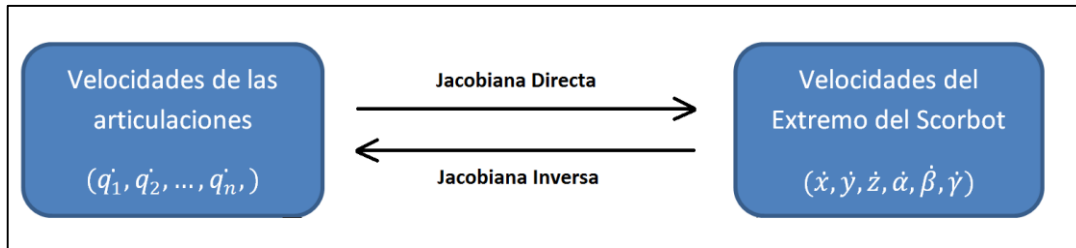
$$q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \text{sen} q_3}{l_2^2 + l_3^2 \cos q_3}\right) \quad (27.1)$$

Como respuesta final se obtiene la posibilidad de dos valores de solución dependiendo del signo que se escoja  $q_2$  correspondiente a las configuraciones codo arriba y abajo.

#### 1.4 Matriz Jacobiana

El modelo Cinemático, a más de encontrar la relación entre las coordenadas articulares y la posición y orientación del extremo final del robot, permite conocer sus respectivas velocidades.

De esta manera el sistema de control establece qué velocidad debe existir en cada articulación para lograr que el extremo del robot desarrolle una trayectoria en el cambio de posición, a una respectiva velocidad.



**Figura 9-1 Relación de la matriz jacobiana entre las velocidades de las articulaciones y la velocidad del extremo del robot**

Gracias al estudio de la matriz Jacobiana es posible conocer las velocidades del extremo final del robot Scrobot, ER 4u a partir de las velocidades de cada articulación.

De manera contraria la matriz Jacobiana inversa permite conocer las velocidades en las articulaciones debido a valores de velocidades conocidas en el extremo del robot. **(Gonzalez-Echeverri, A, 2014)**

La matriz Jacobiana permite conocer las velocidades del extremo del Scrobot ER 4u a partir de las velocidades de cada articulación. En cambio, la matriz Jacobiana Inversa permitirá conocer las velocidades de cada articulación necesarias para poder obtener unas velocidades determinadas en el extremo del robot.

Para el estudio se dispone de la matriz Jacobiana Directa.

La dimensión de la Matriz Jacobiana viene dada por la relación  $6 \times n$  siendo  $n$  el número de eslabones.

La Matriz Jacobiana se define como:

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (28.1)$$

Siendo  $J_\omega$  la Matriz Jacobiana de velocidad angular y  $J_v$  la Matriz Jacobiana para velocidades lineales.

La obtención de la Matriz Jacobiana para velocidades lineales se parte desde las ecuaciones del modelo cinemático teniendo  $T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^3A_4 {}^4A_5$  donde se concluye que el extremo final se encuentra expresado en función de sus coordenadas articulares.

$$P_x = T(1, n) = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (29.1)$$

$$P_y = T(2, n) = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (30.1)$$

$$P_z = T(3, n) = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (31.1)$$

Se debe derivar cada coordenada de posición ( $P_x$ ;  $P_y$ ;  $P_z$ ) y se lo multiplica por cada una de las coordenadas de nodo ( $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ ).

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Es así que de esta manera se obtiene la Matriz Jacobiana para velocidades lineales.

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = J_v \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{Siendo } J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_z}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (32.1)$$

Para el cálculo de la matriz Jacobiana de velocidades angulares es necesario obtener la submatriz de rotación de la matriz de transformación homogénea.

$$Q = \begin{bmatrix} n_x & o_x & r_x \\ n_y & o_y & r_y \\ n_z & o_z & r_z \end{bmatrix} \quad (33.1)$$

Ya que Q es una matriz ortogonal tiene la siguiente propiedad.

$$QQ^T = Q^TQ = 1 \quad (34.1)$$

Siendo 1 la matriz identidad de 3x3, al derivar la ecuación anterior respecto al tiempo da como resultado:

$$\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = 0 \quad (35.1)$$

Se puede realizar la siguiente simplificación.

$$\Omega = \dot{Q}Q^T \quad (36.1)$$

Donde  $\Omega$  es la matriz antisimétrica de 3x3 se puede reescribir que:

$$\Omega + \Omega^T = 0 \quad (37.1)$$

Realizando un reemplazo de las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\Omega Q = \dot{Q} \quad (38.1)$$

Lo que demuestra que la derivada de  $\dot{Q}$  está en función de  $Q$ , al despejar la matriz antisimétrica se llega a la siguiente ecuación:

$$\Omega = \dot{Q}Q^{-1} \quad (39.1)$$

La teoría establece que las coordenadas (3,2) (1,3) (2,1) equivalen al vector  $\omega$ .

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (40.1)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (41.1)$$

Después de obtener el vector de posiciones angulares es necesario derivarlo para cada una de las coordenadas articulares ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ).

$$\dot{\omega}_x = \sum_1^n \frac{\partial f_{\omega_x}}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \dot{\omega}_y = \sum_1^n \frac{\partial f_{\omega_y}}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \dot{\omega}_z = \sum_1^n \frac{\partial f_{\omega_z}}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (42.1)$$

Es así que se obtiene la matriz jacobiana para velocidades angulares.

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = J_{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} \quad \text{Siendo } J_{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\omega_x}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_{\omega_x}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_{\omega_y}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_{\omega_y}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_{\omega_z}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_{\omega_z}}{\partial q_6} \end{bmatrix} \quad (43.1)$$

La matriz Jacobiana completa se tiene de la siguiente manera.  $J = [J_v; J_{\omega}]$  Lo que da resultado la expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = J_v \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_{\omega} \end{bmatrix} \dot{q} \quad \text{Siendo } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_{\omega_x}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\omega_x}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\omega_x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_{\omega_y}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\omega_y}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\omega_y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_{\omega_z}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\omega_z}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\omega_z}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (44.1)$$

Finalmente, es necesario encontrar la matriz Jacobiana que permita relacionar aceleraciones articulares y aceleraciones del extremo del robot.

Se deriva parcialmente la ecuación:

$$[V] = [J_v] \dot{q} \quad (45.1)$$

Lo que da como resultado:

$$[\dot{V}] = J_v \dot{q} + J_v \ddot{q} \quad (46.1)$$

Se concluye que la expresión  $[\dot{V}]$  representa las aceleraciones

$$[A] = J_v \dot{q} + J_v \ddot{q} \quad (47.1)$$

Esto quiere decir que  $\ddot{q}$  representa las aceleraciones de las articulaciones. La derivada de la Jacobiana  $J_v$ , se obtiene evaluando las velocidades de las articulaciones y derivarla parcialmente respecto a las coordenadas del nodo.

$$J_v = f(q) \quad (48.1)$$

$$\dot{J}_v = \frac{\partial(J_v \cdot \dot{q})}{\partial q} \quad (49.1)$$

$$J_a = \frac{\partial(J_v \cdot \dot{q})}{\partial q}$$

Es así como se obtienen las aceleraciones lineales.

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = J_v \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} + J_v \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix} \quad (50.1)$$

# CAPÍTULO 2

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DIRECTO

El Modelo Cinemático sirve para definir la posición y orientación del efector final del brazo robótico Scorbot ER 4u, esto se realiza con el fin de que pueda ejecutar una tarea específica.

Luego de haber definido la posición es necesario resolver los problemas de velocidad y aceleración necesarios para controlar el movimiento del efector final en el proceso de su posicionamiento.

Como la configuración del efector final está en función de sus coordenadas articulares (variables cartesianas) de posición y de orientación.

Por medio del análisis de posición se encuentra la relación entre las coordenadas articulares, lo que quiere decir que se relaciona la posición del efector final y su orientación con los ángulos de las articulaciones.

### 2.1 Identificación del Problema

Se procedió a ubicar los estados A y B del problema es decir previo y póstumo a su solución.

En el Estado A se muestra la ausencia del Modelo Cinemático del Brazo robótico, además de tratarse de un Robot de tipo educativo y un Análisis completo del Robot.

El estado B muestra la presencia del Modelo dinámico, lo que conlleva un avance en la Investigación y un Análisis completo de los cinco grados de libertad del brazo robótico.

**Tabla 1 Estados A y B del Problema**

<b>ESTADO A</b>	<b>ESTADO B</b>
Brazo Robótico sin modelo Cinemático	Brazo Robótico con Modelo Cinemático
Robot de tipo Educativo, didáctico	Avance en la Investigación
Análisis Completo	Análisis Completo

## 2.2 Formulación del Problema

Mediante el Diagrama de Ishikawa se Observan las causas que conducen al problema de la Ausencia de un Modelo dinámico del Brazo Robótico.

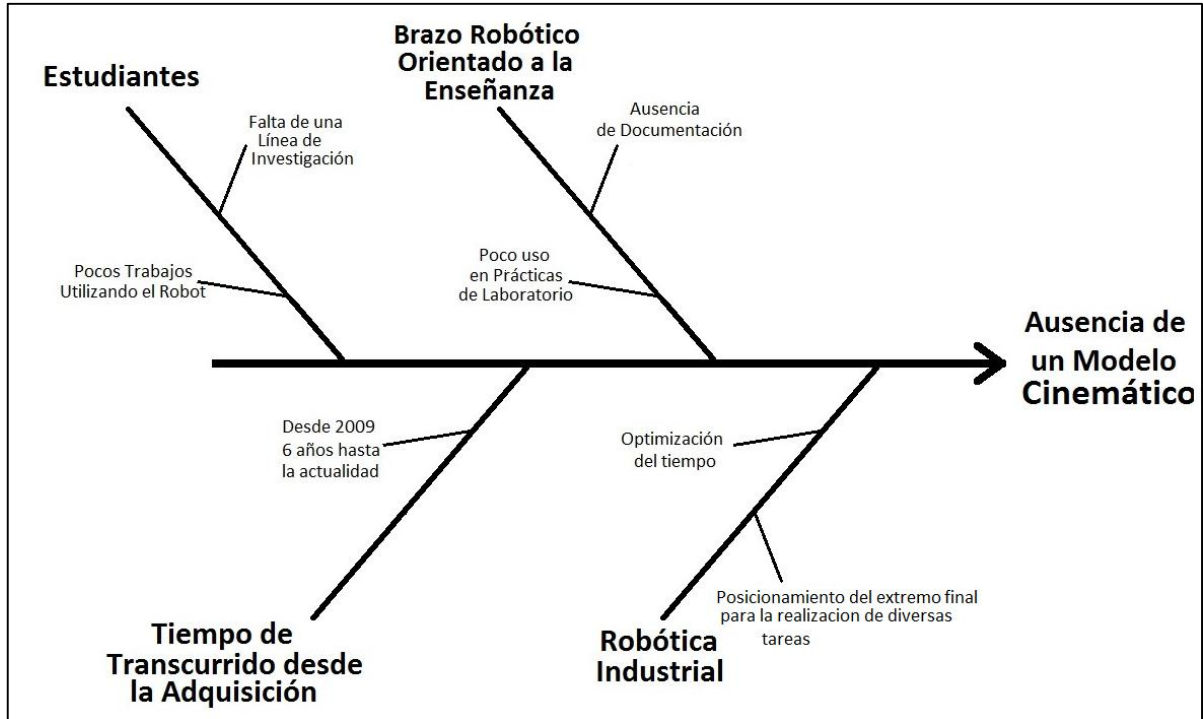


Figura 10-2 Diagrama de Ishikawa para la Formulación del problema

## 2.3 Análisis del Problema – Caja Negra

El análisis del Problema por medio de la caja negra nos permite visualizar las variables de entrada y el fin que de espera obtener con el desarrollo y elaboración del modelo Dinámico del Brazo Robótico Scorbot ER 4U.

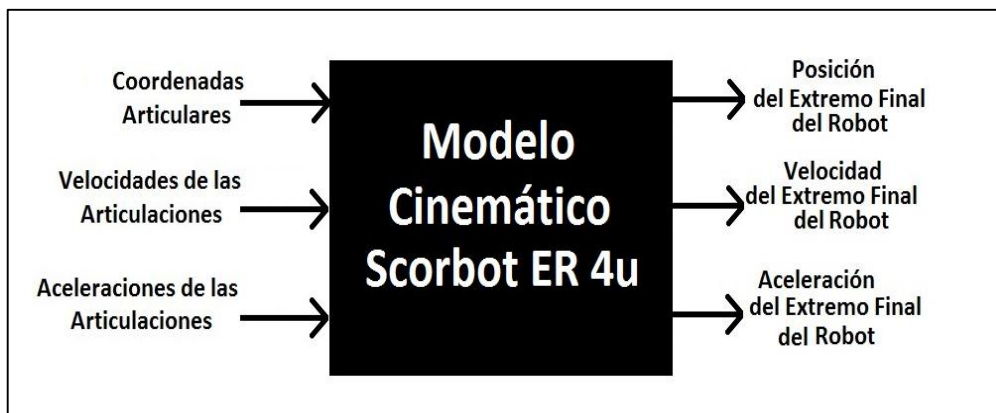


Figura 11-2 Análisis del Problema mediante Caja Negra

## 2.4 Análisis del Problema – Caja Transparente

Este análisis nos permite visualizar las operaciones y procesos que se realizaron para la obtención del Modelo Cinemático entre las variables de entrada y de salida.

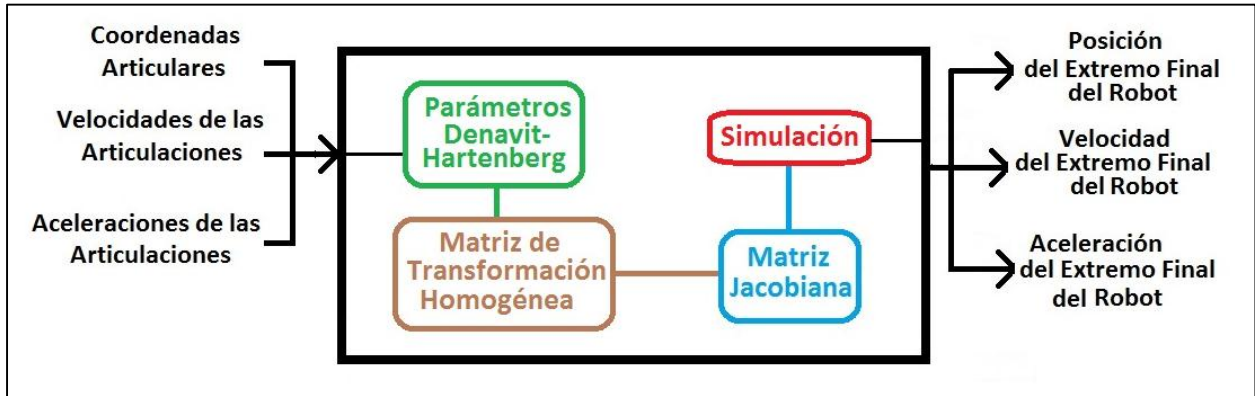


Figura 12-2 Análisis del Problema mediante caja transparente

## 2.5 Características del Brazo Robótico Scorbot ER 4U

El brazo Robótico Scorbot ER 4u es un robot versátil y seguro para el ejercicio de situaciones en la robótica industrial para estudiantes desarrollado por la Compañía Intellitek; permite al estudiante realizar ejercicios diversos, adquiriendo la experiencia en el uso de este tipo de manipuladores.

Su diseño se fundamenta en el concepto de cadena cinemática abierta, el cual especifica que los eslabones estarán conectados uno a continuación del otro, teniendo fijo el primero y el último libre, en para el caso del Scorbot ER 4U, la base y la pinza respectivamente.

Es un robot de tipo Industrial, de similar estructura a la de un brazo humano, por lo que este robot puede clasificarse como un robot para el manejo de materiales.

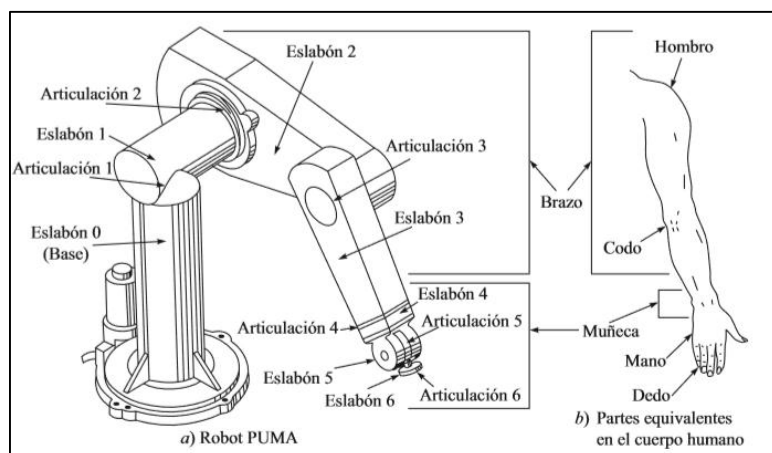


Figura 13-2 Analogía entre brazo humano y brazo robótico Fuente: KUBAR SAHA, Sumir. Introducción a la Robótica. Indian Institute of Technology. Mc Graw Hill, 2008



Las capacidades de este brazo robótico se deben a la movilidad que poseen cada uno de sus eslabones y articulaciones.

La rotación de cada articulación está diseñada para actuar dentro de un rango de operación, es decir que su rotación y por ende su alcance están limitados.

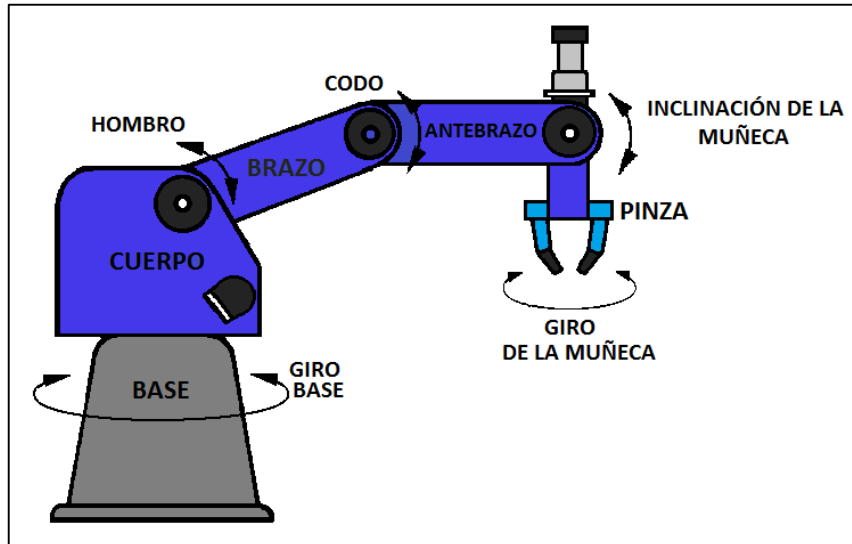


Figura 14-2 Movimientos de articulaciones Scorbot ER 4u

### 2.5.1 Geometría de los Eslabones

Cada eslabón del brazo robótico corresponde al acoplamiento de varias piezas, como bandas, piñones, ejes y aquellos elementos que conforman su estructura; para el análisis son necesarias las medidas existentes entre cada articulación. Los parámetros geométricos se obtuvieron mediante la acotación del dibujo en Autocad.

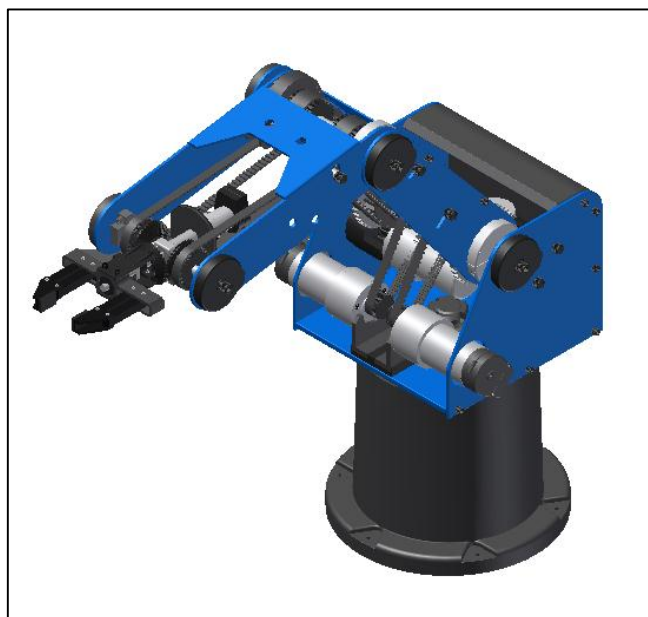


Figura 15-2 Modelo tridimensional de Scorbot ER 4u realizado en Autocad

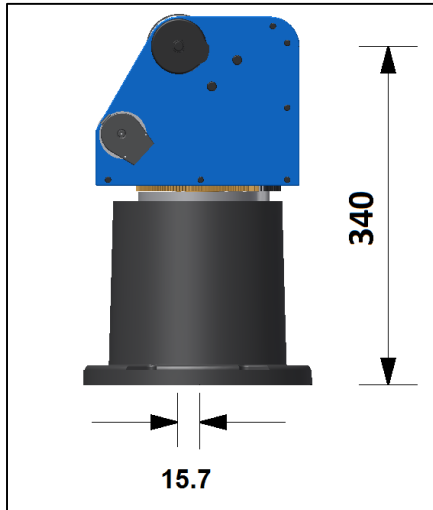


Figura 16-2 Parámetros Geométricos de la base y cuerpo

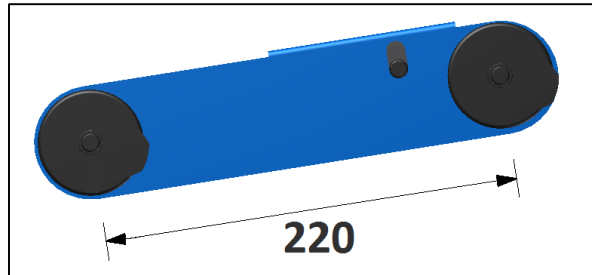


Figura 17-2 Parámetro Geométrico del Antebrazo

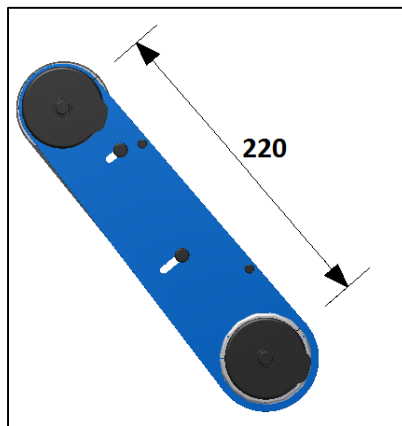
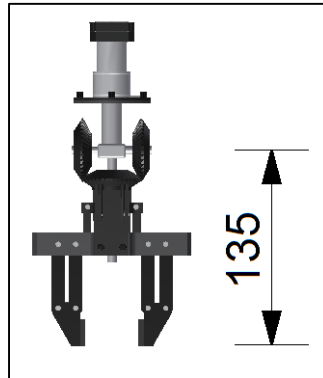


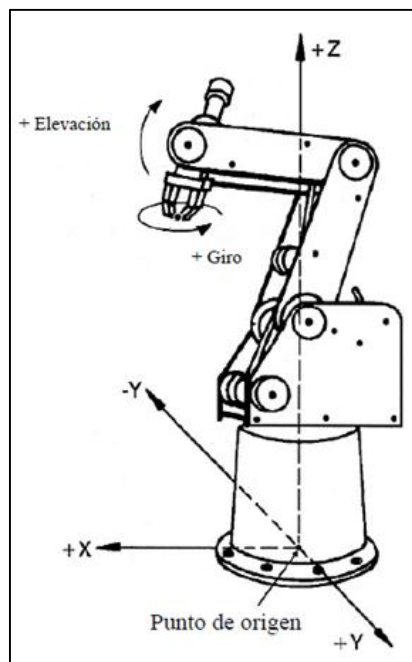
Figura 18-2 Parámetro Geométrico del brazo



**Figura 19-2 Parámetros Geométricos de la Pinza**

## 2.6 Análisis Cinemático Directo

Para la obtención del modelo cinemático se seguirá el algoritmo de Denavit – Hartenberg, aplicado al brazo robótico SCORBOT ER 4U. Se toma como punto de referencia la base del Brazo Robótico.



**Figura 20-2 Punto de origen para el análisis cinemático directo** Fuente: ABDALÁ CASTILLO, Salomón, Caracterización de un robot manipulador articulado, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca. Jun 2003.

Tomando como referencia el diagrama esquemático de robots de la clase SCORBOT, se toma como referencia el libro:

Se proporciona la visualización de los parámetros geométricos de D-H que servirán para el desarrollo del modelo cinemático.

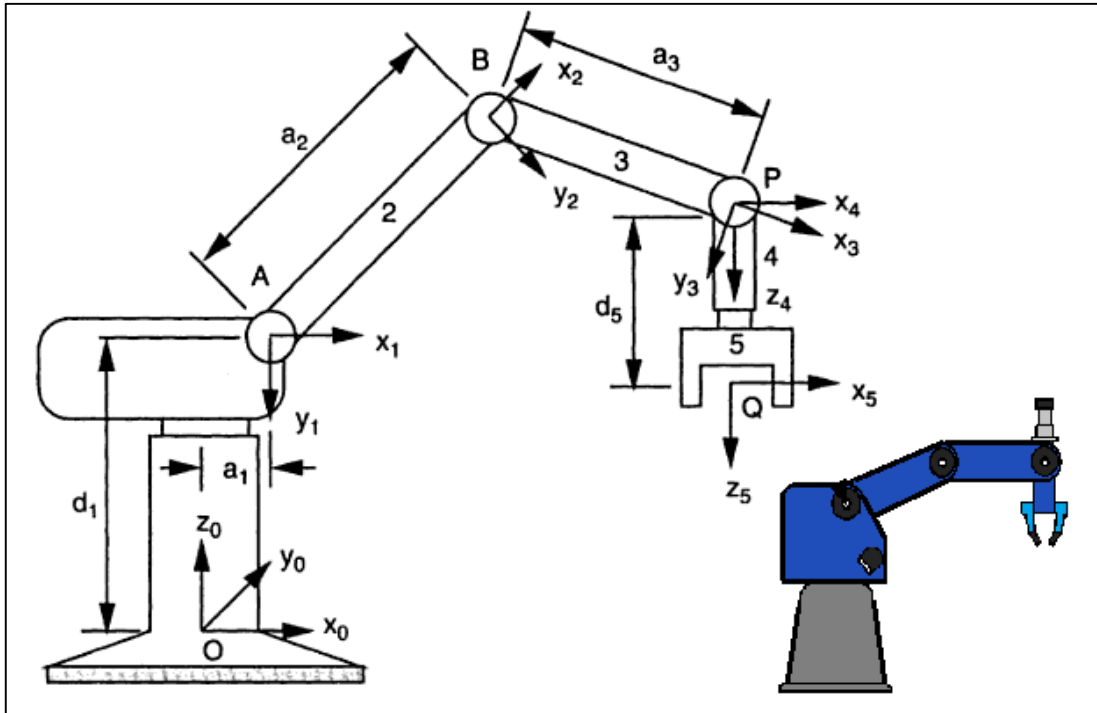


Figura 21-2 Diagrama esquemático Scorbot ER 4u

Por lo que la información requerida se obtiene de los parámetros geométricos del brazo robótico.

Los parámetros D-H se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2 Parámetros Denavit-Hartenberg Scorbot ER 4u

Articulación [ i ]	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$d_1$	$\theta_1$	$a_1$	$-\pi/2$
2	0	$\theta_2$	$a_2$	0
3	0	$\theta_3$	$a_3$	0
4	0	$\theta_4$	0	$-\pi/2$
5	$d_5$	$\theta_5$	0	0

- $d_1 = 340 \text{ mm}$
- $a_1 = 15.7 \text{ mm}$
- $a_2 = 220 \text{ mm}$
- $a_3 = 220 \text{ mm}$
- $d_5 = 135 \text{ mm}$

Utilizando la definición de general de matriz de transformación homogénea se obtienen las matrices de transformación entre cada sistema de referencia local utilizando los parámetros D-H.

Siendo  $S\theta = \text{Sen}\theta$  y  $C\theta = \text{Cos}\theta$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & a_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & a_1S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & a_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & a_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & a_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & 0 & -S\theta_4 & 0 \\ S\theta_4 & 0 & C\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & 0 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Para encontrar la matriz de transformación homogénea T que relaciona los sistemas de referencia de la base y del extremo final del robot es necesario realizar la multiplicación de las matrices de transformación entre cada sistema de referencia interno.

$$T = {}^0A_5 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 \quad (6.2)$$

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & r_x & P_x \\ n_y & o_y & r_y & P_y \\ n_z & o_z & r_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Los elementos de la matriz resultaron de la siguiente manera:

$$n_x = C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) C\theta_5 + S\theta_1 S\theta_5 \quad (8.2)$$

$$n_y = S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) C\theta_5 - C\theta_1 S\theta_5 \quad (9.2)$$

$$n_z = -S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) C\theta_5 \quad (10.2)$$

$$o_x = -C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_1 \quad (11.2)$$

$$o_y = -S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) S\theta_5 + C\theta_1 S\theta_5 \quad (12.2)$$

$$o_z = -S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) S\theta_5 \quad (13.2)$$

$$r_x = -C_1 S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (14.2)$$

$$r_y = -S_1 S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (15.2)$$

$$r_z = -C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (16.2)$$

$$P_x = -C\theta_1 [S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) d_5 - a_3 C(\theta_2 + \theta_3) - a_2 C\theta_2 - a_1] \quad (17.2)$$

$$P_y = -S\theta_1 [S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) d_5 - a_3 C(\theta_2 + \theta_3) - a_2 C\theta_2 - a_1] \quad (18.2)$$

$$P_z = -C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) d_5 - a_3 S(\theta_2 + \theta_3) - a_2 S\theta_2 + d_1 \quad (19.2)$$

La orientación está dada por la matriz de rotación:

$$R_0^5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & r_x \\ n_y & o_y & r_y \\ n_z & o_z & r_z \end{bmatrix} \quad (20.2)$$

Y la posición relativa del extremo final del robot está dada por el siguiente vector.

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (21.2)$$

## 2.7 Análisis Cinemático Inverso

La realización de la Cinemática Inversa se la realizo mediante el método geométrico, en vista de ser recomendado pero con el cambio de su punto de referencia, para el cual solo serán necesarios calcular  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

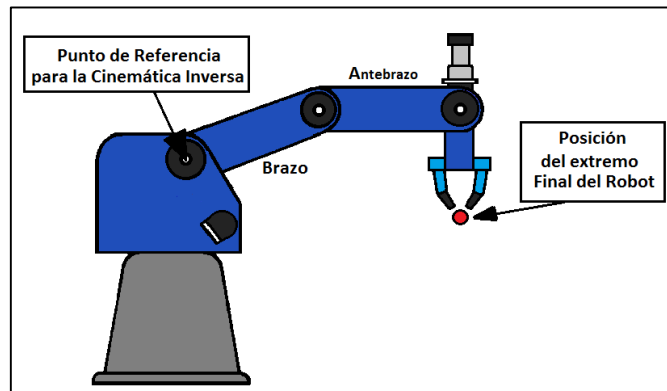


Figura 22-2 Punto de referencia para Análisis Cinemático Inverso

Se realizó un esquema alámbrico para su mejor comprensión.

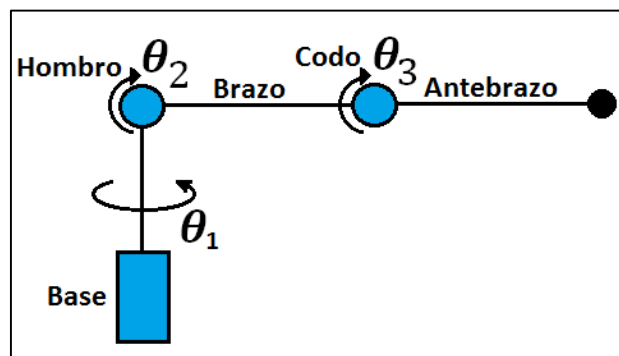


Figura 23-2 Esquema alámbrico para el Análisis Cinemático Inverso

Longitud Brazo:  $a_2$

Longitud Antebrazo:  $a_3$

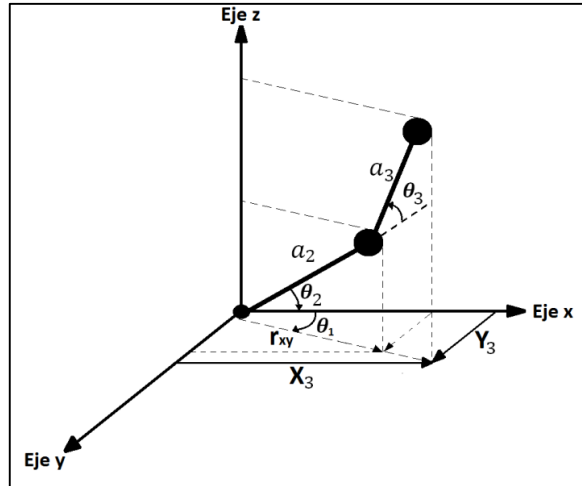


Figura 24-2 Esquema tridimensional para la Cinemática Inversa

Se procede a encontrar  $\theta_1$  para el giro de la base:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y_3}{x_3}\right) \quad (22.2)$$

Se calcula  $\theta_2$  para el giro del hombro:

$$r_{xy} = \frac{x_3}{\cos\theta_1} \quad (23.2)$$

$$r_{xyz} = \sqrt{r_{xy}^2 + z_3^2} \quad (24.2)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{z_3}{r_{xy}}\right) \quad (25.2)$$

Mediante la ley del coseno:

$$\alpha = \arccos\left[\frac{(a_2^2 + r_{xyz}^2 - a_3^2)}{2a_2 r_{xyz}}\right] \quad (26.2)$$

$$\theta_2 = \beta - \alpha \quad (27.2)$$

Se calcula  $\theta_3$  para el giro del codo:

$$a_{2y} = a_2 \sin\theta_2 \quad (28.2)$$

$$z_2 = a_{2y} \quad (29.2)$$

$$a_{2x} = a_2 \cos\theta_2 \quad (30.2)$$

$$xy_2 = a_{2x} \quad (31.2)$$

$$a_{3xy} = r_{xy} - a_{2x} \quad (32.2)$$

$$a_{3z} = z_3 - z_2 \quad (33.2)$$

$$\tan\gamma = \left(\frac{a_{3xy}}{a_{3z}}\right) \quad (34.2)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{a_{3xy}}{a_{3z}}\right) \quad (35.2)$$

$$\theta_3 = \gamma - \theta_2 \quad (36.2)$$

$$\theta_3 = \gamma - \beta + \alpha \quad (37.2)$$

De esta manera se obtienen los tres ángulos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

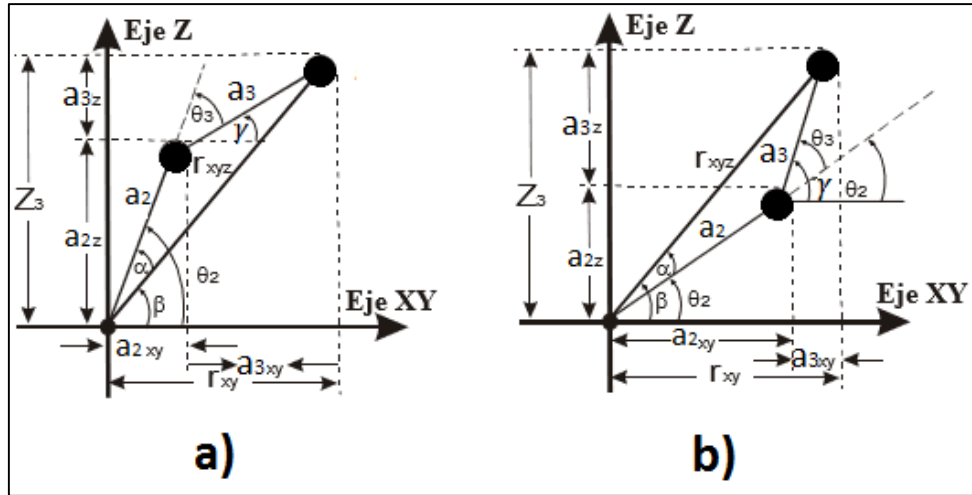


Figura 25-2 Proyección en un plano para la configuración codo arriba a) y codo abajo b)

## 2.8 Matriz Jacobiana

La Matriz Jacobiana tiene la estructura de la ecuación 28.1 y luego de derivarla da como resultado.

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_4} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_4} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_4} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_5} \end{bmatrix} \quad (38.2)$$

Siendo  $[P_x, P_y, P_z]$  se derivan parcialmente para cada una de sus variables articulares  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]$ .

$$P_x = T(1,4) = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \quad (39.2)$$

$$P_y = T(2,4) = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \quad (40.2)$$

$$P_z = T(3,4) = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \quad (41.2)$$

Es así que de esta manera se obtiene la matriz Jacobiana para velocidades lineales.

Las componentes del elemento  $J_v$  son las siguientes:

$$P_x = -C\theta_1[S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)d_5 - a_3C(\theta_2 + \theta_3) - a_2C\theta_2 - a_1] \quad (42.2)$$

$$P_y = -S\theta_1[S(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)d_5 - a_3C(\theta_2 + \theta_3) - a_2C\theta_2 - a_1] \quad (43.2)$$

$$P_z = [-C(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)d_5 - a_3S(\theta_2 + \theta_3) - a_2S\theta_2 + d_1] \quad (44.2)$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} = S_1(S_{234}d_5 - a_3C_{23} - a_2C_2 - a_1)$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} = -C_1(S_{234}d_5 - a_3C_{23} - a_2C_2 - a_1)$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} &= -C_1(C_{234}d_5 + a_3S_{23} + a_2C_2) \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} &= -S_1(C_{234}d_5 + a_3S_{23} + a_2C_2) \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} &= (S_{234}d_5 - a_3S_{23} - a_2C_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial \theta_4} &= -C_1(C_{234}d_5) \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_4} &= -S_1(C_{234}d_5) \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_4} &= S_{234}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} &= -C_1(C_{234}d_5 + a_3S_{23}) \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} &= -S_1(C_{234}d_5 + a_3S_{23}) \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} &= (S_{234}d_5 - a_3C_{23})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial \theta_5} &= 0 \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_5} &= 0 \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_5} &= 0\end{aligned}$$

Para encontrar la matriz Jacobiana de velocidades angulares primeramente se debe obtener la submatriz de rotación de la matriz de transformación homogénea:

$$Q = \begin{bmatrix} n_x & o_x & r_x \\ n_y & o_y & r_y \\ n_z & o_z & r_z \end{bmatrix} \quad (45.2)$$

Se obtiene  $\dot{Q}$  con respecto a las coordenadas angulares por medio de la diferenciación en Matlab.

$$\begin{aligned}Qp_1 &= \text{diff}(Q, q_1); \\ Qp_2 &= \text{diff}(Q, q_2); \\ Qp_3 &= \text{diff}(Q, q_3); \\ Qp_4 &= \text{diff}(Q, q_4); \\ Qp_5 &= \text{diff}(Q, q_5);\end{aligned}$$

$$\dot{Q} = Qp_1 \cdot \dot{q}_1 + Qp_2 \cdot \dot{q}_2 + Qp_3 \cdot \dot{q}_3 + Qp_4 \cdot \dot{q}_4 + Qp_5 \cdot \dot{q}_5$$

Con el fin de obtener la matriz antisimétrica.

$$\Omega = \dot{Q}Q^{-1}$$

$Q^{-1}$ : Se obtiene mediante Matlab utilizando el comando `inv(Q)` y a su vez las coordenadas del vector velocidad angular.

$$\begin{aligned}\omega_x &= \Omega(3,2) \\ \omega_y &= \Omega(1,3) \\ \omega_z &= \Omega(2,1)\end{aligned} \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (45.3)$$

Se derivan cada valor de las posiciones angulares respecto a las coordenadas de los nodos  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ .

Esta vez se utiliza el comando "Jacobian" de Matlab.

$$J_\omega = \text{jacobian}[\omega, (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)] \quad (46.2)$$

Para encontrar la matriz Jacobiana para las aceleraciones.

$$J_a = \frac{\partial(J_v \cdot \dot{q})}{\partial q} \quad (47.2)$$

Se debe obtener una matriz de velocidad  $V = J_v \cdot \dot{q}$  de la cual se dice que el extremo final de robot se encuentra en función de sus coordenadas articulares.

$$\begin{aligned} V_x &= V(1,1) = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\ V_y &= V(2,1) = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\ V_z &= V(3,1) = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \end{aligned}$$

Si se derivan las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, es posible la obtención de las aceleraciones lineales.

$$A = [\dot{V}_x; \dot{V}_y; \dot{V}_z] = \begin{pmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{pmatrix} \quad (48.2)$$

Mediante el comando "Jacobian" de Matlab se calcula la matriz jacobiana de las aceleraciones lineales.

$$J_a = \text{jacobian}[A, (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)] \quad (49.2)$$

Para encontrar la matriz Jacobiana que relacione las aceleraciones es necesario definir como:

$$[\dot{V}] = \dot{J}_v \dot{q} + J_v \ddot{q} \rightarrow [A] = \dot{J}_v \dot{q} + J_v \ddot{q} \quad (50.2)$$

Como se cuenta con  $J_v$  y siendo  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  datos del problema, se calcula  $\dot{J}_v$ .

$$J_v = f(q) \rightarrow \dot{J}_v = \frac{\partial J_v}{\partial q} \quad (50.3)$$

Siendo:  $a_{mn}$  los elementos de la matriz Jacobiana de velocidades Derivada  
*m: fila n: columna*

$$j_v = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & a_{24} &= -C_1 \dot{\theta}_1 S_{234} - C_1 C_{234} \dot{\theta}_{234} \\ a_{12} &= -C_1 \dot{\theta}_1 & a_{25} &= -C_1 \dot{\theta}_1 S_{234} - C_1 C_{234} \dot{\theta}_{234} \\ a_{13} &= -C_1 \dot{\theta}_1 & a_{31} &= 0 \\ a_{14} &= S_1 \dot{\theta}_1 S_{234} - C_1 C_{234} \dot{\theta}_{234} & a_{32} &= 0 \\ a_{15} &= S_1 \dot{\theta}_1 S_{234} - C_1 C_{234} \dot{\theta}_{234} & a_{33} &= 0 \\ a_{21} &= 0 & a_{34} &= S_{234} \dot{\theta}_{234} \\ a_{22} &= -S_1 \dot{\theta}_1 & a_{35} &= S_{234} \dot{\theta}_{234} \\ a_{23} &= -S_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{41} &= C_1 \dot{\theta}_1 (S_{234} d_5 - a_3 C_{23} - a_2 C_2 - a_1) + S_1 (C_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 + a_3 S_{23} \dot{\theta}_{23} + a_2 S_2 \dot{\theta}_2) \\ a_{42} &= S_1 \dot{\theta}_1 (C_{234} d_5 + a_3 S_{23} + a_2 S_2) + C_1 (S_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 - a_3 C_{23} \dot{\theta}_{23} - a_2 C_2 \dot{\theta}_2) \\ a_{43} &= S_1 \dot{\theta}_1 (C_{234} d_5 - a_3 S_{23}) + C_1 (S_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 - a_3 S_{23} \dot{\theta}_{23}) \\ a_{44} &= S_1 \dot{\theta}_1 (C_{234} d_5) + C_1 (S_{234} \dot{\theta}_{234} d_5) \\ a_{45} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{51} &= S_1 \dot{\theta}_1 (S_{234} d_5 - a_3 C_{23} - a_2 C_2 - a_1) - C_1 (C_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 + a_3 S_{23} \dot{\theta}_{23} + a_2 S_2 \dot{\theta}_2) \\ a_{52} &= -C_1 \dot{\theta}_1 (C_{234} d_5 + a_3 S_{23} + a_2 S_2) + S_1 (S_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 - a_3 C_{23} \dot{\theta}_{23} - a_2 C_2 \dot{\theta}_2) \\ a_{53} &= -C_1 \dot{\theta}_1 (C_{234} d_5 + a_3 S_{23}) + S_1 (S_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 - a_3 S_{23} \dot{\theta}_{23}) \\ a_{54} &= -C_1 \dot{\theta}_1 (C_{234} d_5) + S_1 (S_{234} \dot{\theta}_{234} d_5) \\ a_{55} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{61} &= 0 \\ a_{62} &= C_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 + a_3 S_{23} \dot{\theta}_{23} + a_2 S_2 \dot{\theta}_2 \\ a_{63} &= C_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 + a_3 S_{23} \dot{\theta}_{23} \\ a_{64} &= C_{234} \dot{\theta}_{234} d_5 \\ a_{65} &= 0 \end{aligned}$$

# CAPÍTULO 3

## 3. RESULTADOS

El resultado fue la respectiva simulación del Análisis Cinemático, se optó por Matlab para desarrollar la simulación correspondiente.

Para esto se tomó como base el análisis teórico del proyecto y se lo aplicó a una situación real.

Los ángulos que limitan el rango de operación del robot se obtuvieron del manual del usuario.

### 3.1 Estructura del Programa

La estructura del programa fue la siguiente:

1. Se elaboró una función en Matlab que calcule la matriz de transformación homogénea, mediante el ingreso de sus variables.
2. Se definieron los rangos de operación de cada articulación. Esto se lo realizó gracias a la información proporcionada por el manual del usuario.
3. Se Ingresaron de las coordenadas de articulación de posición, en grados.
4. Se realizó la conversión de grados a radianes los valores de entrada.
5. Se ejecutó el cálculo de matrices de transformación utilizando la función de Matlab creada anteriormente.
6. Se multiplicaron las matrices de transformación para encontrar la matriz de transformación homogénea, que relacione el extremo final del robot y la referencia en la base.
7. Se mostró la matriz de Transformación Homogénea y la respectiva posición del extremo final del robot.

Como resultado se obtuvo la posición y orientación del extremo final del brazo robótico en función de las coordenadas de las articulaciones y restringido por el rango de ángulos que permite cada articulación del robot.

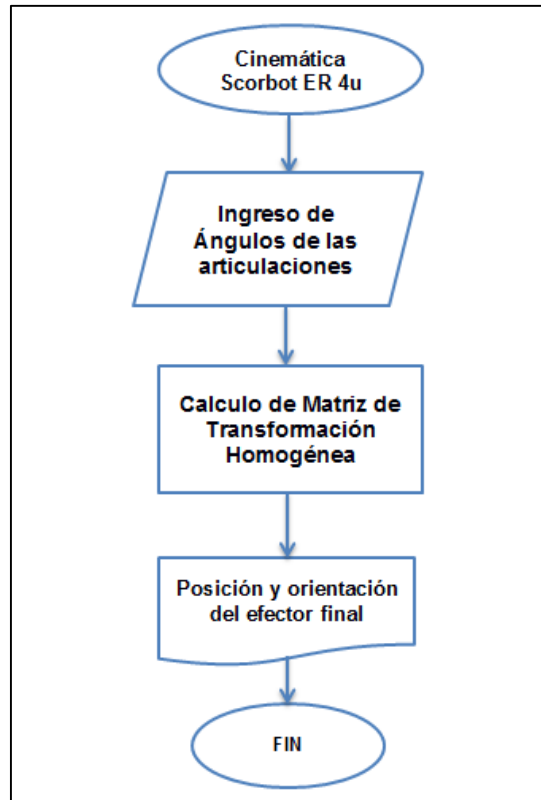


Figura 266-3 Esquema de Resolución del Algoritmo para el cálculo de la Matriz de Transformación homogénea

### 3.2 Simulación

#### Posición 1

Los ángulos articulares para esta posición fueron:

$$\theta_1=38.57$$

$$\theta_2=-29.70$$

$$\theta_3=44.70$$

$$\theta_4=-62.80$$

$$\theta_5=0$$

**Posición Robocell:**  $X = 418.65$ ;  $Y = 333.43$ ;  $Z = 318.78$

**Posición Matlab:**  $X = 413.19$ ;  $Y = 329.49$ ;  $Z = 316.56$

#### Posición 2

Los ángulos articulares para esta posición fueron:

$$\theta_1=47.65$$

$$\theta_2=-16.0$$

$$\theta_3=35.87$$

$$\theta_4=26.42$$

$$\theta_5=-44.01$$

**Posición Robocell:**  $X = 239.48$ ;  $Y = 258.47$ ;  $Z = 250.09$

**Posición Matlab:**  $X = 233.01$ ;  $Y = 255.71$ ;  $Z = 246.25$

### **Posición 3**

Los ángulos articulares para esta posición fueron:

$$\theta_1=47.65$$

$$\theta_2=-109.19$$

$$\theta_3=87.44$$

$$\theta_4=10.58$$

$$\theta_5=-8.17$$

**Posición Robocell:**  $X = 123.19$ ;  $Y = 133.75$ ;  $Z = 520.76$

**Posición Matlab:**  $X = 119.15$ ;  $Y = 130.71$ ;  $Z = 517.4$

### **Posición 4**

Los ángulos articulares para esta posición fueron:

$$\theta_1=47.65$$

$$\theta_2=-30.45$$

$$\theta_3=-46.24$$

$$\theta_4=-81.22$$

$$\theta_5=21.62$$

**Posición Robocell:**  $X = 171.79$ ;  $Y = 188.89$ ;  $Z = 555.67$

**Posición Matlab:**  $X = 168.88$ ;  $Y = 185.39$ ;  $Z = 552.40$

### **Posición 5**

Los ángulos articulares para esta posición fueron:

$$\theta_1=120.28$$

$$\theta_2=-30.45$$

$$\theta_3=63.42$$

$$\theta_4=31.10$$

$$\theta_5=-11.11$$

**Posición Robocell:**  $X = -142.60$ ;  $Y = 243.28$ ;  $Z = 288.41$

**Posición Matlab:**  $X = -139.7$ ;  $Y = 239.27$ ;  $Z = 285.65$

### 3.3 Matriz Jacobiana

Se obtuvo la matriz Jacobiana por medio de la programación (la cual se encuentra en la sección de anexos) en Matlab, la estructura del programa para obtener dicha matriz fue la siguiente:

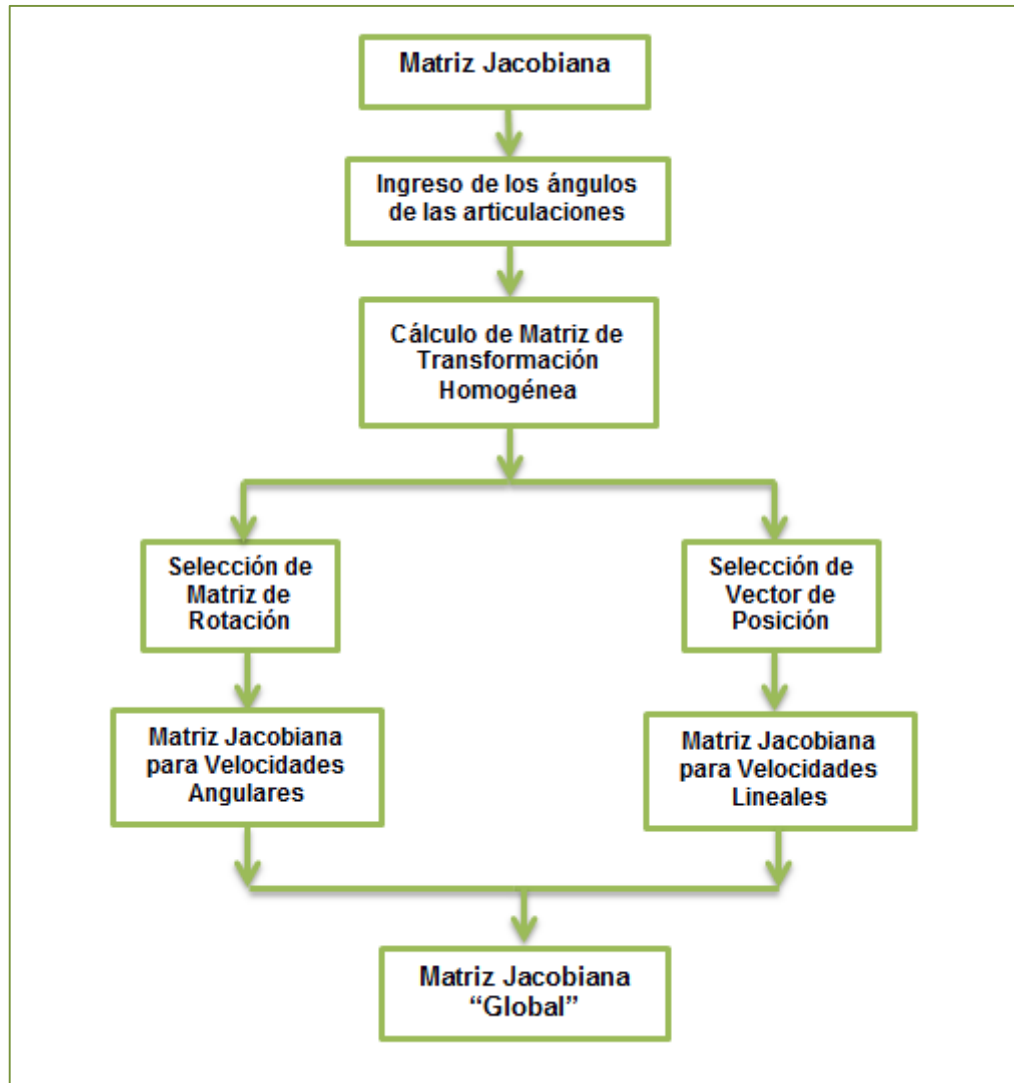


Figura 27-3 Esquema de Programación de Matriz Jacobiana

# CAPÍTULO 4

## **4.1 DISCUSIONES Y CONCLUSIONES**

El desarrollo de este proyecto es de gran importancia ya que se utiliza un Robot de tipo educativo disponible en la Espol, mediante el cual es posible simular situaciones reales y a su vez genera un recurso adicional sobre éste Robot, se observó la no exactitud de los resultados, esto se dio ya que no se disponía de un modelo tridimensional del robot por lo tanto sus medidas no fueron totalmente exactas y no se pudo realizar una simulación dinámica del mismo.

Cabe destacar que es la base de una línea de investigación, orientada al desarrollo de modelos de control, por consecuencia, el trabajo puede ser continuado a su próxima etapa la cual es el análisis dinámico.

## **4.2 Conclusiones**

Se desarrolló el análisis de la posición del efector final del robot por medio de las variables articulares que se ingresan, por lo que se concluye que el modelo cinemático tiene un desarrollo parcial, en vista que quedaron expresados los algoritmos de matriz de transformación homogénea y de matriz jacobiana.

Con el desarrollo del Modelo Cinemático se determinaron los parámetros geométricos necesarios para el desarrollo del mismo, y quedó expresada la matriz jacobiana para velocidades a partir de la cual se puede desarrollar la matriz jacobiana para aceleraciones.

## **4.3 Recomendaciones**

Se recomienda elaborar un modelo en tres dimensiones del brazo robótico ya que esto serviría de gran ayuda, en cuanto la determinación de parámetros geométricos, teniendo el proyecto una mayor exactitud de acuerdo a sus resultados.

Además un modelo tridimensional, es un gran apoyo para realizar simulaciones dinámicas que, de ser continuada la siguiente etapa del proyecto sería muy útil en la determinación de parámetros inerciales.

De formarse la carrera de ingeniería en mecatrónica, sería importante la integración de las materias, por ejemplo que aquellos proyectos de dibujo mecánico tengan como fin el ensamble y animación de este tipo de robots ya que esto significa un recurso muy importante al momento del desarrollo de la investigación.



# BIBLIOGRAFÍA

Arango Castro J. (2014). *Payload analysis and control of manipulators for human interactive environments*

Manizales: Tesis de la Universidad Nacional de Colombia.

Barrientos, A. (1997). *Fundamentos de Robótica*

Madrid:Mc Graw Hill

Denavit J, Hartenberg, R. (1955): *A kinematic Notation for lower pair mechanics based on Matrices.*

Deshpande V. & Dr. P M George. (2012). *Analytical Solution for Inverse Kinematics of SCORBOT- ER-Vplus Robot.*

Gujarat: (Tesis Doctoral): G. H. Patel College of Engineering & Technology

Gonzalez Echeverri A. (2014). *Análisis Cinemático y Dinámico del robot Scorbobot ER vplus para la nueva configuración en una base deslizante.*

Pereira: Tesis de la Universidad Tecnológica de Pereira.

Wen Tsai L. (1999). *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*

New York:John Wiley & Sons, Inc.

Intelitek. (2001). *Scorbobot ER 4u Manual del Usuario*

Derry NH: Intelitek Inc.

KUKA Roboter GmbH. (Sitio en internet). Disponible en: <http://www.kuka-robotics.com/es/>

Kumar Saha S. (2008). *Introducción a la Robótica*

Noida: Mc Graw Hill

Olier Caparros, I. (1999):*Análisis Cinemático de un robot industrial de tipo scara.*

Bogotá: Facultad de Ingeniería de la Universidad Militar de Nueva Granada

# APÉNDICE

## PROGRAMACIÓN EN MATLAB

### 3.1 Cinemática Directa

```
function Cinematica
clear all
clc
format long
%Se definen las distancias entre cada eje segun el esquema Scorbot ER 4u
% d1=340
% a1=15
% a2=220
% a3=220
% d5=135

% Theta1=Angulo de giro de la base
% Varía entre -155° y 155° grados
% Theta2=Angulo de giro del hombro
% Varía entre -35 y 130 grados
% Theta3=Angulo de giro del codo
% Varía entre -130 y 130 grados
% Theta4=Angulo de giro de la muñeca
% Varía entre -130 y 130 grados
% Theta5=Rotación de la muñeca
%Sin límite mecánico; eléctricamente,±570°

%Datos de la Base
ttheta1=input('\n Theta1=Angulo de giro de la base (grados): ');
while (ttheta1<-155 || ttheta1>155)
    fprintf('\n      No se admite este valor, el rango es de -155 a 155 (grados)');
    ttheta1=input ('\n      Theta1=Angulo de giro de la base (grados): ');
end
%Datos del hombro
ttheta2=input('\n Theta2=Angulo de giro del hombro (grados): ');
while (ttheta2<-35 || ttheta2>130)
    fprintf('\n      No se admite este valor,el rango es de -35 a 130 (grados)');
    ttheta2=input ('\n      Theta2=Angulo de giro del hombro (grados): ');
end

%Datos del Codo
ttheta3=input('\n Theta3=Angulo de giro del Codo (grados): ');
while (ttheta3<-130 || ttheta3>130)
    fprintf('\n      No se admite este valor el rango es de -130 a 130');
    ttheta3=input ('\n      Theta3=Angulo de giro del codo (grados): ');
end
%Datos de la muñeca
ttheta4=input('\n Theta4=Angulo de giro de la muñeca (grados): ');
while (ttheta4<-130 || ttheta4>130)
    fprintf('\n      No se admite este valor, el rango es de -130 a 130 (grados)');
    ttheta4=input ('\n      Theta4=Angulo de giro de la muñeca (grados): ');
end
ttheta5=input('\n Theta5=Rotación de la muñeca (grados): ');
while (ttheta5<-570 || ttheta5>570)
    fprintf('\n      No se admite este valor, el rango es de -570 a 570 (grados)');
    ttheta5=input ('\n      Theta5=Rotación de la muñeca (grados): ');
end

end
%Conversion de grados a radianes
theta1=ttheta1*pi/180;
theta2=ttheta2*pi/180;
theta3=ttheta3*pi/180;
theta4=ttheta4*pi/180;
theta5=ttheta5*pi/180;
```

```

%Ingreso de Parámetros Cinemáticos
d1=340;
a1=15.7;
a2=220;
a3=220;
d5=135;

A01=MDHMod(pi/2,a1,theta1,d1);
A12=MDHMod(0,a2,theta2,0);
A23=MDHMod(0,a3,theta3,0);
A34=MDHMod(-pi/2,0,theta4,0);
A45=MDHMod(0,0,theta5,d5);

format long
input('\n Matriz de Orientación');
T05=A01*A12*A23*A34*A45
input('\n Presione Enter para obtener sus Coordenadas');
T04=A01*A12*A23*A34;
T03=A01*A12*A23;
T02=A01*A12;
T01=A01;
XYZ=[T05(1,4);T05(2,4);T05(3,4)]
input('Presione Enter para finalizar')
clear all
clc

```

#### 4.4 Función para calcular Matriz de Transformación Homogénea

```

function A= MDHMod(alfa,a,theta,d)

A= [ cos(theta) -sin(theta)*cos(alfa)  sin(theta)*sin(alfa)  a*cos(theta);
     sin(theta)  cos(theta)*cos(alfa) -cos(theta)*sin(alfa)  a*sin(theta);
     0           sin(alfa)           cos(alfa)           d;
     0           0                   0                   1];

end

```

#### 4.5 Matriz Jacobiana

```

function jacobiano
%Matriz Jacobiana
format short
%Coordenadas de Nodos
%theta1,theta2,theta3,theta4,theta5
%Variables de Articulaciones

ttheta1=input('\n Theta1=Angulo de giro de la base (grados): ');
while (ttheta1<-155 || ttheta1>155)
    fprintf('\n          No se admite este valor, el rango es de -155 a 155
(grados)');
    ttheta1=input ('\n          Theta1=Angulo de giro de la base (grados): ');
end
%Datos del hombro
ttheta2=input('\n Theta2=Angulo de giro del hombro (grados): ');
while (ttheta2<-35 || ttheta2>130)
    fprintf('\n          No se admite este valor,el rango es de -35 a 130
(grados)');
    ttheta2=input ('\n          Theta2=Angulo de giro del hombro (grados): ');
end

```

```

%Datos del Codo
ttheta3=input('\n Theta3=Angulo de giro del Codo (grados): ');
while (ttheta3<-130 || ttheta3>130)
    fprintf('\n          No se admite este valor, el rango es de -130 a 130
(grados)');
    ttheta3=input ('\n          Theta3=Angulo de giro del codo (grados): ');
end
%Datos de la muñeca
ttheta4=input('\n Theta4=Angulo de giro de la muñeca (grados): ');
while (ttheta4<-130 || ttheta4>130)
    fprintf('\n          No se admite este valor, el rango es de -130 a 130
(grados)');
    ttheta4=input ('\n          Theta4=Angulo de giro de la muñeca (grados): ');
end
ttheta5=input('\n Theta5=Rotación de la muñeca (grados): ');
while (ttheta5<-570 || ttheta5>570)
    fprintf('\n          No se admite este valor, el rango es de -570 a 570
(grados)');
    ttheta5=input ('\n          Theta5=Rotación de la muñeca (grados): ');
end

%Ingreso de Parámetros Cinemáticos
d1=340;
a1=15.7;
a2=220;
a3=220;
d5=135;
syms d1 theta1 theta2 theta3 theta4 theta5

A01=MDHMod(pi/2,a1,theta1,d1);
A12=MDHMod(0,a2,theta2,0);
A23=MDHMod(0,a3,theta3,0);
A34=MDHMod(0,0,theta4,0);
A45=MDHMod(pi/2,0,theta5,d5);
A05=A01*A12*A23*A34*A45;

%De donde concluimos que para el elemento terminal:
x=A05(1,4);
y=A05(2,4);
z=A05(3,4);

P=[A05(1,4);A05(2,4);A05(3,4)];

%Matriz Jacobiana para velocidades lineales
Jv=jacobian(P,[theta1 theta2 theta3 theta4 theta5]);
%Obtener la submatriz de rotación de la matriz de transformación homogenea
Q=A05(1:3,1:3);
%Se deriva la matriz de rotacion Q

Qp1=diff(Q,theta1);
Qp2=diff(Q,theta2);
Qp3=diff(Q,theta3);
Qp4=diff(Q,theta4);
Qp6=diff(Q,theta5) ;

syms dtheta1 dtheta2 dtheta3 dtheta4 dtheta5
dQ=Qp1*Qd1+Qp2*dtheta1+Qp3*dtheta2+Qp4*dtheta3+Qp5*dtheta4+Qp6*dtheta5;

```

```

%mathanti:matriz antisimetrica
mathanti=simplify(dQ/Q);
mathx=mathanti(3,2);
mathy=mathanti(1,3);
mathz=mathanti(2,1);
%Vector de Velocidades angulares
W=[mathx;mathy;mathz];
Jw=jacobian(W,[dtheta1 dtheta2 dtheta3 dtheta4 dtheta5]);
format short

theta1=ttheta1*pi/180;
theta2=ttheta2*pi/180;
theta3=ttheta3*pi/180;
theta4=ttheta4*pi/180;
theta5=ttheta5*pi/180;

Jvv=eval(Jv)
Jww=eval(Jw)
J=[Jvv;Jww]

VV=J*[ttheta1;ttheta2;ttheta3;ttheta4;ttheta5]

input('Presione Enter para finalizar')
clear all
clc

```