

ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

"PROGRAMACION DIARIA DE CENTRALES HIDROELECTRICAS EN UN SISTEMA DE PRODUCCION MIXTA".

TESIS DE GRADO

PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE:

INGENIERA EN ELECTRICIDAD

ESPECIALIZACION: POTENCIA

PRESENTADA POR:

NELLY G. RODRIGUEZ TORRES

GUAYAQUIL - ECUADOR

1982

A G R A D E C I M I E N T O

AL ING. JUAN SAAVEDRA, DI
RECTOR DE TESIS, POR SU -
AYUDA Y COLABORACION PARA
LA REALIZACION DE ESTE TRA
BAJO.

DEDICATORIA

A MIS PADRES

A MI ESPOSO

A MI HIJA

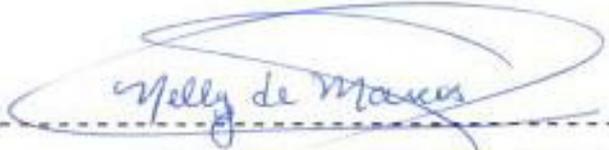
Juan Saavedra -

ING. JUAN SAAVEDRA
DIRECTOR DE TESIS

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos Profesionales de la ESPOL).



Nelly de Marcos

NELLY G. RODRIGUEZ TORRES

RESUMEN

El presente trabajo plantea un método de programación diaria de las centrales hidráulicas considerando la programación dinámica.

Establecemos inicialmente la necesidad de generar con dichas centrales la parte variable de la curva de carga considerando las características técnicas de este tipo de instalación. Necesitamos por lo tanto una programación óptima para cada hora (pues la carga varía de una hora a otra) teniendo entonces en el día 24 etapas que programar y en cada hora tenemos m centrales o lo que es lo mismo m estados en cada etapa, visto el problema de esta forma el mejor método de solución es por medio de la programación dinámica.

Para probar el método tomamos las centrales del Sistema Nacional Interconectado.

- Central Nayón
- Central Cumbayá
- Central Pisayambo
- Central Paute

De las que hacemos una descripción detallada de sus características.

Planteamos el modelo matemático para cada una y resolvemos por el método propuesto.

Vemos que, efectivamente, al final obtenemos los resultados esperados: una demanda constante que deberán servir las centrales térmicas.

Finalmente planteamos la posibilidad de completar este método y optimizarlo mediante un programa de computadora, cuyo diagrama de flujo bosquejamos, y que haría el cálculo más rápido y eficiente.

INDICE GENERAL

	PAG.
RESUMEN -----	VI
INDICE GENERAL -----	VIII
INDICE DE FIGURAS -----	XII
INDICE DE TABLAS -----	XIV
INTRODUCCION-----	16
CAPITULO I	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA-----	19
1.1. REPARTICION GENERAL DE CARGA -----	19
1.2. REPARTICION DE LA CARGA DE ACUERDO A LAS CA RACTERISTICAS PROPIAS DE LAS DIVERSAS CENTRA- LES -----	26
1.2.1. Características de las Plantas Hidro- eléctricas -----	27
1.2.2. Características de las Plantas Térmicas	27
1.2.3. Repartición de la potencia horaria en tre las plantas hidroeléctricas modu lables -----	29
1.2.4. Repartición de la potencia horaria en tre las plantas termoeléctricas -----	32

CAPITULO II

RESOLUCION MATEMATICA DEL PROBLEMA-----	47
2.1. APROXIMACION A LA SOLUCION -----	47
2.1.1. Análisis General -----	47
2.1.2. Subdivisiones del problema con m solucio <u>n</u> nes en m problemas con 1 solucio <u>n</u> -----	50
2.1.2.1. Demostración matemática -----	50
2.1.2.2. Determinación de las soluciones	52
2.1.3. Ventajas del procedimiento -----	54
2.1.4. Orden de elaboración de las centrales---	57
2.2. DETERMINACION DE LAS CONDICIONES DE COMPATIBILI <u>D</u> DAD -----	61
2.2.1. Planteamiento de las condiciones-----	61
2.2.2. Análisis de las condiciones -----	68
2.3. RELACION ENTRE LA FUNCION COSTO Y LA FUNCION VA <u>R</u> RIANZA DE LA POTENCIA INSTANTANEA-----	74
2.3.1. Propiedad de monotonía de la función - $\sum_{i=1}^n x_i^2$ de las variables x_j sujetas a la condición $\sum_{i=1}^n x_i = \text{constante}$ -----	74
2.3.2. Relaciones entre las funciones convexas y la varianza creciente de la variable--	81
CAPITULO III	
METODO DE SOLUCION -----	91

3.1. SOLUCION MEDIANTE PROGRAMACION DINAMICA -----	91
3.2. CONSIDERACIONES DEL METODO -----	95
3.2.1. Orden de elaboración de las centrales---	97
3.2.2. Limitación de transmisión de potencia---	99
3.2.3. Consideraciones de pérdidas de transmisión	
3.2.4. Consideraciones de rendimiento -----	101
CAPITULO IV	
APLICACION AL SISTEMA NACIONAL INTERCONECTADO-----	104
4.1. DESCRIPCION DEL SISTEMA	
4.1.1. Generalidades -----	104
4.1.2. Sistema Nacional de Generación y Transmi sión -----	104
4.1.3. Sistemas Regionales -----	107
4.1.4. Disponibilidad existente de generación--	108
4.2. DATOS DEL SISTEMA (RELACIONADOS CON EL PROBLEMA)	110
4.2.1. Centrales Nayón y Cumbayá-----	110
4.2.2. Central Pisayambo -----	114
4.2.3. Central Paute -----	120
4.2.4. Datos de Demanda -----	130
4.3. EJEMPLO DE CALCULO-----	134
4.3.1. Programación de Nayón y Cumbayá -----	138
4.3.2. Programación de Pisayambo -----	146
4.3.3. Programación de Paute fase A y B -----	151

CAPITULO V	
OTRAS OPCIONES DE CALCULO-----	156
5.1. CONDICIONES ESTABLECIDAS PARA CENTRALES QUE SE ALIMENTAN DE UN MISMO RECURSO -----	156
5.2. PROGRAMACION DE CENTRALES HIDRAULICAS CONSIDE- RANDO LA VARIABILIDAD DEL RENDIMIENTO -----	158
5.2.1. Generalidades -----	159
5.2.2. Planteamiento -----	160
5.2.3. Solución -----	164
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES-----	167
APENDICES -----	173
BIBLIOGRAFIA -----	210

INTRODUCCION

El nivel de desarrollo de un país puede ser medido a partir de su desarrollo eléctrico, y es por ésta razón que en el Ecuador no fue sino hasta que empezó la explotación petrolera que se incrementó notablemente la generación eléctrica y se crearon organismos y programas con la finalidad de "electrificar" al país.

Con el aumento de divisas fue factible, entonces, pensar en obras de grandes envergaduras y fuerte inversión con ganancias (resultados) a largo plazo, como son las centrales hidráulicas y aprovechando los vastos recursos hídricos que tenemos, generar básicamente con centrales de este tipo.

Es, por lo tanto, en este decenio entre 1980 - 1990 - que la mayoría de éstas obras entrarían en operación exigiendo, en consecuencia, un método de planificación de su funcionamiento que optimice la utilización de cada central.

Considerando esta necesidad, se pensó desarrollar el mé

todo de programación diaria que se expone en este trabajo por la utilidad práctica que puede tener.

Para ello primero se hace un análisis general de como debe cubrirse la carga aprovechando las características técnicas que presentan los Sistemas Hidráulicos y Térmicos.

Luego hacemos un análisis de las características de las centrales, las restricciones que presentan según sus límites de embalse (derrames de agua o vaciamientos) y capacidad del generador.

Continuamos con un somero estudio sobre la generación con centrales térmicas, pues no es el objetivo principal de este trabajo.

Planteamos a continuación un método de solución gráfica que cumple con todas las condiciones impuestas y permite una clara visualización de la influencia de cada parámetro y restricción en el proceso de optimización de la operación de centrales hidráulicas.

Finalmente aplicamos nuestro método al sistema nacional

interconectado basando nuestros cálculos en datos proporcionados por INECEL (Instituto Ecuatoriano de Electrificación).

Se termina con un análisis de resultados obtenidos y con las conclusiones generales.

En el presente trabajo se ha tratado de justificar todos los procedimientos realizados de una manera cualitativa y matemática con el fin principal de disipar cualquier duda.

No es aspiración de la autora su aplicación directa e inmediata en nuestros sistemas de generación hidráulicos pues a medida de que el número de centrales aumenta el método se vuelve complicado y engorroso, sino más bien exponer un camino hacia la optimización del funcionamiento de dichas centrales, que, como ya señalamos es exigencia del futuro del país.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. REPARTICION GENERAL DE CARGA

Vamos a partir del diagrama de carga diario, el mismo que estará formado por n valores R_1, \dots, R_n de potencia que consideraremos constante durante el intervalo de tiempo elemental T . Para satisfacer dicho diagrama se dispone de varios recursos que se pueden clasificar como sigue:

1.1.1. Centrales de pasada, que no influyen en las centrales a reservorio, vamos a suponer que el diagrama diario que cubrirán dichas centrales R_{f1}, \dots, R_{fn} es conocido.

1.1.2. Centrales hidroeléctricas regulables, esto es con reservorios, es precisamente sus diagramas de producción R_{m1}, \dots, R_{mn} que tendremos que determinar.

1.1.3. Centrales térmicas convencionales, con sus diagramas de funcionamiento R_{T1}, \dots, R_{Tn} que también vamos a determinar.

Sin embargo una vez encontrados los diagramas de producción de las centrales hidráulicas, es fácil deducir E_T o sea la energía a producirse por las centrales térmicas convencionales en la jornada de estudio como la diferencia entre la energía demandada y la energía producible por los otros recursos hidráulicos.

En este estudio no se consideran otros recursos como centrales geotérmicas, nucleares e intercambios con otros sistemas porque el país carece de ellos. Si los consideráramos tampoco afectaría nuestro análisis si se estableciere su producción como conocida. Una situación ideal de ejercicio diario de los varios recursos energéticos es la que se presenta en la Fig.Nº1, α = producción por hora modulada de las plantas hidroeléctricas con reservorio diario o semanal. β = producción de plantas térmicas. γ = producción por plantas geotérmicas, nucleares y a lignito. δ = producción por hora de plantas de pasada.

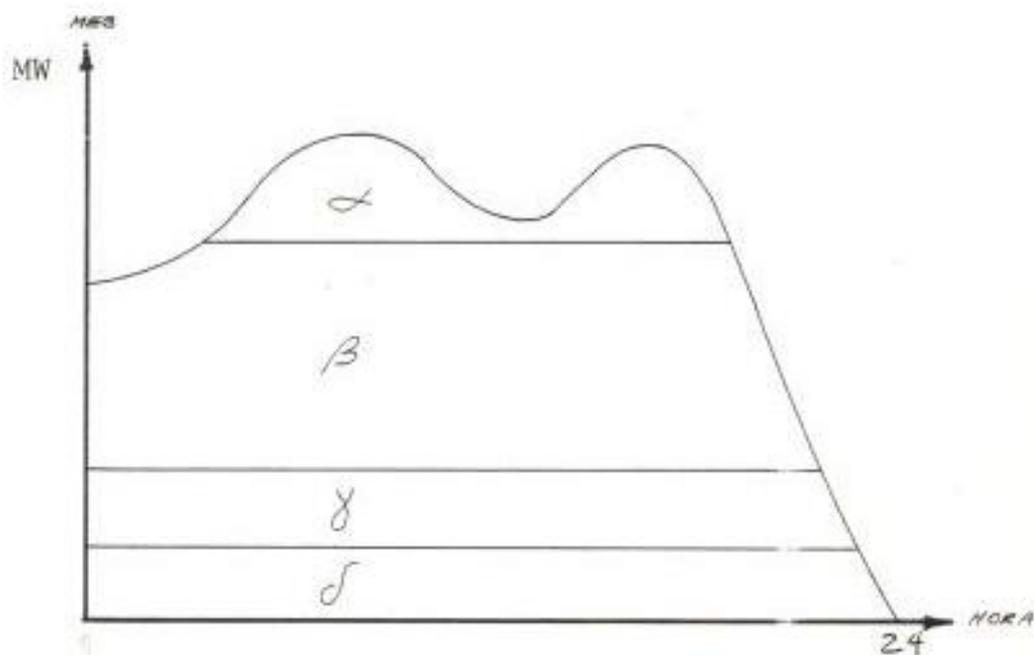


FIGURA N° 1

REPARTICION IDEAL DE LOS RECURSOS ENERGETICOS DURANTE UN DIA

Siguiendo la simbología ya utilizada se puede describir para cada intervalo de tiempo elemental T la siguiente relación:

$$R_j = R_{fj} + R_{mj} + R_{tj} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Lo cual expresa la exigencia de estar frente a la carga requerida instante por instante, generando lo necesario justo para satisfacerla.

Si la carga demandada R_j se le sustrae el valor conocido R_{fj} , se obtiene carga residual.

$$r_j = R_{mj} + R_{tj} \quad j = 1, \dots, n \quad (n = \text{horas})$$

Esta carga residual como podemos ver debe ser cubierta por las centrales térmicas convencionales y las centrales hidráulicas regulables. Por lo tanto son estos dos tipos de centrales los que debemos programar.

El criterio seguido para satisfacer la demanda y repartir las cargas entre la central termoeléctrica y las de reservorio trata de cumplir con la condición de que el diagrama térmico sea lo más nivelado y eso se puede

expresar como:

$$R_{tj} = \frac{E_T}{nT} = \text{constante} \quad j = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto las partes variables del diagrama residual deberá ser cubierto por las centrales hidroeléctricas regulables. Por lo tanto cada central hidroeléctrica presentará un diagrama semejante en su forma al diagrama residual.

Así, si tenemos m centrales y llamando X_{ij} a la potencia generada por la central i -ésima durante el intervalo de tiempo j -ésimo, e_i es la energía que la central i debe producir en el día, y si E_h es la energía global que se debe producir con las centrales hidroeléctricas regulables en el día, o sea:

$$E_h = \sum_1^m e_i$$

Obtendremos que para cada intervalo:

$$\frac{x_i}{e_i} (E_h) = r_j - \frac{E_t}{nt} \quad i = 1, \dots, m$$

$$1. x_{ij} = \left(\frac{e_i}{E_h} \right) \left(r_j - \frac{E_t}{nt} \right) \quad j = 1, \dots, n$$

De esta ecuación se puede concluir que la cuota de participación de cada central hidroeléctrica regulable para la cobertura del diagrama de carga esté determinado por el reparto uniforme entre la energía que se puede producir con dicha central y la energía global que se puede producir con todas las centrales del mismo tipo.

Esta relación resolvería en el modo más completo, y al mismo tiempo simple, el problema de la repartición de la producción hidroeléctrica regulable entre las diversas centrales.

Sin embargo se puede observar que dicha relación no considera las condiciones impuestas por la potencia disponible en las diversas centrales.

Si consideramos Y_i como la potencia disponible en la central i -ésima, debe necesariamente ser:

$$2. x_{ij} \leq Y_i \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

Además de acuerdo a las consideraciones que hemos estado observando en caso de tener un intervalo j en el que no se cumple la ecuación 2, no podemos poner simplemente $x_{ij} = Y_i$ sino que, con el fin de producir en cada caso la energía asignada, se debe hacer redistribuciones en la energía de los otros intervalos de tiempo.

El criterio para las redistribuciones debe ser especificado en modo unívoco ya sea para operar con una política uniforme para todas las centrales regulables o ya sea para considerar condiciones de otro tipo como por ejemplo aquellas impuestas por la capacidad del

reservorio (evitar resecamientos o derrames).

Entonces el método de programación debe repartir la potencia de producción entre las diversas centrales hidráulicas regulables teniendo en cuenta todas las condiciones existentes para cada central de modo - que el diagrama resultante de la diferencia entre - las cargas r_j y las de dichas centrales sea lo más nivelado posible. Por lo tanto la relación base de tal criterio es la siguiente:

$$\sum_1^n (r_j - \sum_1^m x_{ij})^2 = \text{mín.}$$

O sea la condición que produce un diagrama que deberá ser cubierto por centrales térmicas lo más nivelado - posible.

1.2. REPARTICION DE CARGA DE ACUERDO A LAS CARACTERISTICAS PROPIAS DE LAS DIVERSAS CENTRALES

El método para programar las centrales tiende a utilizar como ya dijimos, los varios tipos de plantas se

gún la especialización de las funciones de los ejercicios que las respectivas características técnicas permitan.

Estas características en la medida que interesan, pueden ser resumidas así:

1.2.1. Plantas hidroeléctricas

1.2.1.1. A paridad del salto motor, rendimiento de abastecimiento constante en un campo suficientemente amplio de la potencia eléctrica generada.

1.2.1.2. Relativa rapidez y facilidad en las maniobras de arranque y regulación no excesivamente rápida de la presa de carga.

1.2.2. Plantas Térmicas

1.2.2.1. Consumos horarios crecientes con una curva parabólica al crecer la potencia eléctrica generada.

- 1.2.2.2. Complejidad de la maniobra de arranque, modulabilidad lenta y no continua de la potencia que entrega.
- 1.2.2.3. Imposibilidad por construcción de en tregar potencia más bajo de un cierto mínimo técnico.
- 1.2.2.4. Capacidad de variar rápidamente más - allá de la potencia requerida (a cau sa de la pequeña inercia del fluido - del motor).
- 1.2.2.5. Costos no despreciables en el arranque debido esencialmente al calor que se debe almacenar antes de andar a régimen y que se disipa a partir del momento en que se ha parado.

Basándonos en las consideraciones precedentes, se puede ya intuir que el tipo de ejercicio dia rio debe tratar de combinar óptimamente los dos tipos de plantas.

Para ello, como ya se explicó, tendremos que operar en modo tal que las plantas hidroeléctricas sigan lo más cerca posible las variaciones del diagrama de las cargas, de tal forma que se obtenga que la diferencia entre este último y la producción de las plantas hidroeléctricas resulten lo más nivelado posible en el curso de las 24 horas. De este modo, al utilizar lo mejor según las características propias de funcionamiento los dos diversos tipos de plantas, se obtendrá también el mínimo costo de la energía térmica que debe producirse (dada la forma parabólica de las curvas de consumo horario de las plantas termoeléctricas) y el mínimo número de grupos termoeléctricos para tener en servicio con el fin de realizar la producción de energía prevista como es obvio.

1.2.3. Repartición de la potencia horaria entre las plantas hidroeléctricas regulables.

Para traducir cuantitativamente el criterio del manejo de las centrales hidroeléctricas regulables arriba bosquejado introducimos algunas de

finiciones relativas a tales centrales.

- m número de centrales
- X_{ij} Potencia producida por la central i ésima durante el j -ésimo intervalo de tiempo ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) desconocida.
- e_i Energía a producirse por la central i -ésima durante nT , conocida.
- y_i, Y_i Potencia mínima y eficiente de la central i conocida, y_i podría resultar negativa si existen en la central grupos de bombas.
- v_i, V_i Capacidad mínima y máxima del reservorio i , alimentando la central i conocida.
- V_{i0} Valor inicial del embalse del reservorio i , conocido.
- $f_{ij}(\text{MWh})$ Aportes al reservorio i durante el intervalo j , conocido si la central i no de

pende de otra.

$$v_{ij} = v_{io} + \sum_1^j h f_{ih} - T \sum_1^j h X_{ih} \quad (\text{MWh}) \quad \text{Embalse del}$$

reservorio i al término del intervalo de tiempo j , incógnito

$$d_{ij} = v_{io} + \sum_1^j h f_{ih} - V_i. \quad \text{Conocido } i \text{ son conocidos los } f_{ih}$$

$$D_{ij} = v_{io} + \sum_1^j h f_{ih} - v_i = d_{ij} + V_i - v_i \quad \text{conocidas } i - \text{son conocidas los } f_{ih}$$

Las condiciones a las cuales está sometida la incógnita x_{ij} resulta del hecho de que a cada central se le asigna la producción e_i , que a cada j (intervalo de tiempo) la potencia generada debe estar comprendida entre el mínimo y el máximo asignado así:

$$3. \quad T = \sum_1^n j x_{ij} = e_i \quad e=1, \dots, m$$

$$4. \quad y_i \leq x_{ij} \leq Y_i \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$5. d_{ij} \leq T \sum_1^j h_{ih} X_{ih} \leq D_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$6. Z = \sum_1^n j (r_j - \sum_1^m k X_{kj})^2 = \min.$$

Las ecuaciones 3, 4 y 5, corresponden respectivamente a las condiciones sobre la energía, sobre los límites de potencia y sobre los límites de embalse, la 6, se asume para expresar el criterio requerido que sea "lo menos variable posible" el diagrama $r_j - \sum_1^m k X_{kj}$ que debe ser cubierto con las centrales termoeléctricas.

1.2.4. Repartición de la potencia horaria entre las instalaciones termoeléctricas

Resolviendo la repartición de la potencia horaria entre las plantas hidroeléctricas regulables se obtiene un diagrama horario de la demanda residual, al cual deberá satisfacerse sólo con las unidades termoeléctricas.

Tales diagramas residuales, que en el límite deben ser sólo una línea horizontal, totalmente nivelada, debe ser cubierta por las unidades termoeléctricas de la manera más económica posible.

Esto se obtiene operando en modo tal que todas las unidades termoeléctricas que participen en la producción, hora por hora, funcionen a iguales "costos incrementales".

Para comprender tal afirmación es necesario referirse a la curva de consumo específico de una unidad térmica genérica.

Esta al generar tiene un comportamiento del tipo representando en la figura 2.

A partir de la figura 2, multiplicando cada valor de la abcisa por el correspondiente valor en la ordenada, se obtiene la correspondiente curva de los consumos por hora que tiene un comportamiento del tipo de la figura 3.

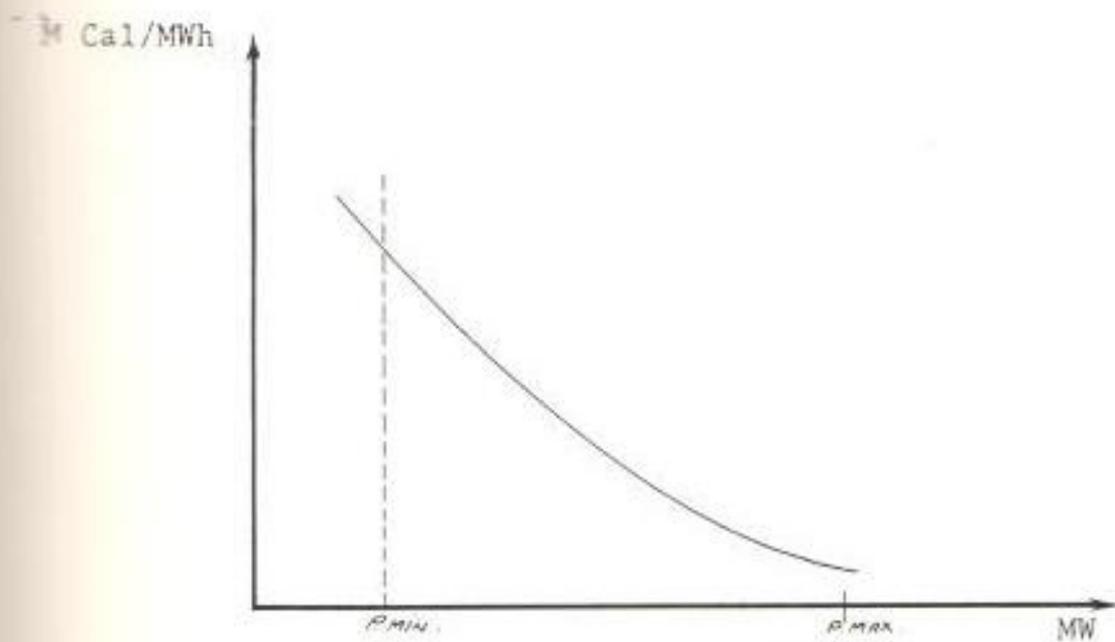


FIGURA N° 2
CURVA DE CONSUMO ESPECIFICO DE UNA UNIDAD TERMICA
GENERICA

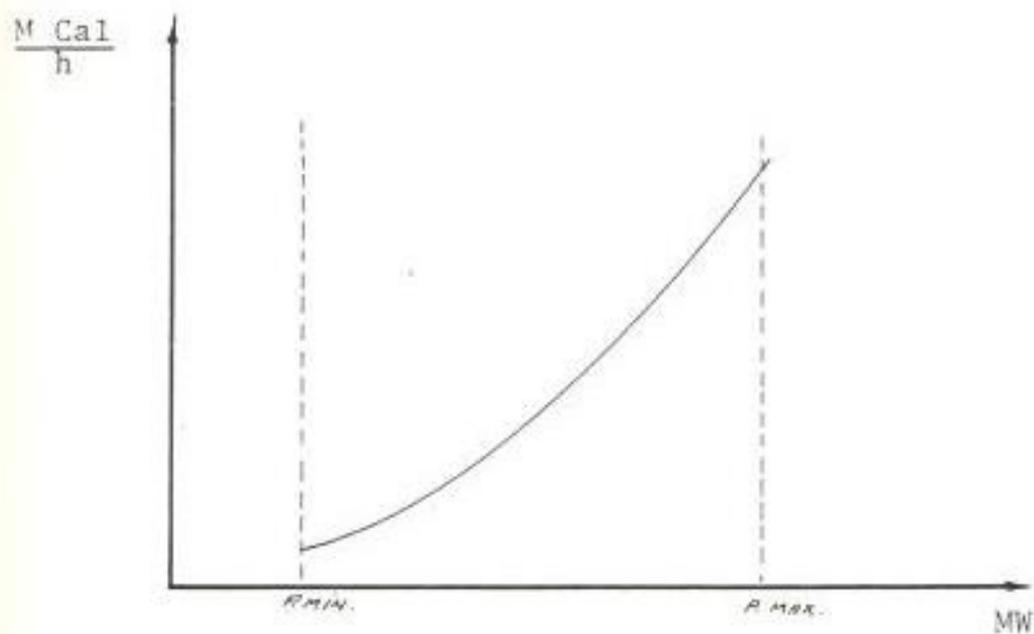
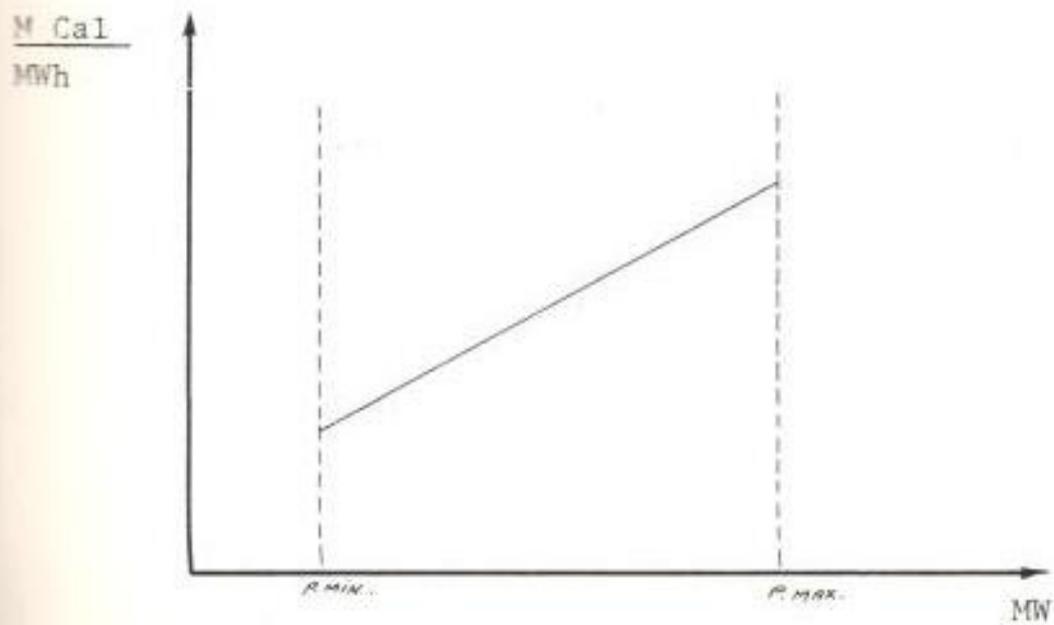


FIGURA N° 3

CURVA DE LOS CONSUMOS POR HORA PARA UNA UNIDAD
TERMICA GENERICA

FIGURA N^o 4

CONSUMO INCREMENTAL DEL GRUPO
TERMICO

Con una buena aproximación se puede decir que tal curva es una parábola.

Recordando que la parábola tiene una pendiente linealmente creciente (o decreciente) y que tal pendiente en cada punto de la curva es medida de los valores de la tangente trigonométrica relativa se puede trazar un comportamiento de la tangente para la curva de la figura 3, que por cuanto se ha dicho, asumirá el aspecto de la figura 4.

Tal recta representa en cada punto el comportamiento del "consumo incremental" del grupo.

Como es fácil notar en la abscisa y en la ordenada de la figura 4 aparecen las mismas unidades que se presentaban en las coordenadas de la figura 2.

El significado de las 2 figuras es obviamente diferente.

1.2.4.1. La figura 2 representa el consumo de M Cal por cada MWh producido en la correspondiente potencia en la abscisa.

1.2.4.2. La figura 4 representa el consumo que se debe agregar en M Cal/h por cada MW requerido en más o en menos, respecto a la potencia de funcionamiento.

Para mayor comprensión de como la situación de repartición de la potencia a iguales consumos incrementales es la situación económicamente óptima, se puede referir a un simple ejemplo didáctico que considera la presencia en la red de dos unidades que tienen la misma potencia nominal, el mismo mínimo técnico y la parábola de consumos horarios diferentes pero en una cantidad constante en la abscisa.

Por cuanto se ha dicho las rectas que representan el comportamiento de la pendiente (o bien el valor de la tangente trigonométrica en cada punto) de las dos parábolas serán iguales y

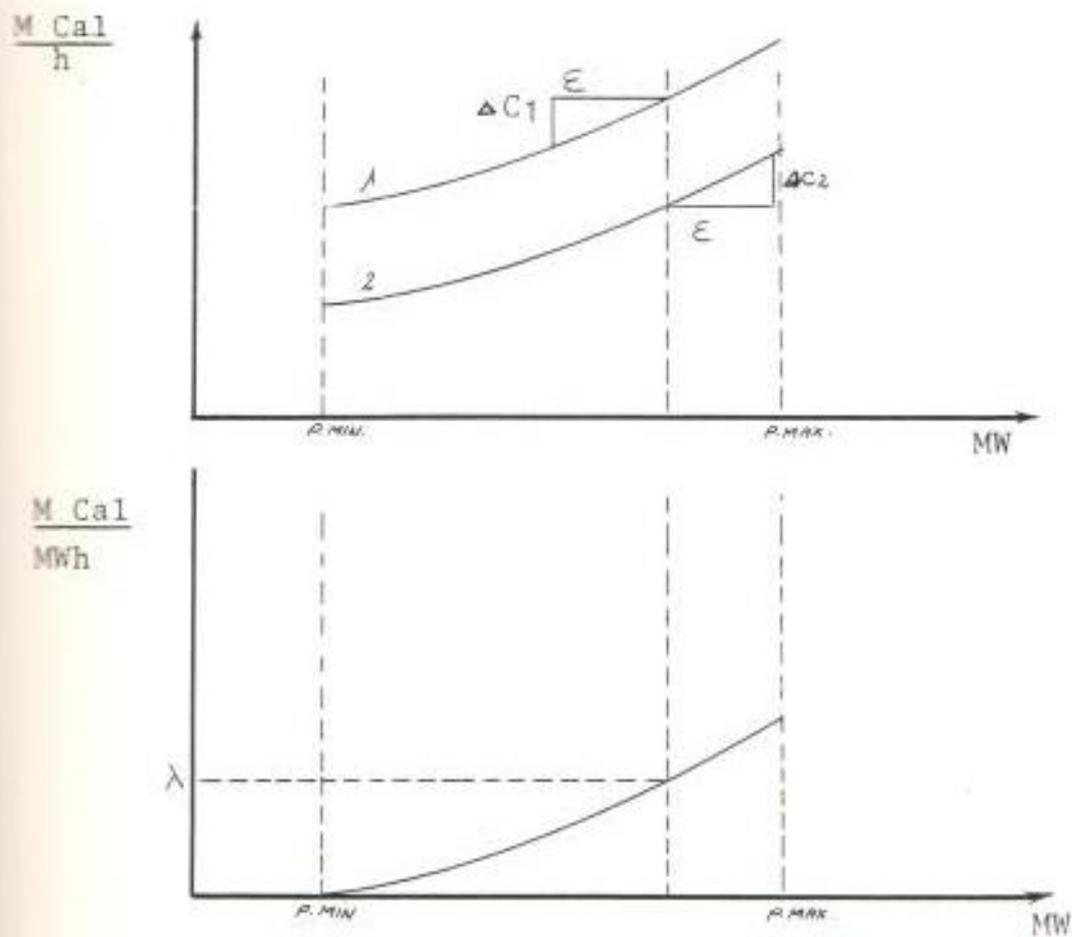


FIGURA N° 5

CURVA DE CONSUMOS Y CONSUMOS INCREMENTALES PARA EL EJEMPLO DE LA SECCION 1.2.4.2.

coincidentes. Ver figura 5.

En tal caso, dada P , la potencia requerida y que tienen que producir las dos unidades, la repartición a iguales consumos marginales - prevee que cada unidad participe con una potencia parecida a la mitad de aquella global requerida.

En particular como se ve en la figura 5. se tendrá $P_1 = P_2 = P/2$.

Que corresponde a funcionar a un igual costo incremental λ , también si el rendimiento de la unidad 2 es constantemente superior al rendimiento de la unidad 1.

En este punto se puede facilmente ver que aquella configuración es la situación óptima económica.

De hecho, si por ejemplo (como parecería intuitivo) se quisiera hacer producir una mayor potencia $P_2 + E$ a la unidad 2 que tiene el me

por rendimiento, de una cantidad parecida de
berá disminuir la potencia entregada por la
unidad 1 a fin de que sea respetada la rela
ción:

$$P = P_1 + P_2$$

Se deberá tener entonces $(P_1 - E) + (P_2 + E) = P$
con $E > 0$.

En tal caso, sin embargo, recordando que la -
parábola que por hipótesis describe el consumo
horario de la unidad térmica tiene una pendien
te linealmente creciente y que en particular,
para las 2 unidades que estamos considerando,
las 2 parábolas tienen punto por punto la mis
ma pendiente, el aumento de costo ΔC_2 para -
producir E MW en más con la unidad 2 es supe
rior al respectivo ΔC_1 que se obtiene produ-
ciendo al mismo tiempo E MW menos con la uni
dad 1. De hecho para cada trazo de parábola
del tipo de aquella en la figura 5, se tiene
siempre que desplazándose un Δx positivo en +
o en - alrededor de un punto de referencia en

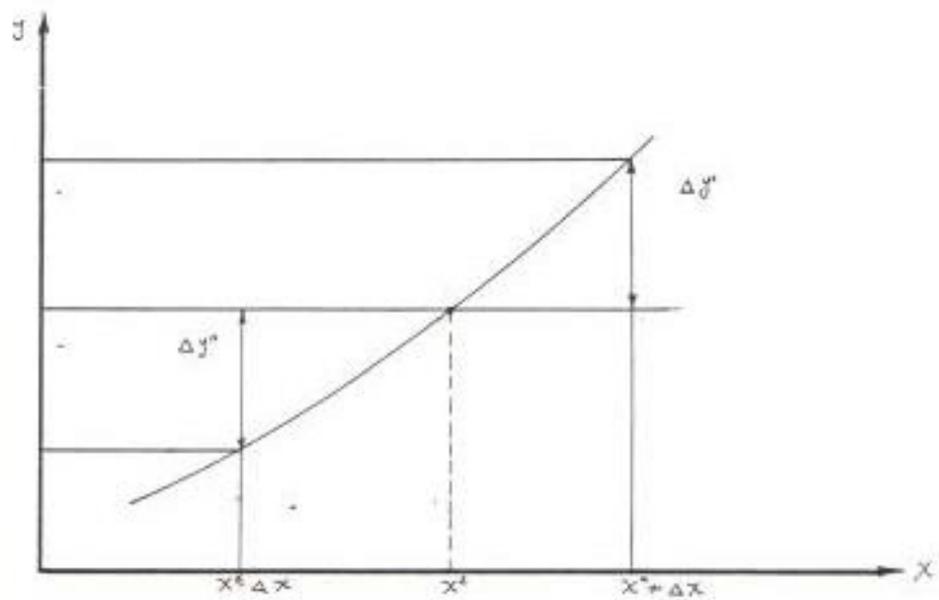


FIGURA N^o 6

VARIACION DE LOS CONSUMOS ENTRE LAS UNIDADES QUE ESTAMOS CONSIDERANDO.

la abscisa X^* los correspondientes Δy satisfacen la siguiente relación:

$$\Delta y' > \Delta y''$$

Donde:

$$\Delta y' = f(x^* + \Delta x)$$

$$\Delta y'' = f(x^* - \Delta x)$$

Como se puede claramente ver en la figura 6.

Con un razonamiento análogo se demuestra que el modo más económico operar un grupo que debe producir en la jornada una energía dada E es de asignarle un diagrama de producción constante a potencia $E/24h$, como ya se ha dicho.

Todo cuanto se ha expuesto en esta sección, se describe matemáticamente del siguiente modo:

Sean N unidades termoeléctricas, cada una que

tenga un diagrama de consumo horario del tipo parabólico. Sea P la potencia requerida y que deben generar el conjunto de las N unidades.

Sea X_{mi} , $i \in N$ la potencia de las mínimas técnicas; y,

X_{Mi} , $i \in N$ la potencia máxima, puesto que:

$$\sum_{i=1}^n X_{mi} \leq P \leq \sum_{i=1}^n X_{Mi}$$

Se desea repartir tal potencia P entre todas las N unidades en modo que sea mínimo el consumo global.

Se tendrá entonces:

$$\sum_{i=1}^N X_i = P$$

{

$$T = \sum_{i=1}^N \gamma_i' = \sum_{i=1}^N (ax_i^2 + b_i x_i + c_i) = \min.$$

De la teoría de los multiplicadores de Lagrange

la condición de mínimo se encuentra imponiendo que:

$$7. \frac{d}{d\lambda_i} \left\{ T + \lambda \left(\sum_{i=1}^N X_i - P \right) \right\} = 0 \quad i \in N$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ T + \lambda \left(\sum_{i=1}^N X_i - P \right) \right\} = 0$$

Las ecuaciones arriba expuestas resultan ser un sistema de $N + 1$ ecuaciones lineales con $N + 1$ incógnitas (los valores de las Nx_i y el valor del multiplicador λ .)

Se puede fácilmente ver que para las primeras N ecuaciones del sistema se obtiene siempre:

$$2a_i x_i + b_i + \lambda = 0 \quad i \in N$$

o bien:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_i} = 2a_i x_i + b_i = -\lambda \quad i \in N$$

Lo que significa afirmar que todas las N unidades

deben funcionar a iguales consumos incrementales (costos incrementales) .

El valor de λ vendrá determinado con la ayuda de la última ecuación del sistema.

CAPITULO II

RESOLUCION MATEMATICA DEL PROBLEMA

2.1. APROXIMACION A LA SOLUCION

2.1.1. Generalidades

El problema como se lo ha formulado resulta de ardua resolución ya sea por las dimensiones (n deberá ser por lo menos 24 con $T = 1$ hora, m puede valer hasta 100) sea por el hecho de - que la mayor parte de las condiciones son del tipo desigualdades (de las cuales la mitad es explícita sobre la variable X_j y la otra mitad es del tipo integral), si se agrega que en el caso de centrales" en cascada", en las que los aportes f_{ij} resulten la suma de los aportes - naturales conocidos, con las corrientes de las centrales aguas arriba que inicialmente son - desconocidas y que deben considerarse con el

correspondiente retraso de tiempo; esto es d_{ij} y D_{ij} son grandes incógnitas, porque la formulación explícita del problema resulta en realidad ahora más compleja.

Para simplificar el cálculo se puede aceptar un procedimiento aproximado, consistente en lo que sigue:

Se determina el diagrama de la primera central con las condiciones:

$$8. \quad T \sum_1^n j x_j = e \quad j = 1, \dots, n$$

$$9. \quad y \leq x_{ij} \leq Y \quad j = 1, \dots, n$$

$$10. \quad d_j \leq T \sum_1^j h x_h \leq D_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$11. \quad Z = \sum_1^n (r_j - x_j)^2 = \min.$$

Donde los símbolos tienen un significado obvio. Se calcula un nuevo diagrama r_j^1 sustrayendo al original el diagrama X_j recién terminado, y se reescriben 8, 9, 10 y 11 para la segunda central y con estas un nuevo diagrama, sustrayendo cada vez a $r_j^{(i)}$ el diagrama de producción de la central precedente de tal manera que después de la m -ésima elaboración el diagrama $r_j^{(m)}$ resulta aquel que debe ser cubierto por la producción termoeléctrica.

En el caso de que haya centrales en "cascada" deben ser consideradas primero desde el monte hasta el valle o sea de aguas arribas hacia el valle, de modo que para las últimas centrales resultarán determinados también los aportes f_j (y con ellos d_{ij} y D_{ij}).

Lo que se desea es pasar de un único problema de m ecuaciones y $4nm$ inecuaciones a m problemas de una ecuación y $4n$ inecuaciones cada uno.

Para la solución del sistema 8, 9, 10 y 11 ha

sido adoptado el método que se mostrará posteriormente.

En cuanto a la aproximación consistente en la subdivisión del único problema en m problemas más simples vamos a hacer algunas consideraciones.

2.1.2. Subdivisiones del problema con m soluciones en m problemas con 1 solución.

2.1.2.1. Demostración matemática:

Sean m y n enteras positivas y con $i=1, \dots, m$ y $j=1, \dots, n$: $S_i, c_j, a_{ij}, p_{ij}, q_{ij}$ sean constantes reales.

Se busca la solución, si existe, del siguiente sistema, que tiene por incógnitas las X_{ij} .

$$12. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$13. \quad a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$14. \quad p_{ij} \leq \sum_1^j x_{jh} \leq q_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$15. \quad \gamma = \sum_1^n (c_j - \sum_1^m x_{ij})^2 = \text{mínimo}$$

Puesto que:

$$16. \quad p_{i1} = \max \{a_{i1}, b_{i1}\} \quad i = 1, \dots, m$$

$$17. \quad q_{i1} = \min \{b_{i1}, q_{i1}\} \quad i = 1, \dots, m$$

$$18. \quad p_{ij} = \max \{p_{i,j-1} + a_{ij}, b_{ij}\} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 2, \dots, n \end{array}$$

$$19. \quad q_{ij} = \min \{q_{i,j-1} + b_{ij}, q_{ij}\} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 2, \dots, n \end{array}$$

Las condiciones:

$$20. \quad a_{ij} \leq b_{ij} \quad i = 1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

$$21. \quad P_{ij} \leq Q_{ij} \quad i = 1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

$$P_{ih} \leq S_i \leq Q_{ih} \quad i = 1, \dots, m$$

Son manifiestamente necesarias.

Estas resultan además suficientes porque las condiciones 12, 13 y 14 para un i cualquiera, son evidentemente independientes de las mismas para cada valor diferente de i ; o sea que las condiciones impuestas a la n -pla x_{ij} ($j=1, \dots, n$) son independientes de aquellas impuestas a la n -ple x_{kj} ($k \neq i$)

2.1.2.2. Determinación de las x_{ij} :

Delineamos ahora un procedimiento aproximado de determinación de las x_{ij} .

Vamos a encaminar nuestro problema al caso particular de $m=1$ o sea con una sola solución dis

ponible para obtener γ mínimo. Partimos de $i = 1$ esto es considerando la solución número 1, se pueden determinar los valores x_{1j} ($j=1, \dots, n$) que dan mínima:

$$\sum_{j=1}^n j (c_j - x_{1j})^2$$

resolviendo el sistema 12, 13, 14, 15 con "i" que asume sólo el valor de 1.

Se sustrae la n-pla x_{1j} así determinada de la n-pla c_j , obteniendo

$$c'_j = c_j - x_{1j}$$

Se considera sucesivamente la siguiente central y se determina la n-pla x_{2j} , en modo análogo, imponiendo:

$$\sum_{j=1}^n j (c'_j - x_{2j})^2 = \text{mínimo}$$

Obtenemos $c''_j = c'_j - x_{2j}$, se determina análogamente x_{3j} imponiendo:

$$\sum_{j=1}^n (c''_j - x_{3j})^2 = \text{mínimo}$$

y así de esta forma hasta obtener las m soluciones.

2.1.3. Ventajas del Procedimiento

Algunas consideraciones de tipo cualitativo permiten justificar este modo de proceder, que desde el punto de vista operativo tiene la evidente ventaja de sustituir un único problema con mn incógnitas en m problemas con n incógnitas cada uno.

Permitámonos algunas obvias definiciones:

La n -pla $c_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}$ tiene una sumatoria asignada

Semejante a :

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^n c_j - \sum_{i=1}^m S_i$$

Su desviación cuadrática referido a la media ε/n es semejante a:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (c_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} - \frac{\varepsilon}{n})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_1^n \{ (c_j - \sum_1^m x_{ij})^2 \} - 2 \frac{\epsilon^2}{n} + \{ \frac{\epsilon^2}{n} \}}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma - \frac{\epsilon^2}{n}}{n}}$$

De aquí:

$$\gamma = n \sigma + \frac{\epsilon^2}{n}$$

Las 2 variables γ (varianza) y σ (desviación cuadrática) están en correspondencia biunívoca por lo tanto; tendremos las siguientes definiciones:

$$\sigma \geq 0$$

$$\gamma \geq \frac{\epsilon^2}{n}$$

De lo anteriormente dicho observamos que cada una de las n -pla x_{ij} resulta determinada en modo tal que la n -pla "residual"

$$(c_j - \sum_1^{i-1} x_{kj}) = x_{ij}$$

Tienen varianza y por lo tanto desviación mínimas; en otros términos la n-pla residual, a medida que se elaboren las diversas soluciones, además de tener obviamente suma tendiente al valor final ϵ , resulta poco o más nivelada en torno a su media $-\frac{1}{n} \left\{ \sum_{j=1}^n c_j - \sum_{k=1}^i S_k \right\}$, lo que es compatible con las condiciones a los que estén sujetas las diferentes soluciones.

El procedimiento de elaboración sucesiva de las varias soluciones resulta por lo tanto al menos cualitativamente correcto.

La solución de las que se elaboran primero resultan en general n-uplas x_{ij} "concentradas" pues corresponden a valores mayores de la n-upla c_j , mientras que aquellas elaboradas al último resultan n-uplas de valores más uniformes.

Es, pues, obvio que γ no puede resultar inferior a $\frac{\epsilon}{n}$, al que corresponde $\sigma = 0$ y una n-pla residual $c_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}$ uniforme, esto es de valores todos iguales a $\frac{\epsilon_T}{n}$.

La aplicación posterior dará una idea cualitativa de la aproximación del método.

2.1.4. Orden de elaboración de las centrales

De las consideraciones planteadas en la sección anterior se nos ocurre antes que nada, establecer el orden en el cual deben ser elaboradas las m soluciones. Teóricamente se puede pensar en considerar todas las m centrales lo más ordenadamente posible, escogiendo de tal forma que dé luego el mínimo valor de γ .

En realidad γ resulta prácticamente invariante respecto al orden de elaboración de las soluciones.

Esto puede ser justificado con las siguientes consideraciones de carácter cualitativo.

Puesto que el progresivo nivelamiento de c_j se obtiene luego, cualquiera que sea el orden de elaboración de la resolución, como se ha visto en la sección precedente, la eventual diferencia entre los valores finales de γ puede depender de haber

elaborado primero las centrales que tengan condi
ciones 13 y 14, más restrictivas o viceversa, -
aquellas con condiciones 13 y 14 no tan rigurosas; las
primeras obviamente contribuyen en general a la
reducción de σ en menor medida que las segundas.

Se observa además que en el primer caso (centra-
les de las de restricciones mayores primero) la
reducción de σ vendrá efectuada de las centrales
menos restringidas después de que las precedentes
lo han dejado prácticamente inalterado; en el se
gundo caso, las centrales menos restringidas pro-
veen primero la reducción de σ , y después las
otras dejan prácticamente inalterado el valor así
reducido .

Se puede entrever pues, la posibilidad de que el or
den de elaboración no influye sensiblemente sobre
valores de σ y por lo tanto de γ . Ayudará re
cordar que si al límite, existe una (o más de una)
central no sujeta a las condiciones 13 y 14 la
n-upla final $c_j = \sum_1^m x_{ij}$ resulta obviamente cons
tituida de términos todos iguales a ϵ/n (y por lo
tanto γ alcanza el número absoluto), si tales so

luciones vienen elaboradas al final; esta tomará de hecho cada variación residual, pues no está sujeto a las condiciones.

De todo lo dicho se concluye que existe una cierta libertad en la selección del orden de elaboración; ésta circunstancia puede ser utilizada para satisfacer dentro de ciertos límites otras exigencias que mejoran la solución; aquellas elaboradas primero resultan de hecho en general en n-plas x_{ij} más desuniformes; y en n-uplas más uniformes las elaboradas al último.

El mismo hecho de que γ resulte prácticamente invariante respecto al orden de las resoluciones pueden dejar suponer que éste no sea mucho mayor que el mínimo buscado; sin embargo puesto que el método progresivo de solución propuesto no es riguroso, es útil disponer de un criterio cuantitativo para estimar las aproximaciones.

A tal fin ponemos:

$$S = \sum_{i=1}^m S_i$$

$$x_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$$

$$A_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

$$B_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}$$

$$T_j = \sum_{i=1}^m p_{ij}$$

$$U_j = \sum_{i=1}^m q_{ij}$$

Se observa que el sistema:

$$22. \quad \sum_{j=1}^n x_j = S$$

$$A_j \leq x_j \leq B_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$T_j \leq \sum_{h=1}^j x_h \leq U_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (c_j - x_j)^2 = \text{mínima.}$$

Se deriva del sistema 12, 13, 14, 15, esto tiene por lo tanto las soluciones del sistema 12, 13, 14, 15, más otras eventuales.

Entonces dado γ_0 el valor mínimo de γ que se puede obtener del sistema 12, 13, 14 y 15 y γ_1 , que se obtiene del sistema 22, será:

$$\gamma_1 \leq \gamma_0$$

Si se calcula γ_1 por el método que presentaremos luego, se tiene un valor de referencia para los varios valores de γ que se pueden obtener para el sistema 12, 13, 14, 15.

Se nota que normalmente γ , no será alcanzado por que el sistema 22 no es equivalente al sistema 12, 13, 14 y 15, γ_0 puede a veces ser sensiblemente mayor que γ_1 .

2.2. DETERMINACION DE LAS CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD

2.2.1. Planteamiento de las condiciones

Sean: n un número entero asignado, S y $a_j, b_j,$

c_j , p_j y q_j ($j=1, \dots, n$) las otras constantes reales asignadas

Sean x_j ($j=1, \dots, n$) las incógnitas a determinarse con las condiciones:

$$23. \quad \sum_{j=1}^n x_j = S$$

$$24. \quad a_j \leq x_j \leq b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$25. \quad p_j \leq \sum_{i=1}^j x_i \leq q_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$26. \quad \tau = \sum_{j=1}^n (c_j - x_j)^2 = \text{mínimo}$$

Se quieren determinar las condiciones necesarias y suficientes a fin de que el problema admita soluciones.

Puesto que:

$$S_j = \sum_{i=1}^j x_i \quad (j=1, \dots, n) \quad \text{y} \quad p_0 = q_0 = 0.$$

Comenzamos con observar que debe ser:

$$27. \quad p_i + \sum_{k=i+1}^j a_k \leq S_j \leq q_i + \sum_{k=i+1}^j b_k \quad \begin{array}{l} j=1, \dots, n \\ i=0, \dots, j-1 \end{array}$$

En realidad tenemos:

$$S_j = \sum_{h=1}^i x_h + \sum_{k=i+1}^j x_k \quad i = 1, \dots, j-1$$

y debe obviamente ser:

$$p_i \leq \sum_{h=1}^i x_h \leq q_i$$

$$28. \quad \sum_{k=i+1}^j a_k \leq \sum_{k=i+1}^j x_k \leq \sum_{k=i+1}^j b_k$$

La ecuación 27, para $i = 0$ da la 28

Sea ahora:

$$p_j = \max \{ \max_{i=0, j-1} \{ p_i + \sum_{k=i+1}^j a_k \} ; p_j \}$$

$$j=1, \dots, n$$

$$Q_j = \min \{ \min_{i=0, j-1} \{ q_i + \sum_{k=i+1}^j b_k \} ; q_j \} \quad j=1, \dots, n$$

Resulta que:

$$p_{j+1} = \max \{ \max_{i=0, j} \{ p_i + \sum_{k=i+1}^{j+1} a_k \} ; p_{i+1} \} =$$

$$= \max \{ \max_{i=0, j-1} \{ p_i + \sum_{k=i+1}^j a_k \} + a_{j+1} ; p_j + a_{j+1} ; p_{j+1} \}$$

$$= \max \{ p_j + a_{j+1} ; p_{j+1} \} \quad j = 1, \dots, n-1$$

y en forma análoga:

$$Q_{j+1} = \min \{ Q_j + b_{j+1} ; q_{j+1} \} \quad j = 1, \dots, n-1$$

Resulta por tanto:

$$29. P_1 = \max (a_1 ; p_1)$$

$$30. Q_1 = \min (b_1 , q_1)$$

$$31. P_j = \max (P_{j-1} + a_j ; p_j) \quad j = 2, \dots, n$$

$$32. Q_j = \min (Q_{j-1} + b_j ; q_j) \quad j = 2, \dots, n$$

$$33. P_j \geq P_{j-1} + a_j \quad j = 2, \dots, n$$

$$34. Q_j \leq Q_{j-1} + b_j \quad j = 2, \dots, n$$

Las ecuaciones 29, 30, 31 y 32 permiten un cálculo rápido de P_j y Q_j . Se nota que de 29 y 33 sigue:

$$35. P_j \geq \sum_{i=1}^j a_i \quad j = 1, \dots, n$$

y de la 30 y 34

$$36. Q_j \leq \sum_{i=1}^j b_i \quad j = 1, \dots, n$$

Ahora podemos por lo tanto establecer, de 24,25 y 26 las siguientes condiciones necesarias.

$$37. a_j \leq b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$38. P_j \leq Q_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$39. P_n \leq S \leq Q_n$$

De las cuales la 37 es obvia, mientras que la 38 comprende los $p_j \leq q_j$ con $j = 1, \dots, n$ (que sigue inmediatamente de las 29,30,31 y 32 y la ecuación 39 comprende las:

$$\sum_{j=1}^n a_j \leq S \leq \sum_{j=1}^n b_j,$$

que sigue de las ecuaciones 35 y 36 para $j=n$ y de la 39 mismo.

Demostremos ahora que la 37, 38 y 39 son también suficientes. Comenzamos con observar que la 15 y 17 garantizan la existencia de una solución

x_j^* ($j=1, \dots, n$) a partir de la 23 y 24 como es obvio constatar.

Si las x_j^* verifican también la 25 ésta constituye obviamente una solución del problema.

En caso contrario observamos que de las condiciones necesarias ya establecidas y de la 23 sigue que debe ser:

$$40 \quad x_n + S_{n-1} = S$$

$$P_{n-1} \leq S_{n-1} \leq Q_{n-1}$$

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

Donde x_n y S_{n-1} son incógnitas y las otras magnitudes conocidas.

La primera del sistema de ecuaciones 40 es del tipo 23, las otras dos del tipo 24; deberá por tanto ser: $P_{n-1} \leq Q_{n-1}$ y $a_n \leq b_n$, y esto resulta inmediatamente de las 37 y 38; además deberá ser $P_{n-1} + a_n \leq S \leq Q_{n-1} + b_n$

Y esto sigue de la 39 y de la 33 y 34 aplicadas para $j=n$.

El sistema Φ es por tanto compatible y el par (x_n, S_{n-1}) podrá ser escogido, en general, en infinitos modos. Escogiendo un par, esto es fijando x_n y S_{n-1} , las condiciones desarrolladas se pueden repetir idénticamente a S, S_{n-1}, x_n y ordenadamente $S_{n-1}, S_{n-2}, x_{n-1}$.

El procedimiento puede repetirse con $S_{n-2}, S_{n-3}, S_{n-3}, x_{n-2}$ y así de esa forma; las 37, 38 y 39 aseguran la existencia de (por lo menos) una n -upla x_j que verifican las 23, 24, y 25; esas son por lo tanto también condiciones suficientes.

2.2.2. Análisis de las condiciones

Como ya establecimos antes de resolver el sistema 8, 9, 10 y 11 de la sección 2.1.1 debe controlarse que se verifiquen las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones.

Tales condiciones, usando la simbología de la sección 2.1.1., son:

$$41. \quad w_j \leq W_j \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$42. \quad w_h \leq e \leq W_n$$

Donde:

$$43. \quad w_1 = \max (yT; d_1)$$

$$44. \quad W_1 = \min (YT; D_1)$$

$$45. \quad w_j = \max (w_{j-1} + yT, d_j) \quad j = 2, \dots, n$$

$$46. \quad W_j = \min (w_{j-1} + YT; D_j) \quad j = 2, \dots, n$$

Recordemos además que tener $T \sum_1^j x_h = W_j$ significa $v_j = v$, esto es reservorio al mínimo al final del intervalo de tiempo j , y que $T \sum_1^j x_h = w_x$ significa $v_j = V$, esto es reservorio con embalse lleno.

Para explicar el significado de las ecuaciones 41 y 42 se observa que w_j resulta ser el valor mínimo producible de energía durante los primeros j intervalos de tiempo y que debe respetar simultáneamente la mínima potencia " y " disponible y el máximo embalse V admisible; similarmente W_j resulta ser el valor máximo de energía que puede ser producido durante los primeros j intervalos de tiempo respetando simultáneamente la máxima potencia Y disponible y el mínimo embalse v admisible.

Vamos a desarrollar más detalladamente algunas consideraciones sobre controles de compatibilidad en el caso examinado, ilustrando como puede ser calculado preliminarmente los eventuales inevitables secamientos.

Así tendremos:

$$S = e/T$$

$$a_j = y \quad j = 1, \dots, n$$

$$b_j = Y \quad j = 1, \dots, n$$

$$p_j = d_j/T \quad j = 1, \dots, n$$

$$q_j = D_j/T \quad j = 1, \dots, n$$

Puesto que será obviamente $v \leq Y$ (potencia mínima menor o igual que la máxima) la ecuación 15 se cumple.

Es también $p_j \leq q_j$. esto es $d_j \leq D_j$ (lo contrario sería el embalse al mínimo mayor que el máximo).

Si la ecuación 38 se cumple, sería k el mínimo i por el cual es $P_i > Q_i$.

Si $k = 1$, puesto que es $a_1 \leq b_1$ y $p_1 \leq q_1$ puede ser $P_1 > Q_1$ en 2 casos.

2.2.2.1. $a_1 > q_1$ esto es $y T > v_0 + f_1 - v$; también entregando la potencia mínima no es posible evitar el secamiento del embalse al final del primer intervalo de tiempo; el problema no tiene solución.

2.2.2.2. $p_1 > b_1$ esto es $v_0 + f_1 - V > YT$; también entregando la potencia máxima no es posible evitar el rebosamiento (igual a : $S_1 = v_0 + f_1 - V - YT$) al final del primer intervalo de tiempo.

En tal caso se admitirá el rebosamiento inevitable S_1 . El aporte útil resultará:

$$f_1 - S_1 = V - v_0 + YT .$$

Se calculan nuevamente con este valor de aporte en el intervalo 1 todos los d_j y D_j (esto es p_j y q_j , $j = 1, \dots, n$).

Si $k > 1$; puesto que es $a_k \leq b_k$, $p_k \leq q_k$ y $p_{k-1} < q_{k-1}$ puede ser $p_k > q_k$ en 2 casos.

2.2.2.3. $p_{k-1} + a_k > q_k$ esto es $w_{k-1} + yT > v_0 + \sum_1^k f_h - v$.

la mínima energía producible en los primeros k intervalos (w_{k-1} , en los primeros $k-1$, yT en k -ésimo) es superior a la disponibilidad inicial

$v_0 = v$ mas los aportes de los primeros k intervalos, el problema no tiene solución.

2.2.2.4. $p_k > Q_{k-1} + b_k$ esto es $v_0 + \sum_1^k h f_h - V >$

$$W_{k-1} + YT$$

La máxima energía producible en los primeros k intervalos (W_{k-1} en los primeros $k-1$, YT en k -ésimo) es inferior a la diferencia entre los aportes de los primeros k intervalos y el margen del embalse $V-v_0$. Se tiene un rebosamiento inevitable $S_k = \sum_1^k h f_h - (V-v_0) - (W_{k-1} + YT)$.

Se pueden admitir S_k y el aporte útil resultará $f_k - S_k$; se recalculan con este nuevo valor de aporte en el intervalo k -ésimo las d_j y D_j (esto es p_j y q_j) con $j = k, \dots, n$.

Los eventuales inevitables rebosamientos pueden así ser calculados preliminarmente.

Si es $P_n \leq Q_n$ pero S no respeta la ecuación 39, se podrá modificar S poniéndolo igual a aquel de los 2 valores: P_n o Q_n que le es más próximo; la energía producida por la central resultará por tanto modificada.

2.3. RELACION ENTRE LA FUNCION COSTO Y LA FUNCION VARIANZA

2.3.1. Propiedad de monotonía de la función varianza de las variables x_j sujetas a la condición $\sum_{i=1}^n x_i =$ constante.

Esta relación a demostrar encuentra su aplicación en la optimización de la utilización de los grupos termoeléctricos, interpretando la función costo (c_k) como costo por unidad de tiempo del grupo k -ésimo en función de la potencia instantánea entregada y en la hipótesis supuesta de que en la jornada no se tienen arranques o paradas de grupos.

Pero antes de encontrar la relación entre la fun

ción costo y la función varianza, vamos a establecer la propiedad de monotonía de la función

$$\sum_{i=1}^n x_i^2$$

(varianza) de las variables reales x_j sujetas a la condición

$$\sum_{i=1}^n x_i = \text{constante.}$$

Sea $x_i, i=1, \dots, n$ una n-pla de variables reales sujetas a la condición:

$$47. \sum_{i=1}^n x_i = x$$

Siendo x una constante asignada

Sea $x_i + \Delta x_i$ otra n-pla que verifica la condición (47) con Δx_i no todas nulas.

Sea además y_i la n-pla x_i reordenada en sentido no creciente, y $y_i + \Delta y_i$ la $x_i + \Delta x_i$ reordenada igualmente en sentido no creciente.

$$48. y_i \geq y_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$49. y_i + \Delta y_i \geq y_{i+1} + \Delta y_{i+1}$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

Resulta:

$$50. \Delta y_i > 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$51. \Delta y_i \leq 0 \quad i = m+1, \dots, n$$

$$(1 \leq m \leq n-1)$$

Se desea demostrar que:

$$52. \sum_{i=1}^n x_i^2 < \sum_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i)^2$$

y que es posible pasar la n -pla y_i (y por lo tanto x_i , si no interesa el orden) a la n -pla $y_i + \Delta y_i$ (y por tanto $x_i + \Delta x_i$) mediante un número finito de n -plas intermedias cada una de las cuales respeta la condición 47 ., tiene varianza mayor que

las precedentes y se obtiene de la precedente mo
dificando, en cantidades iguales pero de signo -
opuesto, sólo 2 valores de la n-pla precedente.

Se conoce mientras tanto que obviamente

$$53. \quad \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0$$

$$54. \quad \sum_{i=1}^n \Delta y_i = 0$$

La n-pla Δy_i , puede no coincidir con alguna per-
mutación de la Δx_i y no resultar ordenada en sen
tido decreciente.

Se nota además que debiendo cumplirse la ecuación
54, al menos de las 51, resultará una desigualdad
estrecha y será además por lo menos una de las 49.

Demostraremos primero la 52, o lo que es equivalente:

$$55. \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 < \sum_{i=1}^n (y_i + \Delta y_i)^2$$

En efecto:

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i) = \sum_{i=1}^m \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i) + \sum_{i=m+1}^n \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i)$$

Por otro lado, de la 48 y la 49 sigue:

$$2y_i + \Delta y_i \geq 2y_{i+1} + \Delta y_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1$$

y al menos una de estas desigualdades es estrecha:

De allí, puesto que:

$$a = \sum_{i=1}^m \Delta y_i = - \sum_{i=m+1}^n \Delta y_i > 0$$

Se tiene:

$$\sum_{i=1}^m \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i) \geq a \min (2y_i + \Delta y_i) = a(2y_m + \Delta y_m)$$

$$\sum_{i=m+1}^n \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i) \geq (-a) \max (2y_i + \Delta y_i) = -a(2y_{m+1} +$$

$$\Delta y_{m+1})$$

y al menos una de estas dos desigualdades es estrecha, o bien es:

$$2y_m + \Delta y_m > 2y_{m+1} + \Delta y_{m+1}$$

Resulta por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i) \geq a \{(2y_m + \Delta y_m) - (2y_{m+1} + \Delta y_{m+1})\} \geq 0$$

De allí en cada caso:

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i (2y_i + \Delta y_i) > 0$$

De las cuales sigue inmediatamente la ecuación 55. Demos
traremos ahora la segunda parte del enunciado; para tal
fin será suficiente indicar un modo de determinar las n -
plas sucesivas a varianzas crecientes.

Sea ahora Δy_k el mínimo de los Δy_i positivos y Δy_h el
máximo de las Δy_i negativas, sea $\delta > 0$ el menor entre Δy_k

$y - \Delta y_h$. No puede ser $\delta = 0$, puesto que en tal caso todos los Δy_i , y por lo tanto todos los Δx_i , serian nulos.

Se considera la n-pla.

$$56. y_1, \dots, y_{k-1}, y_k + \delta, y_{k+1}, \dots, y_{h-1}, y_h - \delta, y_{h+1}, \dots, y_n$$

que respeta la 47 y la varianza.

$$57. 2\delta(y_x - y_n + \delta) + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Esta última es mayor de $\sum_{i=1}^n y_i^2$ porque $y_k - y_h + \delta > 0$;

en efecto puesto que $\Delta y_k > 0$ y $\Delta y_h < 0$, para la 48, 50 y 51, resulta $y_k \geq y_h$.

La varianza 57 es por otro lado menor o igual a:

$\sum_{i=1}^n (y_i + \Delta y_i)^2$ porque la n-pla 56 y la n-pla $y_i + \Delta y_i$, respetan todavía evidentemente la 48, 49, 50 y 51. Estas

por lo tanto respetan todas las relaciones de las n-plas y_i y $y_i + \Delta y_i$ (a menos que obviamente coincidan) para lo cual a ellas puede reaplicarse el procedimiento hace poco, descrito. Puesto que además la 56 tiene por lo menos un elemento en más (respecto a la y_i) igual a la $y_i + \Delta y_i$ es evidente que con al menos (n-1) iteraciones se llegue a la n-pla $y_i + \Delta y_i$, como se quería demostrar.

2.3.2. Relaciones entre las funciones convexas y la varianza creciente de la variable.

Sean $c_k(\eta)$ ($k=1, \dots, m$) las funciones de la variable real independiente η , dotada de primera derivada y segunda derivada continua, definida en (η_{k1}, η_{k2}) y con:

$$58. \lim_{\eta \rightarrow \eta_{k1}} c_k(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \eta_{k2}} c_k(\eta) = +\infty$$

$$59. \lim_{\eta \rightarrow \eta_{k1}} c'_k(\eta) = -\infty$$

$$60. \lim_{\eta \rightarrow \eta_{k2}} c'_k(\eta) = +\infty$$

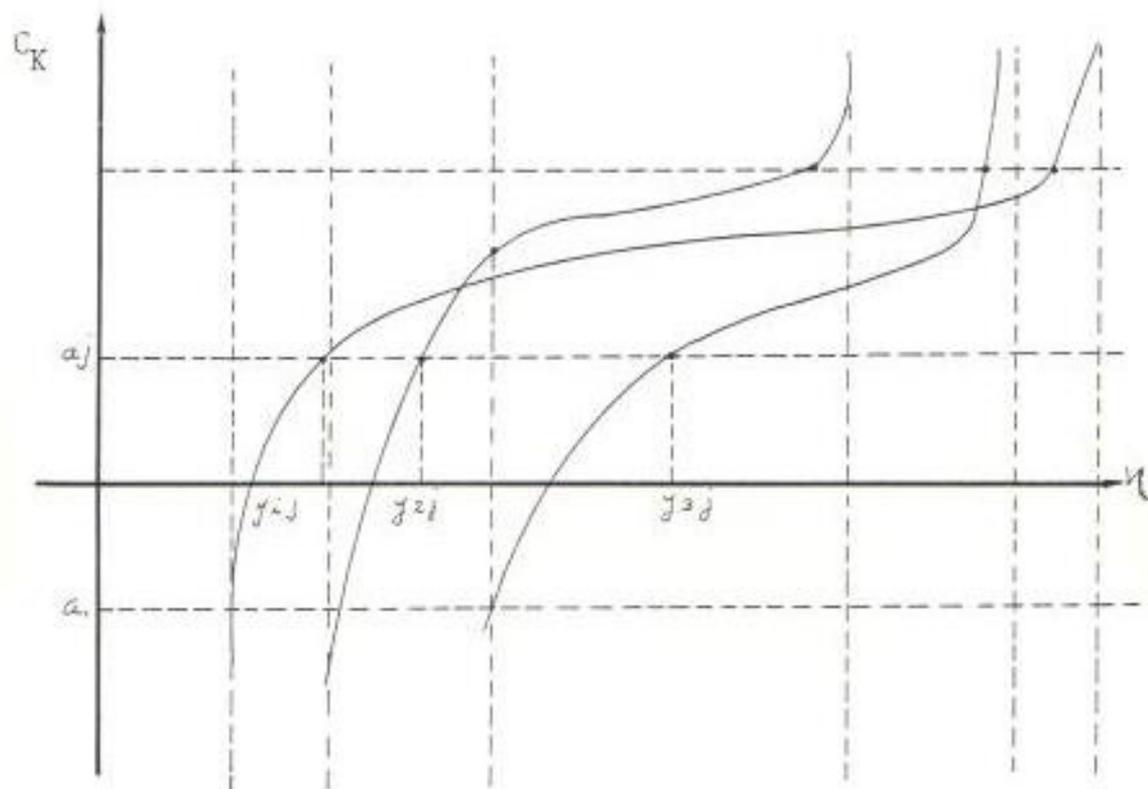


FIGURA N° 7

EJEMPLO DE FUNCIONES c'_1 , c'_2 , c'_3 QUE VERIFICAN LAS ECUACIONES 59, 60 y 61.

$$61. \quad c''_k(\eta) > 0$$

La 61 indica en particular que $c'_k(\eta)$ es creciente en (η_{k1}, η_{k2}) y que $c_k(\eta)$ es convexa; de la 59 y 60 sigue que $c'_k(\eta)$ asume además todos los valores reales.

Sean pues $y_{kj} (k=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$ de los valores de η tales que:

$$62. \quad \eta_{k1} < y_{kj} < \eta_{k2}$$

$$63. \quad c'_k(y_{kj}) = \alpha_j$$

$$64. \quad \sum_k^m \sum_j^n y_{kj} = Y$$

Donde Y es una constante asignada con las obvias condiciones

$$65. \quad n \sum_k^m \eta_{k1} < Y < n \sum_k^m \eta_{k2}$$

y la α_j son de las incógnitas auxiliares.

Es inmediato constatar que, estando las 59, 60 y 65, existe al menos una serie de m n valores y_{kj} que verifican la 62, 63 y 64; en efecto, puesto que:

$$66. \quad \beta_j = \sum_{k=1}^m y_{kj},$$

β_j resulta función continua creciente de α_j y es para cada j :

$$67. \quad \sum_{k=1}^m \eta_{k1} < \beta_j < \sum_{k=1}^m \eta_{k2};$$

Si entonces es; con $n_1 + n_2 = n$

$$n_1 \sum_{k=1}^m \eta_{k1} + n_2 \sum_{k=1}^m \eta_{k2} < Y < (n_1 - 1) \sum_{k=1}^m \eta_{k+1} +$$

$$(n_2 + 1) \sum_{k=1}^m \eta_{k2}$$

Será suficiente asignar a $n_1 - 1$ de las α_j un valor negativo arbitrario (magnitud en valor absoluto

luto), a otros n_2 un valor positivo arbitrario (magnitud) y al restante el valor oportuno para verificar la 64.

Está entonces claro que existen en general infinitas n -plas α_j y por lo tanto infinitas series de $m \times n$ valores de y_{kj} que verifican la 62, 63, 64.

Con esto sentado definiremos ahora:

$$68. \quad c = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n c_k (y_{kj})$$

$$69. \quad S = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m y_{kj} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \beta_j^2$$

y sea $y_{kj} + \Delta y_{kj}$ una nueva serie de $m \times n$ valores de n que verifican la 62, 63 y 64.

Correspondientemente es:

$$\beta_j + \Delta \beta_j = \sum_{k=1}^m (y_{kj} + \Delta y_{kj})$$

y resulta

$$\sum_{j=1}^n \Delta \beta_j = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta y_{kj} = 0$$

Dados γ_j y $\gamma_j + \Delta \gamma_j$, respectivamente las n -plas β_j y $\beta_j + \Delta \beta_j$ reordenadas en sentido no creciente resultan además:

$$71. \Delta \gamma_j > 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n_0$$

$$72. \Delta \gamma_j \leq 0 \quad \text{para } j = n_0 + 1, \dots, n$$

$$(1 \leq n_0 \leq n - 1)$$

Se desea demostrar que si las y_{kj} varían respetando las 63, 64, 71 y 72, la función c definida de las 68 es función creciente de la función S definida en la 69.

En efecto, de la 68 resulta que:

$$73. dS = \sum_{j=1}^n \{ 2 \left(\sum_{k=1}^m \Delta y_{kj} \right) \left(\sum_{h=1}^m y_{hj} \right) \} -$$

$$2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^m y_{kj} \Delta y_{hj}$$

Suponemos ahora que:

$\Delta y_{rt} = -\Delta y_{pq} = \delta > 0$ (con $t \neq q$; no puede ser $t = q$
a causa de la 63 y $\Delta y_{kj}=0$ para las demás k y j (de
allí $\Delta \beta_t = -\Delta \beta_q = \delta$; $\Delta \beta_j=0$ para cualquier otro j)

De la 73 se obtiene ahora:

$$ds = 2\delta \left\{ \sum_1^m y_{kt} - \sum_1^m y_{kq} \right\} = 2\delta (\beta_t - \beta_q)$$

y diferenciando la 68.

$$dc = \sum_1^m \sum_1^n c'_k(y_{kj}) \Delta y_{kj} = \delta \{ c'_r(y_{rt}) - c'_p(y_{pq}) \} =$$

$$\delta(\alpha_t - \alpha_q)$$

Donde:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_t - \alpha_q}{\beta_t - \beta_q} > 0$$

Siendo β_j función creciente de α_j

Puesto que por otra parte para la propiedad mostrada en la sección precedente se puede pasar de la n-pla β_j a la genérica $\beta_j + \Delta\beta_j$ (teniendo $dS > 0$ y $\sum_j \Delta\beta_j = 0$) mediante un número finito de n-plas intermedias teniendo todas $dS > 0$, $\Delta\beta_t = -\Delta\beta_q > 0$ y $\Delta\beta_j = 0$ para cada uno de las otras j la propiedad resulta entonces completamente demostrada.

Se conoce que en ausencia de la condición 71 y 72, la propiedad en general no subsiste.

Sea por ejemplo:

$$\beta_1 = \gamma_1 = 33$$

$$\beta_j = \gamma_j = 9 \quad j = 2, \dots, 24$$

$$\beta_j + \Delta\beta_j = \gamma_j + \Delta\gamma_j = 15 \quad j = 1, \dots, 12$$

$$\beta_j + \Delta\beta_j = \gamma_j + \Delta\gamma_j = 5 \quad j = 13, \dots, 24$$

La 70 se verifica:

$$\sum_{j=1}^{24} \beta_j = \sum_{j=1}^{24} (\beta_j + \Delta\beta_j) = 240$$

Mientras se tiene:

$$\Delta\gamma_1 = -18$$

$$\Delta\gamma_j = +6 \quad j = 2, \dots, 12$$

$$\Delta\gamma_j = -4 \quad j = 13, \dots, 24$$

Por lo tanto no se verifican la 25 y la 26

Se tiene entonces:

$$\sum_{j=1}^{24} \beta_j^2 = 2952$$

$$\sum_{j=1}^{24} (\beta_j + \Delta\beta_j)^2 = 3000$$

Esto es $dS > 0$, pero es fácil constatar que puede ser $dc < 0$, así mismo respetando la c_k las condiciones re queridas 58, 59, 60 y 61.

Un ejemplo con la c_k todas iguales es:

$$c_k(5) = 1$$

$$c_k(9) = 2$$

$$c_k(+15) = 4$$

$$c_k(33) = 20$$

$k=1, \dots, m$ se tiene

$$c = m (1 \times 20 + 23 \times 2) = 66 \text{ m}$$

$$c + dc = m (12 \times 4 + 12 \times 1) = 60 \text{ m} < c$$

Se nota que para las dos n-plas β_j y $\beta_j + \Delta\beta_j$ ahora -
consideradas no se tiene éxito o no se alcanza la se-
cuencia de n-plas intermedias consideradas en la sección
anterior.

METODO DE SOLUCION

3.1. SOLUCION MEDIANTE PROGRAMACION DINAMICA

Dado n , entero positivo, S , a_j , b_j , p_j , q_j , c_j ($j=1, \dots, n$) reales que verifican las condiciones (necesarias y suficientes) presentadas en la seccion 2.2., se debe determinar x_j ($j=1, \dots, n$) de modo que:

$$74. \sum_{j=1}^n x_j = S$$

$$75. a_j \leq x_j \leq b_j \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$76. p_j \leq \sum_{i=1}^j x_i \leq q_j$$

$$77. t = \sum_{j=1}^n (c_j - x_j)^2 = \min$$

El método de solución adoptado utiliza sustancialmente la programación dinámica. Vamos a exponer el procedimiento:

Despreciando la ecuación 76, el problema tiene la solución gráfica ilustrada en la figura 8.

En cada curva los trazos de recta no paralelos al eje de las λ tienen ecuación $\lambda = 2(x_j - c_j)$. La solución óptima se obtiene realizando S con los valores de x_j correspondientes a un mismo valor de $\lambda = \lambda_s$.

Pasando al examen del problema que comprende las condiciones 76, se consideran las dos primeras curvas, $x_1(\lambda)$ y $x_2(\lambda)$.

La primera es posteriormente limitada por p_1 y q_1 (lo que equivale a a_1 y b_1 , de la figura 8).

La mejor repartición de una suma asignada $S_2 = x_1 + x_2$, se obtiene como en la figura 8, con tal que S_2 respete las condiciones P_2 y Q_2 . (refiérase al capítulo anterior). Si ahora componemos una curva sumando los valores de x_1 y x_2 para un mismo valor de λ . Ver figura 9.

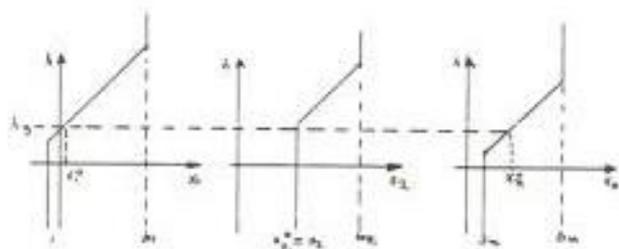


FIGURA N°8
EJEMPLO DE PROGRAMACION DINAMICA

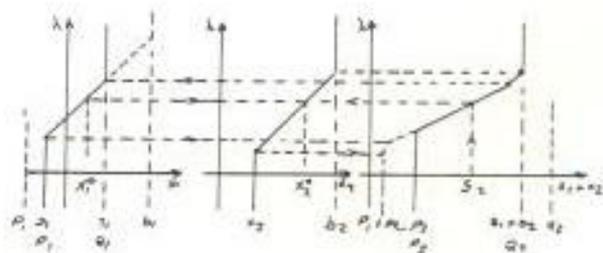


FIGURA N° 9
SUMA DE LAS CURVAS N° x_1 y N° x_2

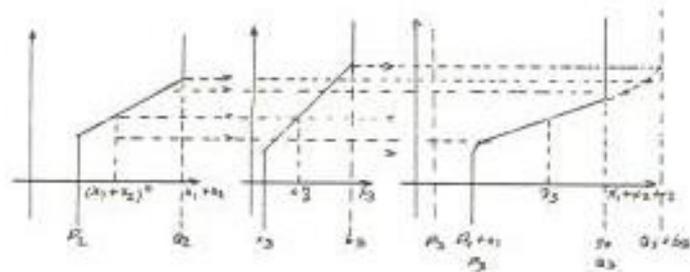


FIGURA N° 10
 SUMA DE LAS CURVAS $(x_1 + x_2) + x_3$

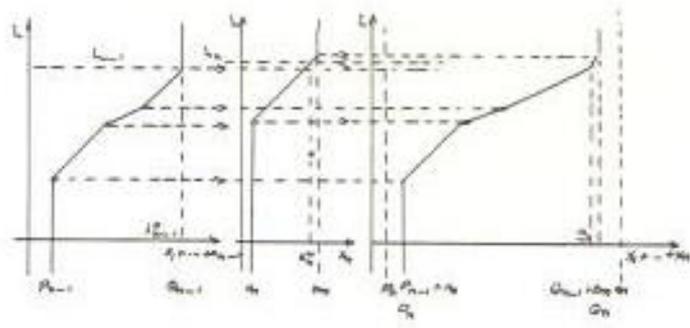


FIGURA N° 11
 SUMA DE LAS CURVAS $(x_1 + \dots + x_{n-1}) + x_n$

La curva suma resultará en general, posteriormente limitada por p_2 y q_2 y cualquiera que sea $S_2 (\geq P_2 \text{ y } \leq Q_2)$ de la figura 9 se establece unívocamente la repartición óptima de x_1^0 y x_2^0 .

Conocida la curva $(x_1 + x_2)$ se compone de curva $(x_1 + x_2 + x_3)$ sumando los valores de $(x_1 + x_2)$ con los de x_3 a igual valor de λ . Ver figura 10.

La curva $(x_1 + x_2 + x_3)$ resultará en general posteriormente limitada (en la figura 10 está apuntado $q_3 < Q_2 + b_3$) y de ésta, para cualquier valor de $S_3 = x_1 + x_2 + x_3$ comprendida entre Q_3 y P_3 . Se obtiene la repartición óptima entre x_3 y $x_1 + x_2$.

Volviendo a la figura 9, sobre la curva $x_1 + x_2$ con el valor de $S_2 = (x_1 + x_2)^0$ determinado en la figura 10 se determina x_1^0 y x_2^0 .

Es ahora evidente que se procederá construyendo sucesivamente la curva $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, etc., hasta $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Sobre ésta última se determina el λ correspondiente a

la S asignada, sea esta λ_n ; con λ_n se determinan S_{n-1}^o y x_n^o sobre las curvas $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ y x_n , respectivamente. Figura N° 11.

Se vuelve a entrar sobre $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ con S_{n-1}^o y se determina el correspondiente λ_{n-1} . Si S_{n-1}^o , corresponde a un trazo vertical de la $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$. Se asumirá para λ_{n-1} un valor cualquiera correspondiente a tal trazo; es de hecho evidente que variando λ_{n-1} entre tales límites no varían x_{n-1}^o ni S_{n-2} .

Con tal λ_{n-1} se determinan S_{n-2}^o y x_{n-1}^o sobre las curvas $x_1 + \dots + x_{n-2}$ y x_{n-1} que ya están construídas.

Procediendo de este modo podremos determinar todas las x_j^o .

3.2. CONSIDERACIONES DEL METODO

3.2.1. Orden de elaboración de las centrales

El método de resolución por elaboración progresiva de cada central permite que las centrales ela

boradas primero presentan un diagrama de producción "concentrado" bajo las puntas, mientras - que los siguientes, a medida que el diagrama residuo $r_j^{(i)}$ viene a ser más nivelado presentan un diagrama de producción más distribuído a lo largo del día.

Por otro lado, como ya demostramos el diagrama de producción termoeléctrico es prácticamente invariante respecto al orden de elaboración de las centrales hidroeléctricas.

Estas dos propiedades permiten escoger el orden de elaboración de las centrales mismas, también en relación a otras exigencias del servicio (mantener la tensión, repartición de los grupos a destinar para reserva rodante, problemas de seguridad local, etc.).

Uno de los criterios que en base a los ejemplos de aplicación se ha revelado aceptable es aquel de escoger la central en base al orden creciente de las respectivas horas de utilización de la potencia disponible. De tal modo que las - centrales a menor número de horas de utilización

efectuarán una producción concentrada y las -
otras, una producción distribuída; resultarán
además automáticamente limitadas al mínimo -
los eventuales resecamientos.

Se puede además dejar para programar al último
los grupos de centrales que, teniendo elevada
potencia disponible y apropiado margen de em
balse, con las centrales oportunamente distri
buídas geográficamente, resultarán con diagra
mas de funcionamiento más distribuídas a lo
largo del día, y que podrán por tanto, asumir
ventajosamente cargas de regulación y de re
serva rodante.

3.2.2. Limitación de transmisión de potencia

Es importante limitar la transmisión de poten
cia a través de algunas secciones de la red.

Cuando nosotros elaboramos una central consi-
deramos la potencia que debe generar para una
zona. Si las secciones críticas son como a me

nudo sucede en la práctica, entre áreas de red acopladas con otras en "antenas" o malladas, en modo tal que la línea cortada de cada sección llevan, dado el ejercicio mallado, flujos de potencia en otros sentidos, será suficiente poner los límites de transporte global a través de aquellas secciones antes que el transporte sobre las líneas solas (ésta segunda alternativa requeriría necesariamente el uso de flujo de carga).

En tal sentido una limitación preventiva de los transportes podría efectuarse haciendo que las centrales hidroeléctricas de cada área, nivelen el diagrama r_j de la propia área, es obvio sin embargo que de ese modo, el diagrama térmico en conjunto de la red resultará menos nivelado.

3.2.3. Consideraciones de pérdidas de transmisión

El método ilustrado no toma en cuenta las pérdidas de transporte de la red eléctrica. Se observa sin embargo, que si la producción hidroeléc-

trica está geográficamente distribuída con una cierta uniformidad, los diagramas de producciones hidroeléctricas de cierta área, determinados con el método propuesto, resultarán no muy diferentes a los diagramas de carga de la misma área; el diagrama termoeléctrico resultará - además, como se ha dicho, nivelado a lo largo - del día.

Estas circunstancias hacen que en definitiva las transferencias de energía de un área a otra tengan una potencia casi constante durante el día, lo que corresponde a una condición favorable - considerando las pérdidas de transmisión.

La limitación de la transmisión, la misma que se ha indicado en la sección 3.2.2, constituyen obviamente un control indirecto sobre las pérdidas. Una vez determinados los diagramas de producción de las centrales hidroeléctricas y por lo tanto el diagrama $r_j^{(m)}$ térmico, se aplicará en seguida una suboptimización para la selección y repartición de la carga entre los grupos termo

eléctricos, en la cual se puede tener en cuenta también las pérdidas y las condiciones de transporte en modo más detallado.

3.2.4. Consideraciones de rendimiento

Para realizar la condición de optimización:

$$z = \sum_{j=1}^n (r_j - \sum_{k=1}^m x_{kj})^2 = \min$$

Es obviamente oportuno disponer de centrales hidroeléctricas de plena potencia.

Es, además, conocido que la potencia eficiente de una planta no es en general aquella de máximo rendimiento por lo cual se puede dudar que la reducción del costo realizado en las centrales termoeléctricas gracias a la condición

mostrada anteriormente, venga balanceado con el mayor consumo de agua debido a trabajar a plena potencia (antes que, por ejemplo, a potencia de máximo rendimiento) de las plantas hidroeléctricas.

En realidad el ahorro de agua sería más bien limitado, de hecho no siempre es posible operar sólo a la potencia de máximo rendimiento, sea porque ésta podría resultar insuficiente para producir la energía requerida, o sea porque podría no resultar respetadas las condiciones de embalse. Además, como es conocido, en las centrales equipadas con más de un grupo (esto es - en casi la totalidad de los casos) el máximo rendimiento se puede alcanzar con el funcionamiento de un sólo grupo esto podría dividir a la mitad o reducir aún más la potencia eficiente.

Otras consideraciones que se deben hacer son la presencia de centrales que poseen centrales de bombeo, y en tal caso se debe tener en cuenta - los diversos rendimientos en producción y bombeo.

beo; además se debe programar el bombeo tomando en cuenta las especificaciones de oportunas optimizaciones.

CAPITULO IV

APLICACION AL SISTEMA NACIONAL DE INTERCONECTADO

4.1. DESCRIPCION DEL SISTEMA

4.1.1. Generalidades

El sector eléctrico del Ecuador está regulado fundamentalmente por la Ley Básica de Electrificación. Esta ley establece que el suministro de energía eléctrica es atribución privativa del Estado que la ejercerá a través - del Ministerio de "Recursos Naturales y Energéticos" y del Instituto Ecuatoriano de Electrificación.

La política del sector eléctrico fijada por el gobierno a través del Ministerio de Recursos Naturales y Energéticos.

4.1.2. Sistema Nacional de Generación y Transmisión

En el período 80-84, se tiene el siguiente compendio de los programas de ejecución de los proyectos de generación del Sistema Nacional - Interconectado.

- Central Térmica Estero Salado N°3-73 MW

La Central Térmica Estero Salado N° 3 de 73 MW, se halla ubicada en la ciudad de Guayaquil, sector El Salitral.

- Central Térmica Esmeraldas, 125 MW

La Central Térmica Esmeraldas, se halla ubicada en el sector de la Propicia, próxima a la ciudad del mismo nombre, provincia de Esmeraldas.

- Central Térmica a Gas Quito, 51 MW.

Esta central servirá principalmente para incrementar la capacidad de generación de la ciudad de Quito y la zona norte del país y tener la reserva necesaria del Sistema. La Central se halla ubicada en el sitio denominado Santa Rosa, al sur de la ciudad de Quito.

- Central Hidroeléctrica Paute, Fase A y B, 500 MW.

La construcción de la primera etapa, fase A y

B, se inició el mes de marzo de 1976 y el Programa de ejecución prevee que la primera unidad de 100 MW, entren a operar en forma sucesiva en el transcurso de 1983, con un total de 500 MW instalados.

- Central Hidroeléctrica "Jaime Roldos Aguilera" (Agoyán).

El proyecto ha sido concebido como parte del aprovechamiento integral de la Cuenca del Rio Pastaza y se halla ubicado en la provincia del Tungurahua.

- Central Hidroeléctrica Paute, Fase C, 500 MW

Aprovechando el volumen acumulado en la presa Amaluza y la regulación del rio Paute, se ha programado ejecutar, paralelamente a las fases A y B, la fase C de este proyecto, el cual generaría una potencia de 500 MW adicion

nales y esté previsto iniciar su operación en 1987.

Los Sistemas de Transmisión son:

- Sistema Quito - Ibarra a 138 KV
- Sistema Quito - Guayaquil a 230 KV
- Sistema Santo Domingo - Esmeraldas a 138 KV
- Sistema Quevedo - Portoviejo a 138 KV
- Sistema Paute, Fase B 2.

Este sistema está formado por las Líneas de Transmisión Paute - Pascuales de 183 Km, doble circuito a 230 KV y Paute. Cuenca a 138 KV - con las respectivas Subestaciones.

4.1.3. Sistemas Regionales

- Programa de Generación

Los proyectos de generación de los Sistemas Regionales, suman 185,6 MW de los cuales 72.5 MW entraron ya en operación hasta fines de 1980, el resto se completará hasta 1983.

- Programa de Subtransmisión

Se ha programado incorporar 1500 Kms. de líneas de subtransmisión hasta fines de 1984.

- Programa de Distribución

El programa prevee la incorporación al servicio eléctrico de alrededor de 283.000 abonados.

4.1.4. Disponibilidad existente de generación

Actualmente se dispone de:

Central Térmica Esmeraldas 125 MW

Central Térmica a Gas Quito 60 MW

Central Térmica a Diesel Quito 87 MW

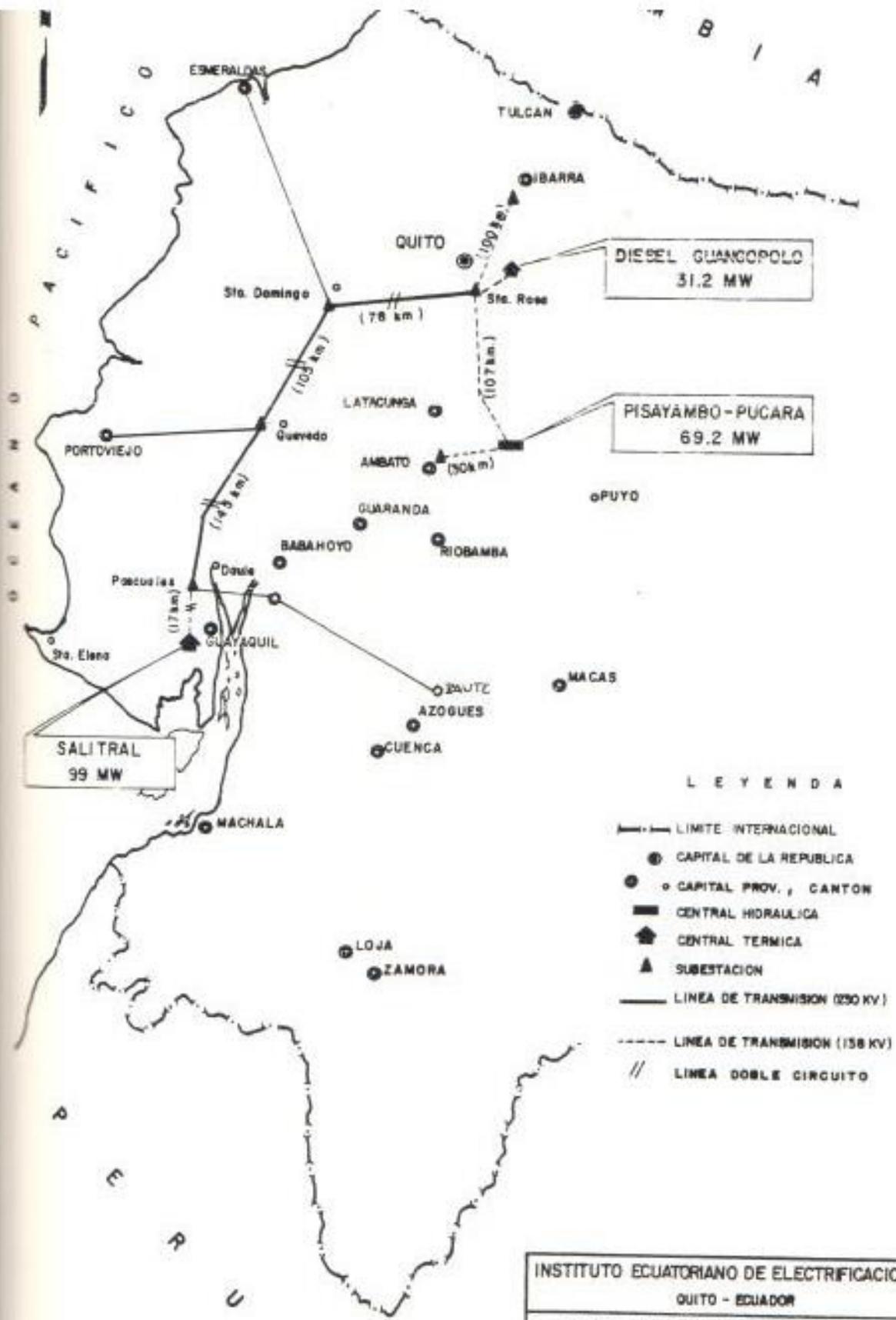
Empresa Eléctrica Quito 87 MW (Hidráulica)

Empresa Eléctrica Quito 98 MW (Térmica)

Central Pisayambo 69.2 MW

Centrales Térmicas Guayaquil 172 MW y 163 MW

Central Paute 500 MW



L E Y E N D A

- — — — LIMITE INTERNACIONAL
- CAPITAL DE LA REPUBLICA
- CAPITAL PROV., CANTON
- CENTRAL HIDRAULICA
- ▲ CENTRAL TERMICA
- ▲ SUBSTACION
- LINEA DE TRANSMISION (230 KV)
- - - - LINEA DE TRANSMISION (158 KV)
- // LINEA DOBLE CIRCUITO

INSTITUTO ECUATORIANO DE ELECTRIFICACION
 QUITO - ECUADOR

PLAN MAESTRO DE CORTO PLAZO
 DISPONIBILIDADES ACTUALES DE
 GENERACION Y TRANSMISION DEL
 S. N. I.

4.2. DATOS DEL SISTEMA (RELACIONADOS CON EL PROBLEMA)

4.2.1. Descripción de las centrales Cumbayá y Nayón

De estas dos centrales hemos podido obtener la siguiente información:

Son centrales que se alimentan del mismo recurso o sea que aguas arriba se encuentra Cumbayá y luego envía su caudal a la Central Nayón.

Por ello la potencia generada por la Central Nayón es aproximadamente 0.75 la potencia de Cumbayá. La capacidad máxima de embalse de Cumbayá es de 240.000 m^3 .

La cota de este reservorio tiene una variación semejante al de la gráfica 13 en el transcurso de las 24 horas.

La variación de la potencia en este mismo intervalo viene dado en la gráfica 14.

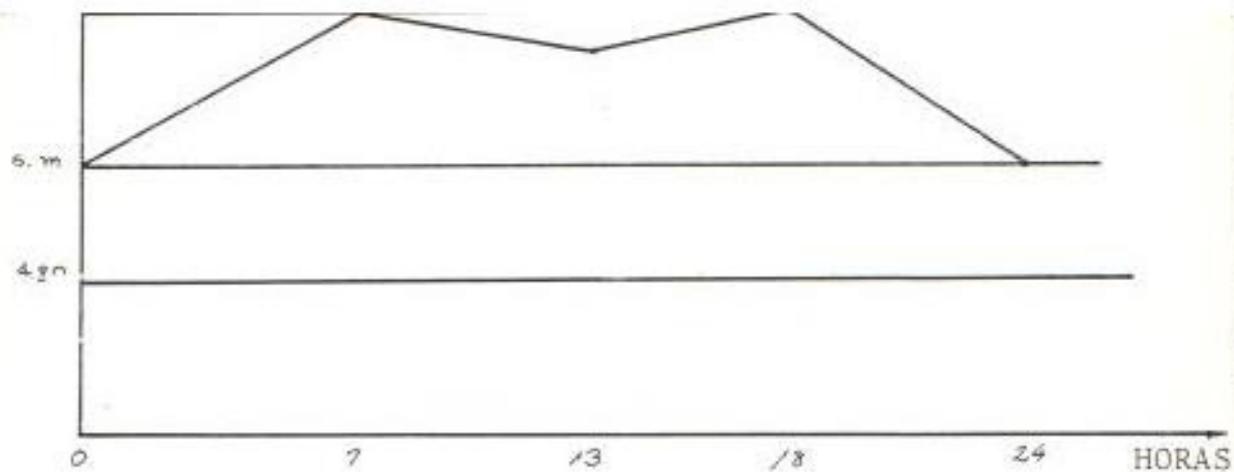


FIGURA N° 13

VARIACION DE LA COTA DEL EMBALSE DE LA CENTRAL CUMBAYA

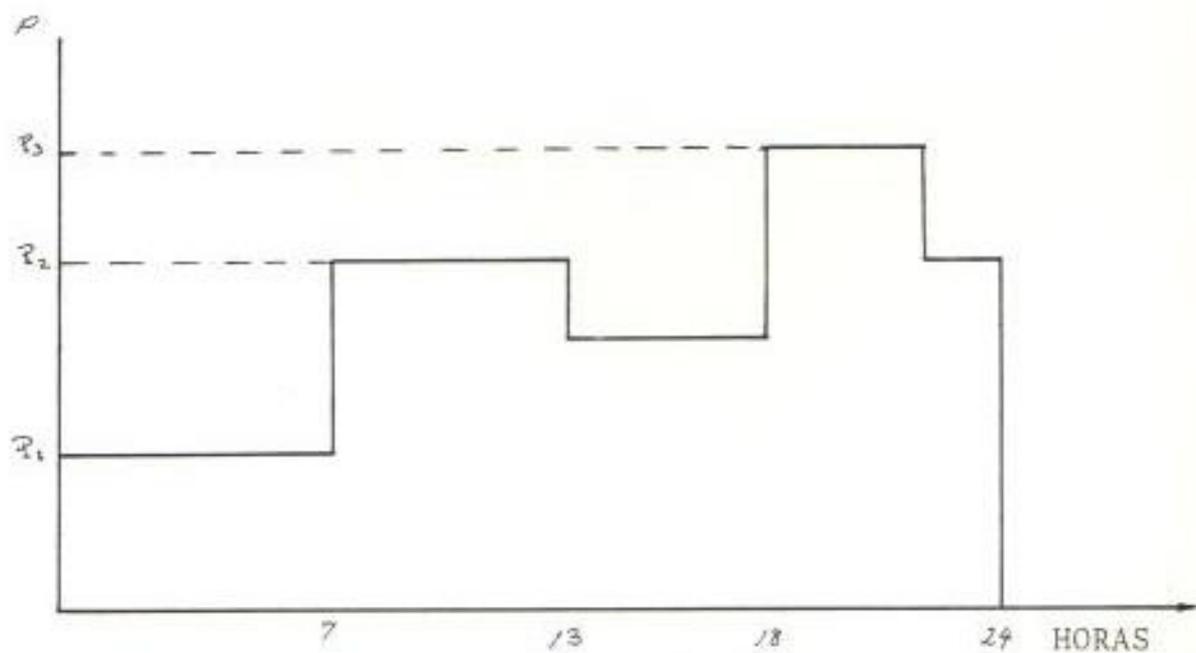


FIGURA N° 14

VARIACION DE LA POTENCIA HORARIA GENERADA POR CUMBAYA

TABLA N^o 1
 VARIACION DE LA COTA DEL EMBALSE DE CUMBAYA

HORAS	CUMBAYA (M ³)	NAYON (M ³)	NIVEL DE COTA
0-1	18.0	13.5	6.16
1-2	16.0	12	6.36
2-3	16.0	12	6.57
3-4	16.0	12	6.77
4-5	16.0	12	6.98
5-6	20.0	15	7.08
6-7	24.0	18	7.09
7-8	28.0	21	6.99
8-9	30.0	22.5	6.85
9-10	30.0	22.5	6.70
10-11	30.0	22.5	6.56
11-12	30.0	22.5	6.41
12-13	24.0	18	6.42
13-14	18.0	13.5	6.57
14-15	18.0	13.5	6.73
15-16	18.0	13.5	6.88
16-17	18.0	13.5	7.04
17-18	24.0	18.0	7.04
18-19	35.0	26.3	6.77
19-20	35.0	26.3	6.50
20-21	35.0	26.3	6.23
21-22	32.0	24.0	6.04
22-23	28.0	21.0	5.94
23-24	22.0	16.5	6.00
TOTAL	581.0	435.8	

Estos datos pertenecen a un día lunes, 29 de marzo y de ellos podemos concluir que Cumbayá recibe 20 Mwh de afluencia y su cota disminuye 0.15 por cada 10 Mw que genere sobre los 20 que recibe.

Además sabemos que:

Niveles de Operación:

Máximo	7.28
Mínimo	5.20

Para estos niveles de operación se considera como referencia la altura de la presa.

Caída Media Neta:

Caída en metros	139
Coeficiente de Produ <u>c</u> tividad	
Coeficiente en(KWh/m ³)	0.30
Caudales	
Caudal medio de afluencia	15.4 m ³ /s

Anual en m^3/s

Caudal de diseño en m^3/s 36.0

Este caudal ha sido medido en la bocatoma del río San Pedro.

4.2.2. Descripción de la Central Pisayambo

La Central Pisayambo pertenece a INECEL y sabemos que consta de 2 generadores de 40 Mw cada uno. Su capacidad eficiente de generación es de 69 Mw.

Su reservorio tiene una capacidad de 90 millones de m^3 .

La potencia disponible depende del nivel de agua y viene dado por la fórmula:

$$v = 0.15 + 4.599 \left(\frac{H-3541}{2} \right) + 0.35 \left(\frac{H-3541}{2} \right)^2 - 0.009 \left(\frac{H-3541}{2} \right)^3$$

De donde podemos calcular que la potencia mínima será de 10.28 Mw.

En los gráficos 15, 16 y 17, podemos obtener más información sobre ésta central. Además tenemos:

Niveles de Operación:

Máximo (m.s.n.m)	3564
Mínimo (m.s.n.m)	3550

Caída Neta Media:

Caída en metros	444.0
-----------------	-------

Coefficiente de Productividad:

Coefficiente en Kwh/m ³	0.98
------------------------------------	------

Caudales:

Caudal medio de afluencia anual en m ³ /s	7.6
Caudal de diseño en m ³ /s	18.6

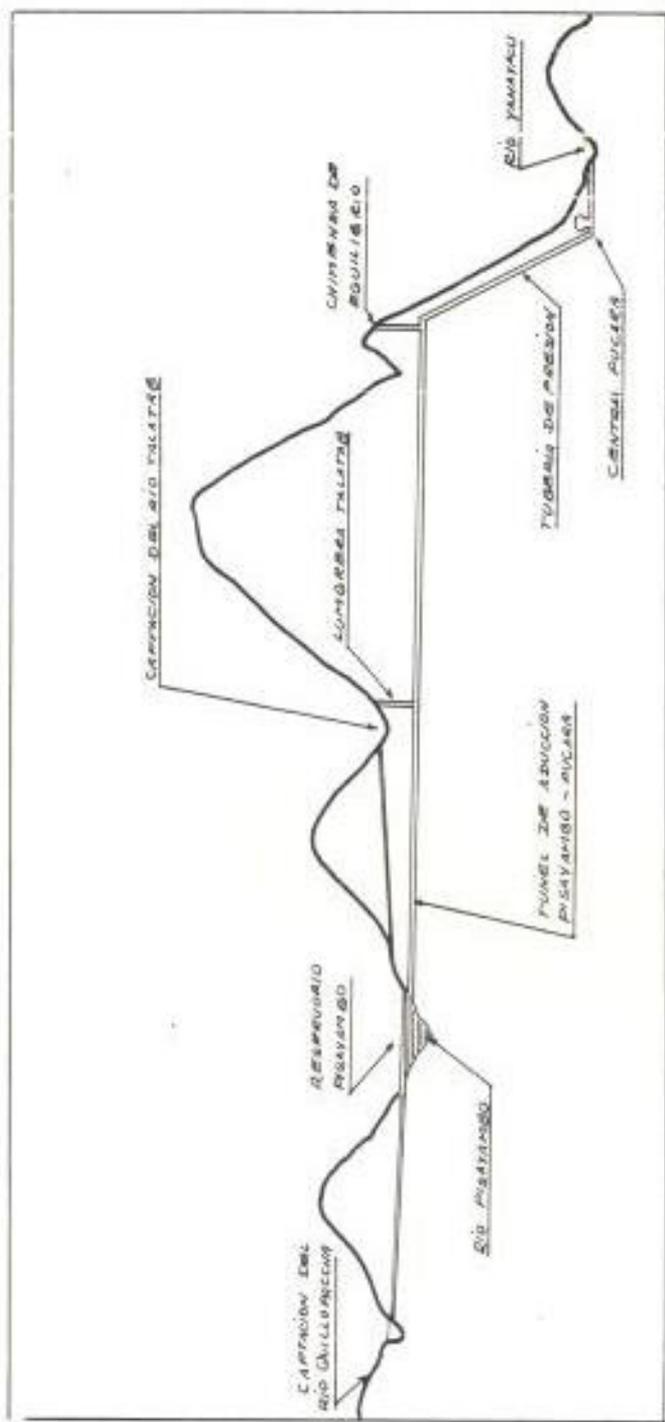


FIGURA N° 16

CENTRAL HIDROELECTRICA PISAYAMBO

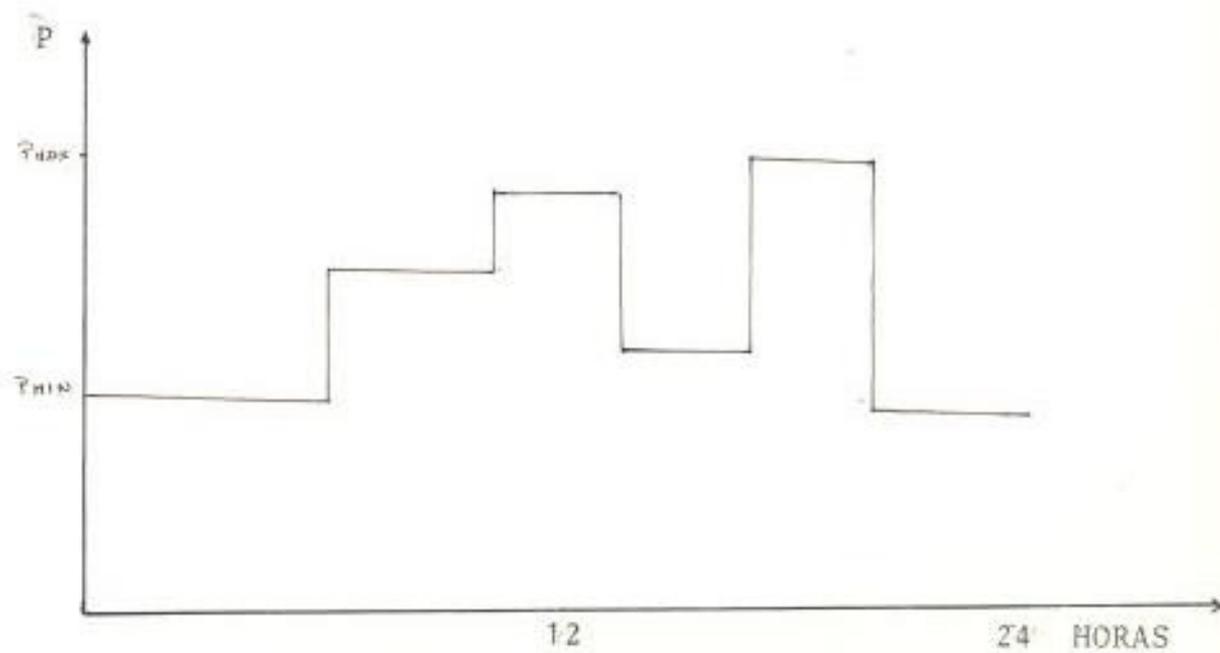


FIGURA N° 17

VARIACION DE LA POTENCIA HORARIA GENERADA
POR PISAYAMBO

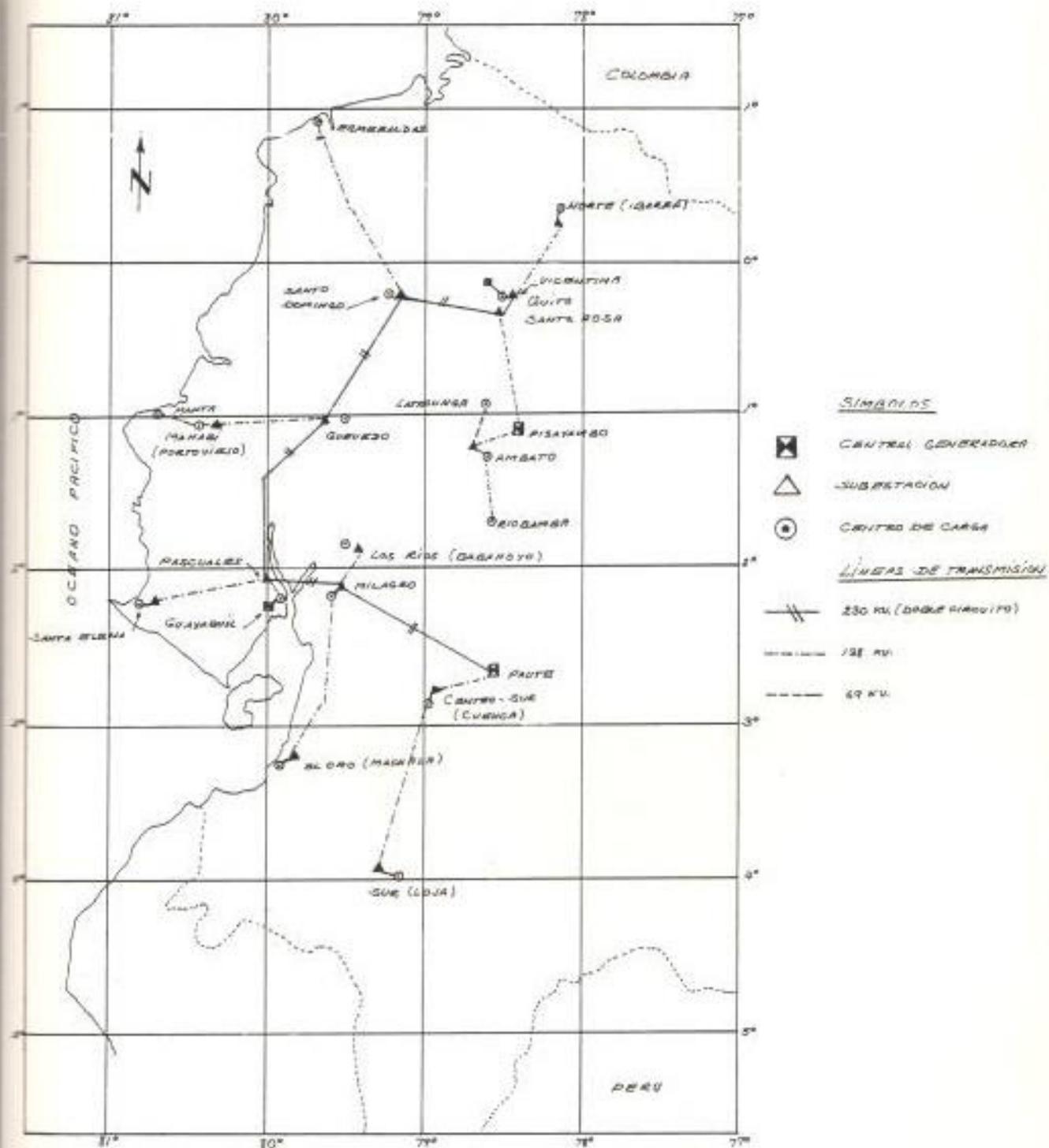


FIGURA N° 18

UBICACION DE LAS CENTRALES

4.2.3. Descripción de la Central Paute FASE A y B

El proyecto se halla localizado al sur-este del país, aproximadamente a 125 Kms. de la ciudad de Cuenca, (Gráfico N° 19). Consiste en la utilización de las aguas reguladas del río del mismo nombre en el sector conocido como Cola de San Pablo, para ello tiene 3 centrales: Mazar, Molino y Sopladora, ubicadas en serie mediante 3 embalses: Mazar, Amaluza y Marcayacu, colocadas también en serie.

La capacidad que se piensa instalar se estima en 1620 Mw en 3 etapas de construcción.

La fase A y B entrarán en funcionamiento a comienzos de 1983., y es la fase que consideramos en este trabajo.

Las características de esta primera etapa son las que se muestran a continuación:

PRODUCCION DE ENERGIA

	ENERGIA ANUAL EN Kwh x 10 ⁶	
	ANO CRITICO	ANO PROMEDIO
Capacidad instalada	500 Mw	500 Mw
Energía firme	2750	2850
Energía secundaria	780	1180
TOTAL	3530	4030

CUENCA

Elevación media (m.s.n.m)

2600

área

3086 Km²

CAUDALES EN SITIO DE PRESA

Caudal medio anual del rio

120.30 m³/seg

Caudal firme

48.00 m³/seg.

Caudal máximo de diseño

100.00 m³/seg.

EMBALSE EN AMALUZA

Volumen bruto de embalse

12 x 10⁶ m³

Elevación nivel normal máximo

1.991 m.s.n.m.

Elevación nivel normal mínimo

1.935 m.s.n.m.

Almacenamiento útil (inicial)

100 x 10⁶ m³

ALTURA DE CAIDA

Caida bruta mínima	612 m
Caida bruta máxima	668 m.

PRESA

Tipo: en arco

Volumen hormigón	1'200.000m ³
Altura	170 mts.
Elevación de la cima	1.994 m.s.n.m.
Longitud de la cima	400 mts.
Capacidad de vertedero	7.724 m ³ /seg.

TUNEL DE DESVIO (m)

Longitud	590 m.
Sección	12 m. diámetro
Capacidad	1.600 m ³ /seg.

ATAGUIAS PARA CONSTRUCCION

Aguas arriba (altura)	30 m
Aguas abajo(altura)	10 m.

TUNEL DE CARGA

Longitud	6160 m.
Diámetro (revestido)	5 m
Descarga máxima	100 m ³ /seg.
Sección	1963 m ²
velocidad máxima	5.4 m/seg

CHIMENEA DE EQUILIBRIO

Altura total	170 m
Diámetro del pozo	7 m
Diámetro orificio restringido	2.3m

TUBERIA DE PRESION

Longitud	860 m
Longitud Tramo norte superior	40 m.
Longitud tramo inclinado	758 m.
Inclinación con la horizontal	43°
Diámetro de blindaje de acero	3.75 m.

DISTRIBUIDOR

Número de ramales	5
Diámetro de ramales	1.68 m
Longitud	96.60 m

CASA DE MAQUINAS

Elevación eje de turbinas	1.323 m.s.n.m.
Ancho	23 m
Longitud	123 m
Alto	42 m

ACCESO A CASA DE MAQUINAS

En túnel	
Longitud	190 m
Sección	7.5 alto x 7 m. de ancho

TUNEL DE DESCARGA

Túnel principal	
Descarga máxima	100 m ³ /seg.
Longitud	230 m
Sección	8 m alto x 6.67 m ancho
Pendiente	0.3%
Túneles de descarga (unidades)	5
Longitud total	160 m
Sección	6.50 m alto x 5 m. de ancho

TURBINAS

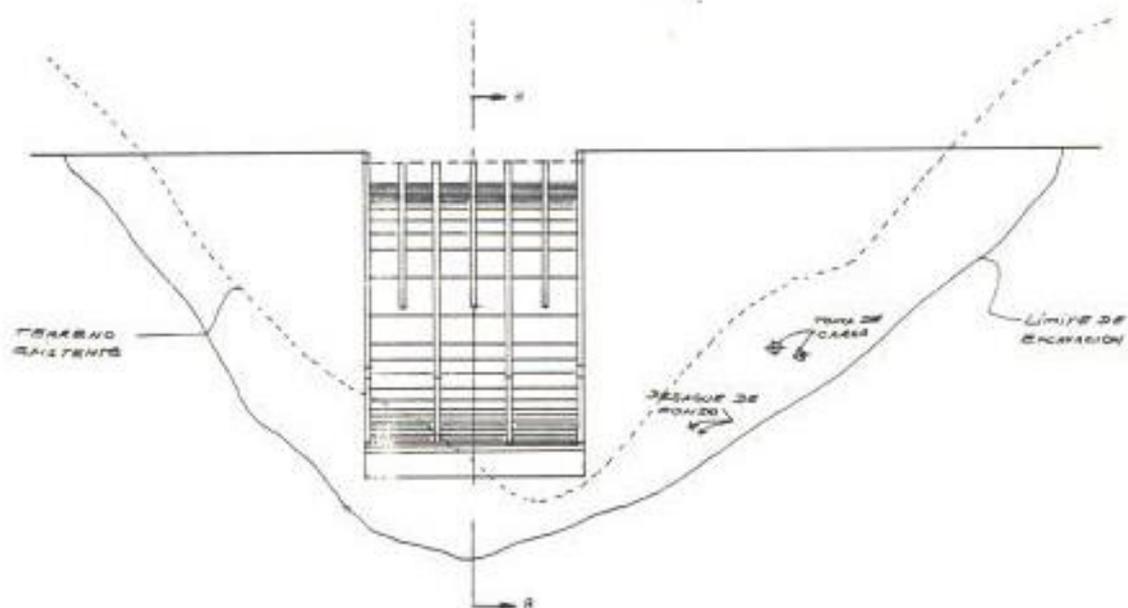
Número de unidades	5
Tipo Pelton, eje vertical, potencia con caída de-----	650 m
Nivel del Rotor	1323

GENERADORES

Número de unidades	5
Potencia Nominal por unidad	127.700 KVA
Factor de Potencia	0.90
Voltaje Nominal	13.8 KV
Frecuencia	60 ciclos
Velocidad Nominal	360 rpm.

TRANSFORMADORES DE ELEVACION

Número de unidades	5
Capacidad por unidad	127.700 KVA
Número de fases	3
Número de devanados	2 por fase
Relación de Transformación	13.8 KV a 138 KV
Tipo de enfriamiento	F.O.W.



ELEVACION DESARROLLADA MIRANDO HACIA ARRIBA

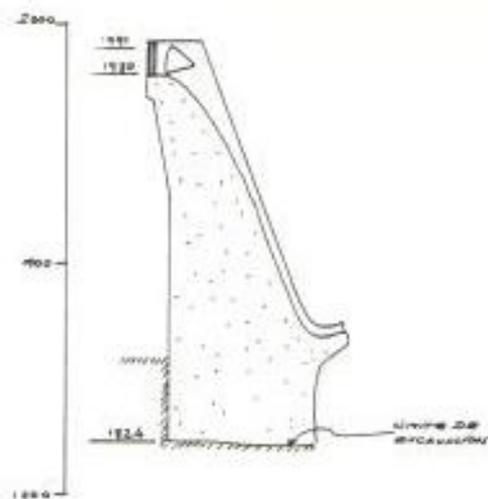


FIGURA Nº 20

PRESA DE LA CENTRAL PAUTE

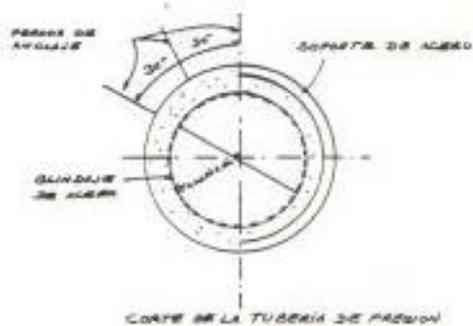
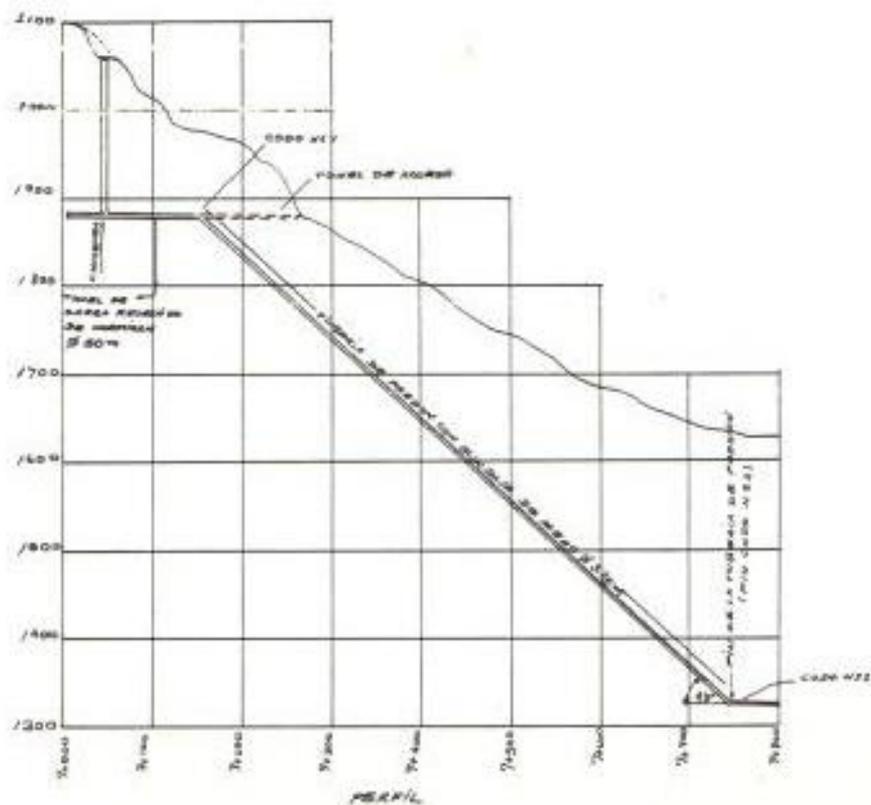


FIGURA Nº 21

TUBERIA DE PRESION DE LA CENTRAL PAUTE

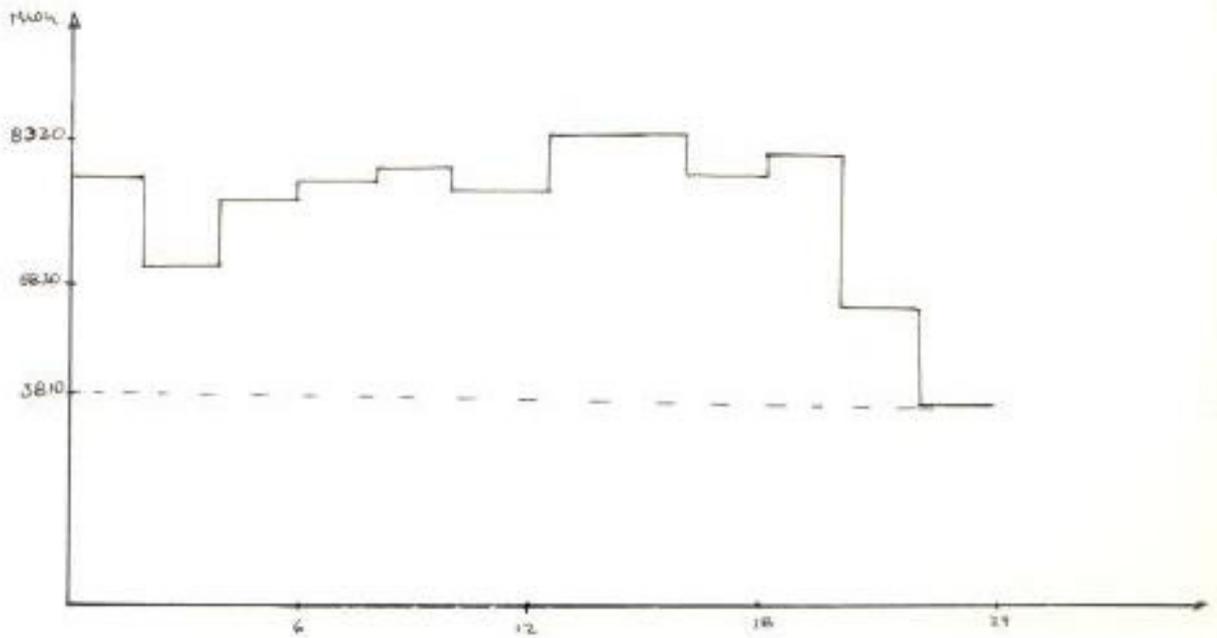


FIGURA N° 22

VARIACION DE LA POTENCIA HORARIA GENERADA
 POR PAUTE

PATIO DE MANIOBRAS

Elevación	1620 m s. n. m.
Líneas de salida a Cuenca	2 de 138 KV
Líneas al S.N.T.	2 de 230 Kv
Relación de Transformación	138.a 230 KV
Número de Bancos	2
Capacidad por Banco	300.000 KVA

Además tenemos : gráficos 20, donde podemos apreciar la presa; gráfica 21 de la tubería de presión que son factores - determinantes de la potencia disponibles y de la que se puede generar que son datos indispensables para la programación central.

4.2.4. Datos de la demanda

Para la demanda vamos a partir de los datos de INECCEL para un día lunes 29 de marzo de 1982. Como nuestro estudio considera la Central de Paute ya en operación, vamos a proyectar dicha demanda un año, con un factor de crecimiento de 10 % . Ello nos dá los valores que se presentan en la siguiente tabla^{Nº 2}.

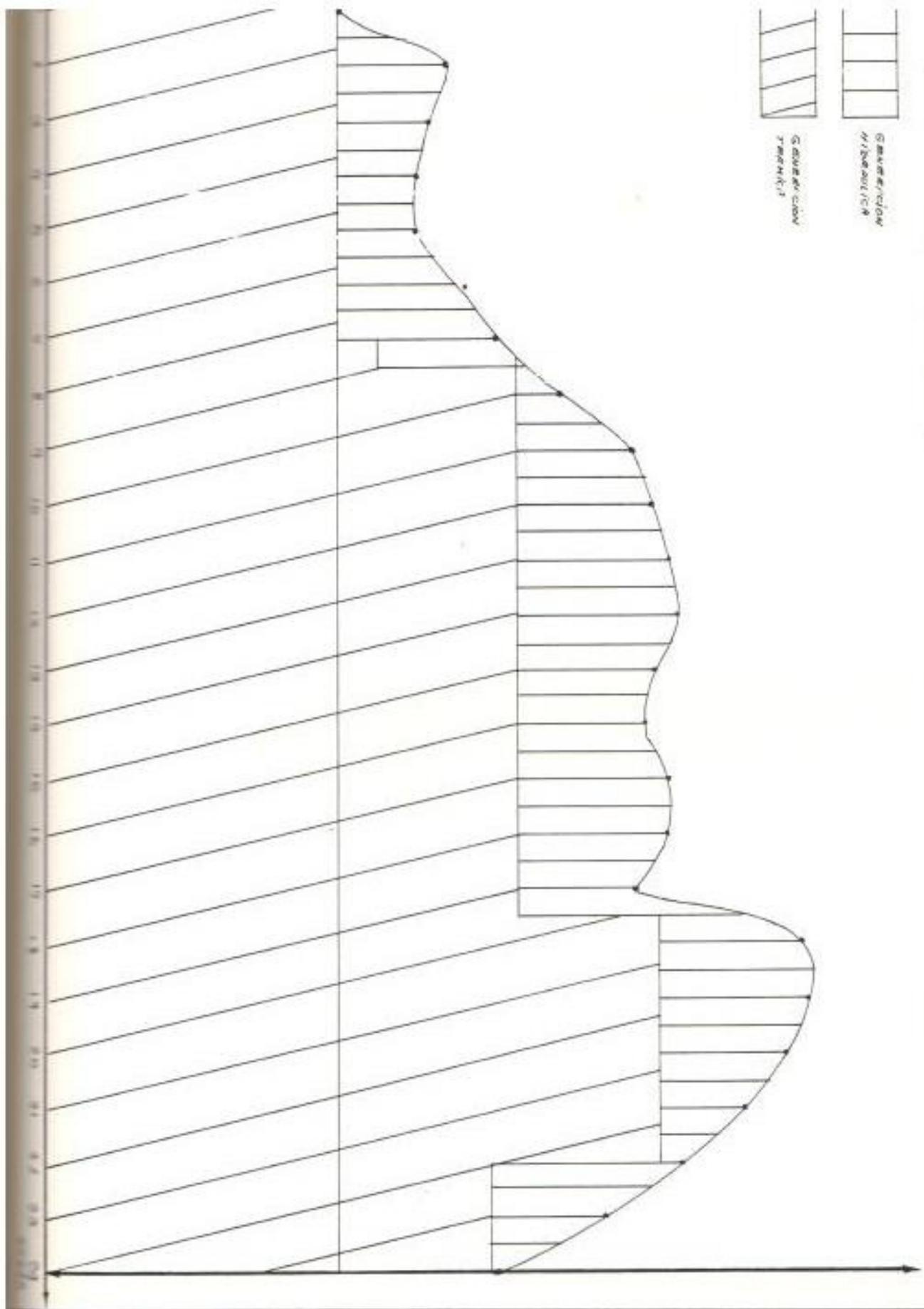
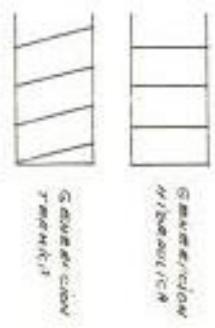
TABLA Nº 2

TABLA DE DEMANDA DEL DIA 29 DE MARZO/83

HORA	TOTAL Mw
0:00	326.17
1:00	216.18
2:00	293.19
3:00	278.98
4:00	276.45
5:00	277.21
6:00	307.62
7:00	324.05
8:00	371.28
9:00	423.84
10:00	438
11:00	450.61
12:00	456.84
13:00	434.32
14:00	430.07
15:00	449.19
16:00	446.37
17:00	424.87
18:00	433.3
19:00	544.03
20:00	527.21
21:00	501.98
22:00	454.10
23:00	388.52
24:00	323.58

FIGURA N° 23

RESULTADO ESPERADO DE LA PROGRAMACION A REALIZARSE



Vamos a graficar una curva aproximada para ver que parte puede ser generada o cubierta por centrales térmicas (base de la curva) y ver que - tan grandes son las puntas o picos de la curva que deberá cubrirse con las centrales hidráulicas.

Vemos que la base comprende 216 Mw aproximadamente, las mismas que INECEL, efectivamente satisface mediante centrales térmicas.

En el pico máximo (544 Mw) tendremos que cubrir 328 Mw.

Lo ideal sería cubrir toda ésta punta mediante centrales hidráulicas.

Si no consideramos Paute, sino solo Pisayambo, Nayón y Cumbayá, vamos a determinar una curva aproximada, como la 23 si consideramos como máxima energía hidráulica 100 Mw.

Nuestro objetivo será obtener una generación térmica mínima y lo más nivelado posible.

Esto lo podremos conseguir sólo con la Central Paute en operación.

4.3. EJEMPLO DE CALCULO

Para aplicar el método de programación diaria de centrales hidráulicas para el sistema interconectado vamos a especificar algunos puntos:

- a. Debido a los datos disponibles la demanda a satisfacer está compuesta por:
 - Demanda que tiene que cubrir la Empresa Eléctrica Quito.
 - Demanda que tiene que satisfacer INECEL para otras Empresas Eléctricas Regionales.

- b. Las centrales hidroeléctricas a programarse serán:

- Pisayambo
- Cumbaya
- Nayón
- Paute

Pisayambo y Paute son centrales programadas por INECEL.

Cumbayá y Nayon son programadas por la Empresa Eléctrica Quito.

c. Las potencias nominales de las centrales son:

Central Cumbayá: 4 x 10 MVA
 Central Nayón: 2 x 15 MVA
 Central Pisayambo: 5 x 10 MVA
 Central Paute: 5 x 100 MVA

d. La generación de la central Nayón es función de la generación (caudal) de la Central Cum bayá.

$$P_N = 0.75 \text{ Cumbayá}$$

e. Para cada central vamos a tomar los datos pro

porcionados por INECEL y los que faltaren serán asumidos de acuerdo a los datos disponibles.

f. Las centrales serán elaboradas en el siguiente orden, por considerarse el más apropiado.

1. Cumbayá
2. Nayón
3. Pisayambo
4. Paute

Los datos que debemos determinar para cada central son:

$m =$ número de centrales $= 4$

x_{ij} (Mw) : Potencia producida por la central i -ésima durante el j -ésimo intervalo de tiempo ($i = 1, 2, 3, 4$ $j = 1, \dots, 24$)

e_i (Mwh) : Energía a producirse por la central i -ésima durante 24 horas. Conocida.

y_i, Y_i (MW) : Potencia mínima y eficiente de la central i , conocidas Y_i , asumidas y_i .

v_i, V_i (MWh): Capacidad mínima y máxima del reservorio de la central i , conocidos para Paute y Pisayambo, asumidos para Nayon y Cumbayá.

v_{io} (MWh) Valor inicial del embalse i , asumido para todas las centrales.

f_{ij} (MWh): Aportes al reservorio i durante el intervalo j .

$$v_{ij} = v_{io} + \sum_1^j f_{ih} - T \sum_1^j x_{ih} \quad (\text{MWh})$$

Contenido del reservorio i al término del intervalo de tiempo j , desconocido.

$$d_{ij} = v_{io} + \sum_1^j f_{ih} - V_i \text{ Conocido}$$

$$D_{ij} = v_{io} + \sum_1^j f_{ih} - v_i \text{ Conocido}$$

Estos dos últimos valores son los límites para -

evitar derrames o secamientos respectivamente.
 Variaran ambos para cada hora (j). Tendremos
 entonces:

TABLA N° 3

	PISAYAMBO	CUMBAYA	NAYON	PAUTE
e_i	410 MWh	581 MWh	435.8MWh	5000 MWh
y_i	10 MWh	5 MWh	3.75MWh	65 MWh
Y_i	69 MWh	40 MWh	30 MWh	300 MWh
v_i	10 MWh	70 MWh	-	70000 MWh
V_i	150 MWh	240 MWh	-	120000 MWh
f_{ij}	20 MWh	20 MWh	-	250 MWh
v_{io}	80 MWh	190 MWh	-	75000 MWh

4.3.1. Programación de Cumbayá y Nayón

Las inecuaciones para resolver x_{ij} de Cumbayá
 será:

$$\sum_{j=1}^{24} x_j = 581$$

$$5 < x_j < 40$$

Que en nuestro caso serán constantes para cada hora y las otras 2 ecuaciones que varían cada hora:

$$d_j \leq T \sum_h^j x_h \leq D_j$$

$$\sum_j^j (r_j - x_j)^2 = \min$$

De estas ecuaciones tendremos para cada hora una diferente:

PRIMERA HORA

$$-30 \leq x_1 \leq 140$$

$$(326.17 - x_j)^2 = \min.$$

SEGUNDA HORA

$$-10 \leq x_1 + x_2 \leq 160$$

$$(326.17 - x_1)^2 + (216.18 - x_2)^2 = \min$$

TERCERA HORA

$$10 \leq x_1 + x_2 + x_3 < 180$$

$$(326.17 - x_1)^2 + (216.18 - x_2)^2 + (293.19 - x_3)^2 = \min$$

CUARTA HORA

$$30 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 200$$

$$(326.17 - 17 - x_1)^2 + (216.18 - x_2)^2 + (293.19 - x_3)^2$$

$$+ (278.98 - x_4)^2 = \min$$

QUINTA HORA

$$+ 50 \leq \sum_1^5 x_j \leq 220$$

$$(326.17 - x_1)^2 + (216.18 - x_2)^2 + (293.19 - x_3)^2 + (278.98 - x_4)^2 +$$

$$(276 - x_5)^2 = \min$$

y así sucesivamente hasta llegar a la hora 24.

Para minimizar la función $\sum_j (r_j - x_j)^2 = \min$

Derivamos la función:

$$F(x) = (r_j - x_j)^2$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2(r_j - x_j) (-1) = -2(r_j - x_j)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 2(x_j - r_j) = \lambda$$

TABLA N° 4

DATOS PARA LA CURVA DE CADA HORA DE LA CENTRAL
CUMBAYA

HORA	γ_j	x_j	λ	HORA	γ_j	λ_j	λ
				12	456.84	40	-833.68
						5	-903.6
0	326.17	40	-572	13	434.32	40	-788.6
		5	-642			5	-858.6
1	216.18	40	-352.4	14	430	40	-780
		5	-422.4			5	-850
2	293.2	40	-506.4	15	449.2	40	-818.4
		5	-576.4			5	-888.4
3	278.98	40	-476	16	446.4	40	-812.8
		5	-547.8			5	-882.8
4	276.45	40	-473	17	424.8	40	-769.6
		5	-543			5	-839.6
5	277.21	40	-474	18	433.3	40	-786.6
		5	-544.14			5	-856.6
6	307.62	40	-532.2	19	544	40	-1008
		5	-605.2			5	-1078
7	324	40	-568	20	527.2	40	-974.4
		5	-638			5	-1044.4
8	371.28	40	-662	21	501.9	40	-922.8
		5	-732			5	-992.8
9	423.8	40	-767.6	22	454.1	40	-828.2
		5	-837.6			5	-898.2
10	438	40	-796	23	388.5	40	-696.9
		5	-866			5	-767
11	450.6	40	-821.2	24	323	40	-554
		5	-891.2			5	-836

TABLA N° 5

Los valores obtenidos para Cumbayá por el método gráfico fueron:

CUMBAYA

HORA	x_j	S_j	λ_j
24	5	581	-815
23	40	576	-815
22	40	536	-815
21	40	496	-816
20	40	456	-818
19	23	416	-818
18	15	393	-815
17	40	378	-817
16	40	338	-817
15	20	298	-820
14	18	278	-812
13	40	260	-815
12	37	220	-815
11	30	183	-796
10	23	153	-704
9	20	130	-612
8	17	110	-570
7	23	93	-562
6	5	70	-565
5	5	65	-565
4	5	60	-565
3	10	55	-550
2	5	45	-575
1	5	40	-570
0	35	35	-570

Como la producción de la Central Nayón es función de Cumbayá vamos a calcular su generación diaria, pero como hemos asumido 3.75 Mw como mínima generación tendremos que mantenerla y cuando Cumbayá genere 5 Mw Nayón generará 3.75 Mw.

TABLA N° 6

NAYON:

HORA	x_j
24	3.75
23	30
22	30
21	30
20	30
19	17.2
18	11.2
17	30
16	30
15	15
14	13.5
13	30
12	27.7
11	22.5
10	17.2
9	15
8	12.7
7	17.2
6	3.5
5	3.5
4	3.5
3	7.5
2	3.5
1	3.5
0	26.25

Por lo tanto la demanda restante que tendrá que ser satisfecha por Pisayambo y Paute será:

TABLA N^o 7

HORA	r_j (demanda restante)
24	254
23	379.8
22	384.1
21	432
20	457.2
19	474.0
18	393.1
17	397.8
16	376.3
15	379.2
14	395
13	402.82
12	386.8
11	386
10	385.5
9	386.64
8	336.28
7	294.35
6	267.42
5	268.7
4	267.9
3	270.5
2	275.7
1	207.7
0	253.17

DEMANDA A SATISFACERSE
DESPUES DE PROGRAMAR NAYON Y CUMBAYA

4.3.2. Programación de Pisayambo

Las inecuaciones para resolver Pisayambo serán:

$$\sum_{j=1}^{24} x_j = 410$$

$$10 \text{ Mwh} \leq x_j \leq 69$$

Que se mantendrán constantes cada hora, y

$$d_j \leq \sum_{h=1}^j x_h \leq D_j$$

$$\sum_{j=1}^j (r_j - x_j)^2 = \min$$

Asumiendo $v_i = 10 \text{ MWh}$

$$V_i = 150 \text{ MWh}$$

$$V_{i0} = 80 \text{ MWh}$$

$$f_i = 20 \text{ MWh}$$

Tendremos para cada hora:

PRIMERA HORA

$$80+20-150 \leq x_1 \leq 80+20-10$$

$$(207 - x_1)^2 = \min$$

SEGUNDA HORA

$$-30 \leq \sum_1^2 x_2 \leq 110$$

$$(275 - x_2)^2 + (207 - x_1)^2 = \min$$

TERCERA HORA

$$-10 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 130$$

$$(270 - x_3)^2 + (275 - x_2)^2 + (207 - x_1)^2 = \min$$

CUARTA HORA

$$10 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 150$$

$$(268 - x_4)^2 + (270 - x_3)^2 + (275 - x_2)^2 +$$

$$(207 - x_1)^2 = \min$$

QUINTA HORA

$$30 \leq \sum_1^5 x_i = 170$$

$$(268 - x_5)^2 + (268 - x_4)^2 + (270 - x_3)^2 + (275 - x_1)^2 = \min$$

$$(207 - x_1)^2 = \min$$

SEXTA HORA

$$50 \leq \sum_1^6 x_i = 190$$

$$(267 - x_6)^2 + (268 - x_5)^2 + (268 - x_4)^2 + (220 - x_3)^2$$

$$+ (275 - x_2)^2 + (207 - x_1)^2 = \min$$

TABLA N° 8

DATOS PARA LA CURVA DE CADA HORA DE CENTRAL PISAYAMBO

HORA	r_j	x_j	λ	HORA	r_j	x_j	λ
0	253.17	69	-368.34	13	402.82	69	-667.64
		10	-486.34			10	-785.64
1	207.7	69	-277.4	14	395	69	-652
		10	-395.4			10	-770
2	275.7	69	-413.4	15	379.2	69	-620.4
		10	-531.4			10	-738.4
3	270.5	69	-403	16	376.3	69	-614.6
		10	-521			10	-732.6
4	267.9	69	-398	17	397.8	69	-657.6
		10	-516			10	-775.6
5	268.7	69	-399.4	18	393.1	69	-648.2
		10	-517.4			10	-766.2
6	267.42	69	-396.84	19	474.0	69	-810
		10	-514.84			10	-928
7	294.35	69	-450.7	20	457.2	69	-776.4
		10	-568.7			10	-894.4
8	336.28	69	-534.56	21	432	69	-726
		10	-652.56			10	-844
9	386.64	69	-635.28	22	384.1	69	-630.2
		10	-753.28			10	-748.2
10	385.5	69	-633	23	379.8	69	-621.6
		10	-751			10	-739.6
11	386	69	-634	24	254	69	-370
		10	-752			10	-488
12	386.8	69	-635.6	25	-	-	-
		10	-753.6				

Los valores obtenidos para Pisayambo por el método gráfico fueron:

TABLA N° 9

PISAYAMBO

HORA	x_j	S_j	λ_j
24	10	410	-819
23	10	400	-819
22	10	389	-820
21	22	380	-820
20	46	358	-820
19	33	312	-822
18	28	249	-750
17	22	231	-750
16	10	209	-744
15	10	199	-744
14	24	189	-744
13	30	165	-744
12	15	135	-744
11	16	130	-738
10	15	114	-740
9	17	99	-740
8	12	82	-645
7	10	70	-530
6	10	60	-530
5	10	50	-530
4	10	40	-530
3	10	30	-530
2	10	20	-530
1	10	10	-530
0	10	10	-530

4.3.3. Programación de Paute fase A y B

Luego de haber programado Pisayambo nos falta ría programar Paute, para lo cual podemos partir del hecho de que la Demanda resultante de las programaciones anteriores fue:

TABLA N° 10

HORA	r_j (DEMANDA RESULTANTE)
24	243
23	369.8
22	374.1
21	422
20	435.2
19	428
18	363
17	369.8
16	356.3
15	369.2
14	385
13	378.82
12	356.8
11	371
10	369.5
9	371.64
8	319
7	282
6	257
5	258
4	257
3	260
2	265
1	197
0	243

DEMANDA A SATISFACERSE POR PAUTE

Los datos a utilizar de Paute serán:

e_i	5000 MWh
y_i	65 MWh
Y_i	300 MWh
v_i	70000 MWh
V_i	120000 MWh
f_j	250 MWh
v_{io}	75000 MWh

TABLA N° 11

DATOS PARA LA CURVA DE CADA HORA DE LA CENTRAL PAUTE

HORA	r_j	x_j	λ	HORA	r_j	x_j	λ
0	243	300 65	514 -356	13	378.32	500 65	242.36 -627.64
1	197	300 65	606 -264	14	385	300 65	230 -640
2	265	300 65	470 -400	15	369.2	300 65	261.6 -608.4
3	260	300 65	480 -390	16	356.3	300 65	287.4 -582.6
4	257	300 65	486 -384	17	369.8	300 65	260.4 -609.6
5	258	300 65	484 -386	18	363	300 65	274 -596
6	257	500 65	486 -384	19	428	300 65	144 -726
7	282	300 65	436 -434	20	435.2	300 65	129.6 -740.4
8	319	500 65	362 -508	21	422	300 65	156 -714
9	371.6	300 65	256.8 -613.2	22	374.1	300 65	251.8 -618.2
10	369.5	300 65	261 -609	23	369.8	300 65	260.4 -609.6
11	371	300 65	258 -612	24	243	300 65	514 -356
12	356.8	300 65	286.4 -583.6	25	—	—	—

TABLA N^o 12

Los valores obtenidos para Paute por el método gráfico fue:

HORA	x_j	S_j	λ_j	r_j (residual) (MW)
24	110	5000	-530	133
23	200	4890	-530	169.8
22	250	4690	-530	124.1
21	300	4440	-545	122
20	300	4140	-550	125.2
19	300	3830	-540	128
18	230	3530	-540	133
17	230	3300	-540	139.8
16	230	3070	-540	126.3
15	230	2840	-540	139.2
14	250	2610	-510	135
13	250	2360	-500	128.82
12	230	2110	-510	126.8
11	250	1880	-500	121
10	250	1630	-500	119.5
9	250	1380	-490	121.64
8	190	1130	-490	129
7	150	940	-480	132
6	120	790	-480	137
5	120	670	-450	140
4	115	550	-450	142
3	120	435	-460	140
2	125	315	-500	140
1	65	190	-520	132
0	125	125	-500	128

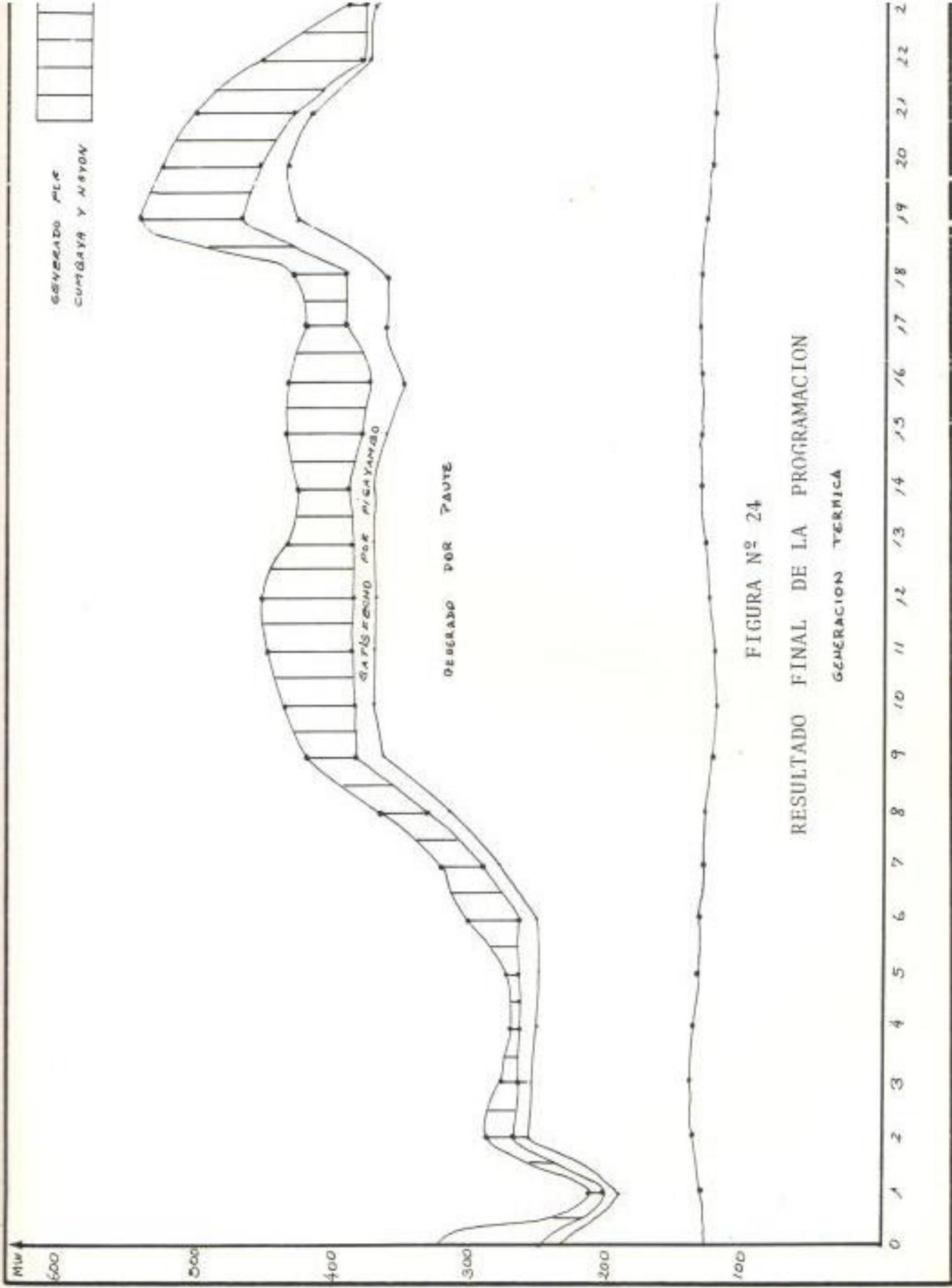


FIGURA N° 24
 RESULTADO FINAL DE LA PROGRAMACION
 GENERACION TERMICA

CAPITULO V

OTRAS OPCIONES DE CALCULO

5.1. CONDICIONES ESTABLECIDAS PARA CENTRALES QUE SE ALIMENTAN DE UN MISMO RECURSO

El método progresivo de solución que se ha presentado (determinación del diagrama de producción de una central a la vez) puede presentar el inconveniente de dar luego diagramas demasiado concentrados, aún procediendo en la elaboración con un orden de acuerdo a un número creciente de horas de utilización; pues si se toma primero las centrales que están aguas arriba, podría ser que su diagrama concentrado supere la posibilidad de despacho de las centrales en los valles (aguas abajo).

Para atenuar éste inconveniente vamos a dejar acumulados durante la elaboración de las centrales que se alimentan de un mismo recurso, los eventuales rebosamientos que se presenten; en la hipótesis de que el

total supere una cantidad prefijada, de tal forma que la central principal, la que esté más aguas arriba, ya no puede trabajar a plena potencia durante las 24 horas. El cálculo de todas las centrales que se alimentan de un mismo recurso vuelve a repetirse reduciendo en modo oportuno las potencias eficientes de las centrales aguas arriba, de tal forma que se obtenga de estas centrales flujos de agua más uniformes en el tiempo y en consecuencia menos rebosamientos en los valles.

Un problema análogo se presenta para las centrales de bombeo insertadas entre las centrales de un mismo recurso, o que en general tengan un reservorio inferior (de las cuales extrae el agua la bomba) de limitada capacidad.

En tal caso, puesto que el sistema 3, 4, 5, y 6 controla sólo el reservorio de alimentación, se debe verificar que el bombeo eventual no produzca vaciamientos en el reservorio inferior o del valle.

Con este fin, partimos de la hipótesis de que la cen

tral del valle o aguas abajo sea apagada (se excluye que la central agua abajo de una central de bombeo - sea también de bombeo, si el reservorio interpuesto es de limitada capacidad); se calcula para la central de bombeo un primer diagrama x_j (sistema 3, 4, 5 y 6) y con éste diagrama, teniendo en cuenta los diversos resultados de producción y bombeo se determina la - marcha del embalse del valle (del cual se conoce el contenido inicial y los aportes naturales de cada hora); si no se verifican resecaamientos o vaciamientos se acepta - el diagrama x_j así determinado, de lo contrario se inhibe el bombeo a partir de la hora al término de la cual se ha verificado el vaciamiento, y hasta el término de las horas de máximas demanda, en que se repite el cálculo de éstas nuevas condiciones (4) y se determina el vector x_j definitivo.

Vemos de ésta forma que, se tiene una condición suficiente a fin de que el problema 3, 4, 5 y 6 aplicado a la central de valle encuentre solución.

5.2. PROGRAMACION DE CENTRALES HIDRAULICAS CONSIDERANDO LA VARIABILIDAD DEL RENDIMIENTO

5.2.1. Generalidades

Vamos a proponer, para un sistema compuesto de una sola central hidroeléctrica y una so la central térmica, confrontar el costo de ejercicios correspondientes a un plan de producción determinado teniendo en cuenta la variabilidad del rendimiento - de la Central Hidroeléctrica en función de la capacidad de la turbina, con el costo del ejercicio correspondiente a un plan de producción determinado suponiendo el rendimiento de la Central Hidroeléctrica independiente de la capacidad (y por tanto tal que la producción hidroeléctrica satisfaga la condición de que el diagrama de carga termoeléctrico sea lo más nive lado posible.

Si asumimos como restricciones al volumen com pleto de agua que va a la turbina en el día, los valores mínimos y máximas de la capacidad de combustible y de agua, y el diagrama de carga a cubrirse. Se asume como función objetivo ha cer mínima la cantidad de combustible consumi do en el día (dado que la central termoeléctrica es una sola, esto equivale a encontrar el cos to mínimo de ejercicio); en el segundo caso (ren

dimiento de la central hidroeléctrica supuesto constante) la función objetivo, consiste en hacer mínima la varianza del diagrama de carga termoeléctrica.

Se podría esperar que la reducción de combustible que se obtiene teniendo en cuenta la variabilidad del rendimiento de la central hidroeléctrica sea en general pequeña, y en efecto así es y por tanto es lícito, en primera aproximación, utilizar el método de cálculo simplificado (rendimiento de la central hidroeléctrica supuesto independientemente de la capacidad).

5.2.2. Planteamiento del problema

Tenemos:

Δ_t (h) intervalo de tiempo elemental (durante el cual la capacidad es supuesta constante), conocido.

n número de intervalos de tiempo elementales, que constituyen el período en exámen, conocido.

$v(m^3)$	Volumen de agua usado en la turbina conocido.
$q_j(m^3/h)$	Capacidad de la turbina durante el j -ésimo intervalo de tiempo, desconocido.
$\gamma_a(MWh/m^3)$	Coefficiente energético teórico del agua, conocido.
η_j	Rendimiento de la central hidroeléctrica en correspondencia con q_j ; considerado independiente de la variación del salto, función conocida de la variable q_j .
$q_{max}(m^3/h)$	Capacidad máxima de la central hidroeléctrica, conocida.
$q_{c_j}(Kg/h)$	Capacidad de combustible, a realizarse durante el j -ésimo intervalo de tiempo, desconocida.
$\gamma_c(MWh/Kg)$	Coefficiente energético teórico del combustible, conocido.

η_{cj} Rendimiento de la central termoeléctrica en correspondencia de q_{cj} , función conocida de q_{cj} .

$q_{c\text{mfn}}$ (Kg/h) Capacidad mínima (mayor de 0) de combustible, conocida.

$q_{c\text{max}}$ (Kg/h) Capacidad máxima de combustible, conocida.

p_j (MW) Valor de carga durante el intervalo j -ésimo; conocido.

$$q^*_j = \eta_j q_j$$

$$q^*_{\text{max}} = \eta (q_{\text{max}}) \cdot q_{\text{max}}$$

$$q^*_{cj} = \eta_{cj} q_{cj}$$

$$q^*_{c\text{min}} = \eta_c(q_{c\text{min}}) \cdot q_{c\text{min}}$$

$$q^*_{c\text{max}} = \eta_c(q_{c\text{max}}) \cdot q_{c\text{max}}$$

Las condiciones arriba mencionadas, se pueden es
cribir:

$$78. \quad \Delta t \sum_{j=1}^n q_j = V$$

$$79. \quad \gamma_a q_j^* + \gamma_c q_{cj}^* = P_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$80. \quad 0 \leq q_j \leq q_{\max} \quad j = 1, \dots, n$$

$$81. \quad q_{c \min} \leq q_{cj} \leq q_{c \max} \quad j = 1, \dots, n$$

$$82. \quad \sum_{j=1}^n q_{cj} = \min$$

Se supone, como normalmente sucede en la prácti
xa, que subsiste correspondencia biunívoca en
tre q_j y q_j^* y entre q_{cj} y q_{cj}^* .

5.2.3. Solución

El sistema de ecuaciones 78, 79, 80, 81 y 82 pueden ser resuelto con un método de programación dinámica.

Con tal intención se discretizan las q_j poniendo $q_{\max} = md$, con m entero oportuno y se consideran posibles para las q_j sólo los $m+1$ valores: $0, d, 2d, \dots, md$.

Considerados los primeros 2 intervalos de tiempo, para cada posible suma $q_1 + q_2 = kd$ (con $k=0, 1, \dots, 2m$) se consideran todos los posibles pares (q_1, q_2) .

Para cada una de éstas se obtiene el par q_1^*, q_2^* y de allí de la ecuación 79 (para $j=1$ y $j=2$) el par q_{c1}^*, q_{c2}^* ; si uno (o ambos) de estos valores excede los límites $q_{c \min}^*, q_{c \max}^*$ se asocia al par q_1, q_2 , una función costo igual a infinito; y, viceversa de q_{c1}^*, q_{c2}^* se obtiene q_{c1} y q_{c2} y se asocia al par q_1, q_2 una función costo -

igual a q_{c1} y q_{c2} .

Entre todos los pares q_1, q_2 de igual suma se es cogerá aquella de costo mínimo.

Se considera de allí los primeros 3 intervalos - de tiempo y para cada posible suma $q_1 + q_2 + q_3 = kd$ (con $k=0, \dots, 3m$) se consideran todos los posibles pares $q_1 + q_2, q_3$.

Para cada una de éstas se obtiene q^*_3 y q^*_{c3} de la 79; si q^*_{c3} excede los límites $q^*_c \min, q^*_c \max$ se asocia al par $(q_1 + q_2, q_3)$ costo infinito; y de q^*_{c3} se obtiene q_{c3} y se asocia al par $q_1 + q_2, q_3$, un costo semejante a la suma del costo mínimo de $q_1 + q_2$ ya determinado y de q_{c3} .

Entre todos los pares $q_1 + q_2, q_3$ de igual suma se escogerá aquella de costo mínimo.

Se procede en modo similar, como ya sabemos, para la suma $q_1 + q_2 + \dots + q_n$ y será obviamente suficiente considerar sólo aquella más próxima -

al valor requerido, $V/\Delta t$.

Con un procedimiento al revés, también ya conocido, se determina enseguida todas las q_j y de allí por medio de la correspondencia biunívoca q_j, q^*_j , la ecuación 79 y la correspondencia biunívoca q^*_{cj}, q_{cj} , todas las q_{cj} .

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Hemos visto entonces que en la operación diaria de un sistema de producción mixto hidro-termoeléctrico los objetivos generales que se intenta reunir son:

1. Máxima seguridad de operación compatible con las características y las condiciones de funcionamiento del sistema.
2. Máxima seguridad de operación compatibles con objetivos prioritarios a aquellos expuestos en 1.

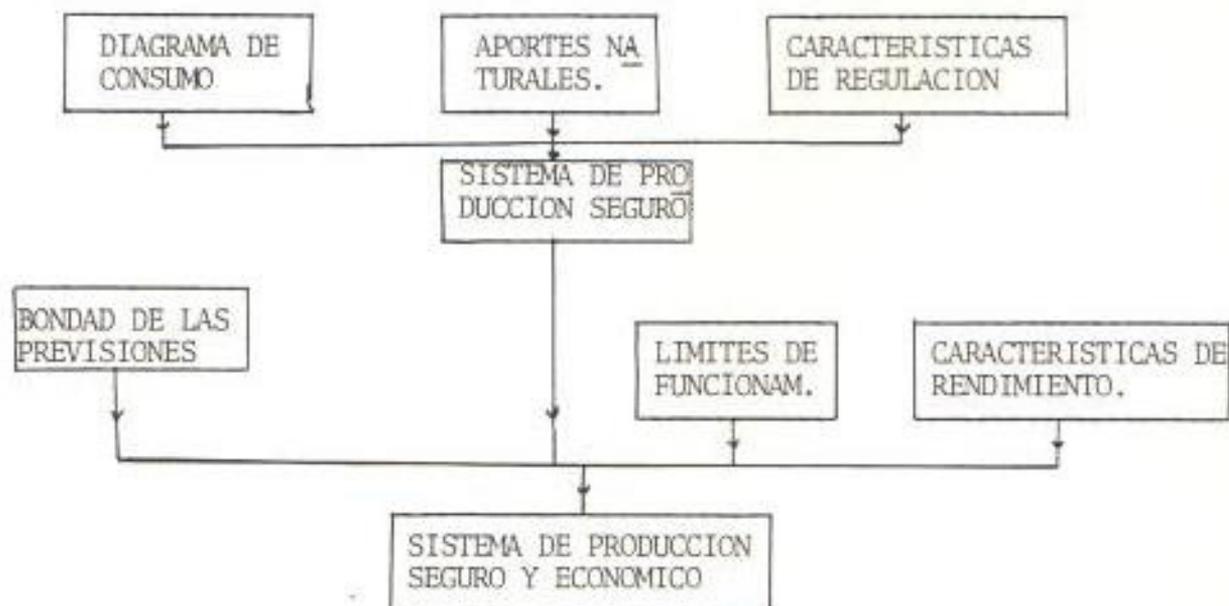
Para conseguir el objetivo 1, debemos hacer una oportuna evaluación preventiva de las siguientes medidas.

- Diagrama horario de la demanda
- Aportes naturales a las plantas hidroeléctricas
- Oportuna selección en función del tipo de planta de generación.

El cumplimiento del objetivo 2 es función de:

- De lo bien tomada que estén las medidas anteriores.
- De los límites de funcionamiento de cada planta de generación.
- De las características de rendimiento en función de la potencia entregada por la planta, que como ya vimos no era algo muy determinante en el resultado final.

Las consideraciones que hemos visto pueden ser graficadas y resumidas en el siguiente modo:



El método de programación que hemos propuesto presenta las siguientes aproximaciones principales:

- Los rendimientos de las centrales hidroeléctricas son consideradas constantes.
- Las pérdidas de transporte son despreciadas.
- Las condiciones de transporte son consideradas en modo aproximados.

Tales aproximaciones pueden por otro lado ser atenuadas en optimizaciones sucesivas (optimización en los valles y de la repartición de la carga térmica).

El método presente por otro lado las siguientes ventajas:

- Tiene en cuenta todas las condiciones principales de las centrales hidroeléctricas (potencia, embalse, caudal).
- Permite tratar un número elevado de centrales hidroeléctricas.

- Requiere un número limitado de datos, que se pueden encontrar en la práctica normal y con las normales vías de comunicación.
- Tiene la ventaja de proveer una guía unívoca para la operación de las centrales hidroeléctricas.

Este método sin embargo podría ser complementado mediante un programa que constaría de 2 pasos de los cuales el primero ejecutaría básicamente el ordenamiento de las centrales de acuerdo con las horas de utilización creciente y el segundo que ejecutaría el cálculo propiamente dicho.

Podría ser que el tiempo que tome dicho programa sea muy largo pues dependería de el número completo de centrales, el número de veces que se necesite efectuar reciclos o iteraciones para reducir eventuales derrames o secamientos.

En la figura N^o 25, se presenta un esquema simplificado del diagrama de flujo que resume la posibilidad arriba indicada.

En dicha figura tenemos:

i - índice del recurso

k - índice de las centrales en dicho recurso

j = número del orden del recurso desde el cual se inicia el reciclo para la variación de la energía diaria h_i hidroeléctrica.

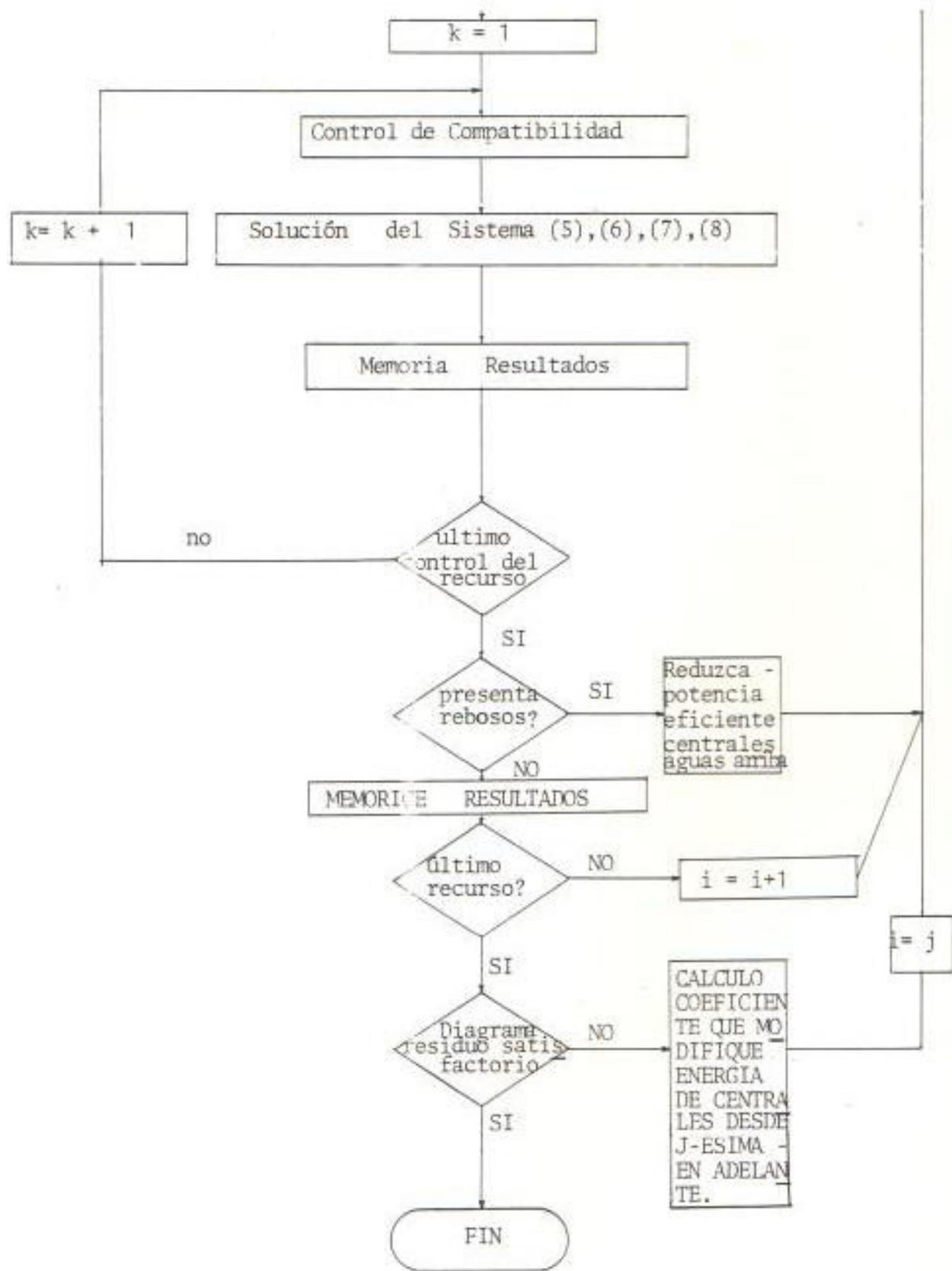


FIGURA Nº 25

B I B L I O G R A F I A

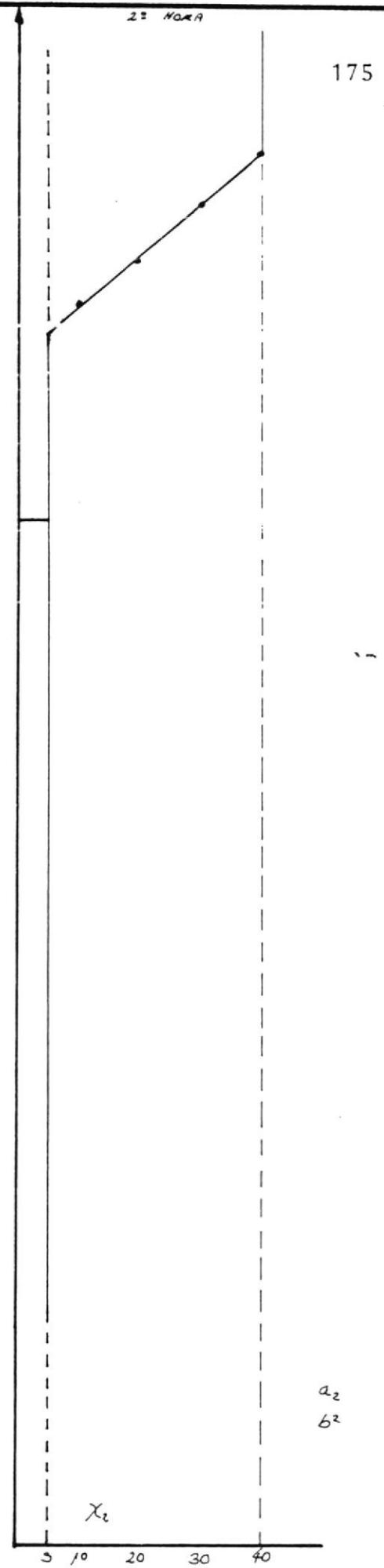
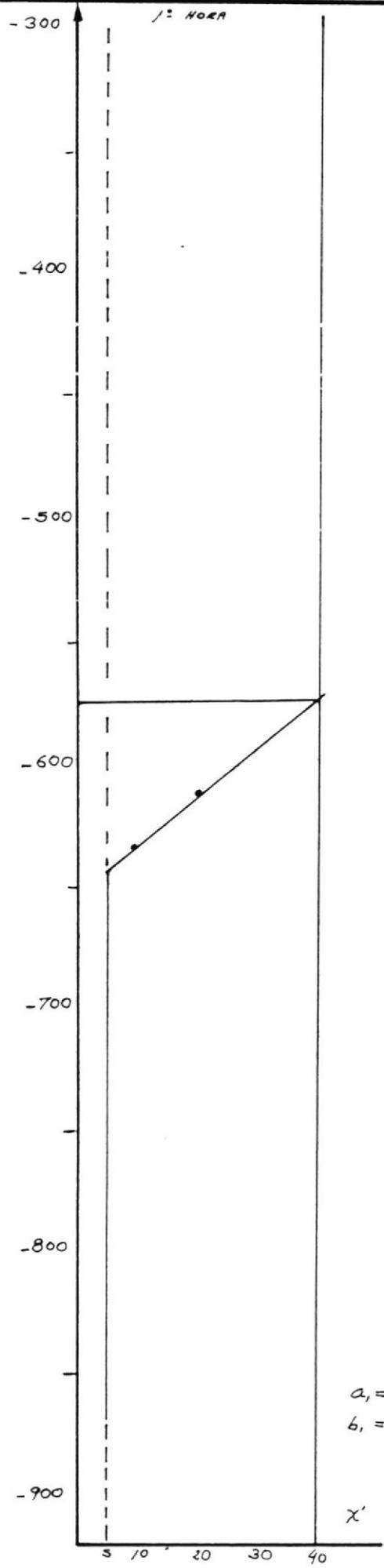
1. FACCONI, GANDIN, VALTORTA: DESARROLLO DE LA ESTRUCTURA Y DE LAS CARACTERISTICAS FUNCIONALES DE LA RED ELECTRICA INTEGRADA . Tokio,1966.
2. ANGELINI: LA EVOLUCION DEL APROVECHAMIENTO DE ENERGIA ELECTRICA EN ITALIA - "LA ENERGIA ELECTRICA". N° 12 , 1967.
3. MERLIN; MARTIN: METODO DE REPARTICION DIARIA DE UN CONJUNTO DE MEDIOS DE PRODUCCION TERMICO - HIDRAULICOS - BOLETIN EDF., N ° 4, 1969.
4. FERRARA: UN PRINCIPIO DISCRETO DEL MAXIMO DEDUCIDO DE LAS CONDICIONES DE KUHN Y TUCKER Y APLICADO AL DESPACHO ECONOMICO DE LOS SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA - EN GENERACIONES MIXTAS HIDRO-TERMICAS;AEI, 1969.
5. FERRERA,GALIERO: EMPLEO CONJUNTO DE ALGORITMOS DE FLUJO DE CARGA Y PROGRAMACION LINEAL EN EL DESPACHO DE LAS REDES DE GENERACION Y TRANSPORTE DE ENERGIA ELECTRICA,

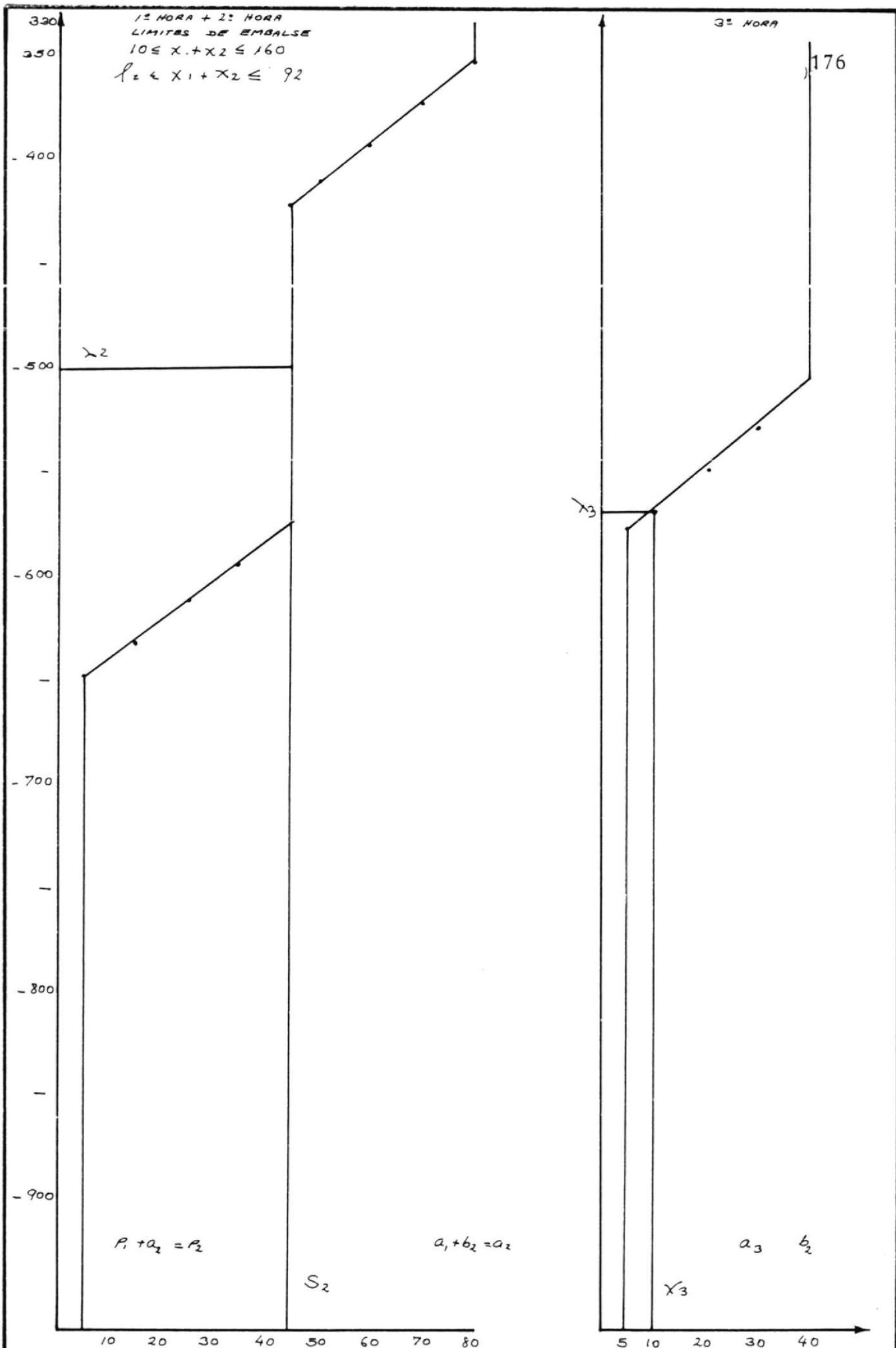
AEI, 1969.

6. GROHMANN: UN METODO DE SOLUCION DE ALCUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION TRATABLES CON PROGRAMACION DINAMICA.
7. PROGRAMS OPTIMIZE HYDRO-THERMAL MIX - "ELECTRICAL WORLD 11-5-1970.
8. INECEL, PLAN MAESTRO DE ELECTRIFICACION. TOMO I, 1980.

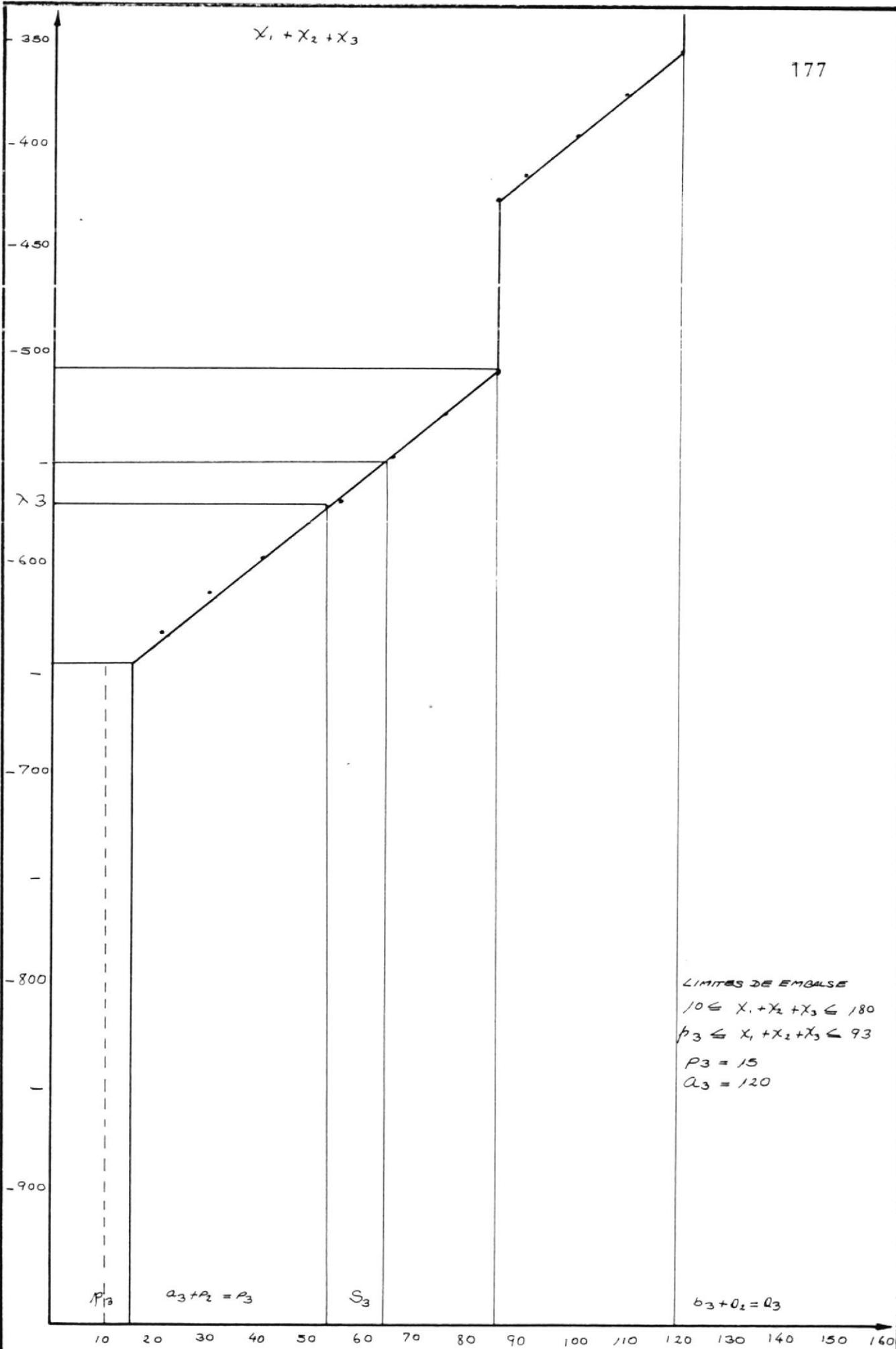
A P E N D I C E

PROGRAMACION POR EL METODO GRAFICO PROPUESTO DE LA
CENTRAL CUMBAYA





$$X_1 + X_2 + X_3$$



-350
-400
-450
-500
-600
-700
-800
-900

P_3

$a_3 + a_2 = P_3$

S_3

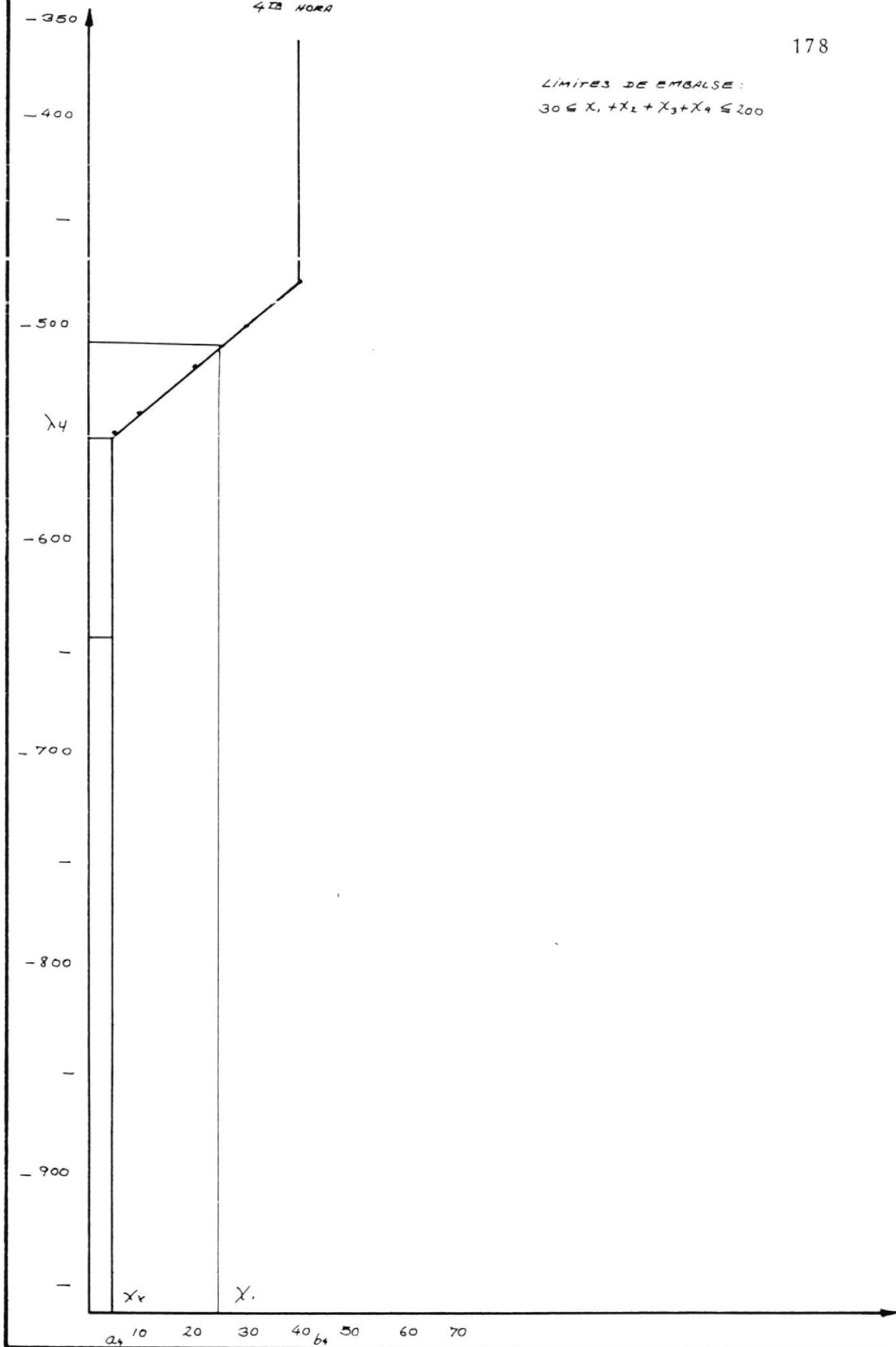
$b_3 + a_2 = Q_3$

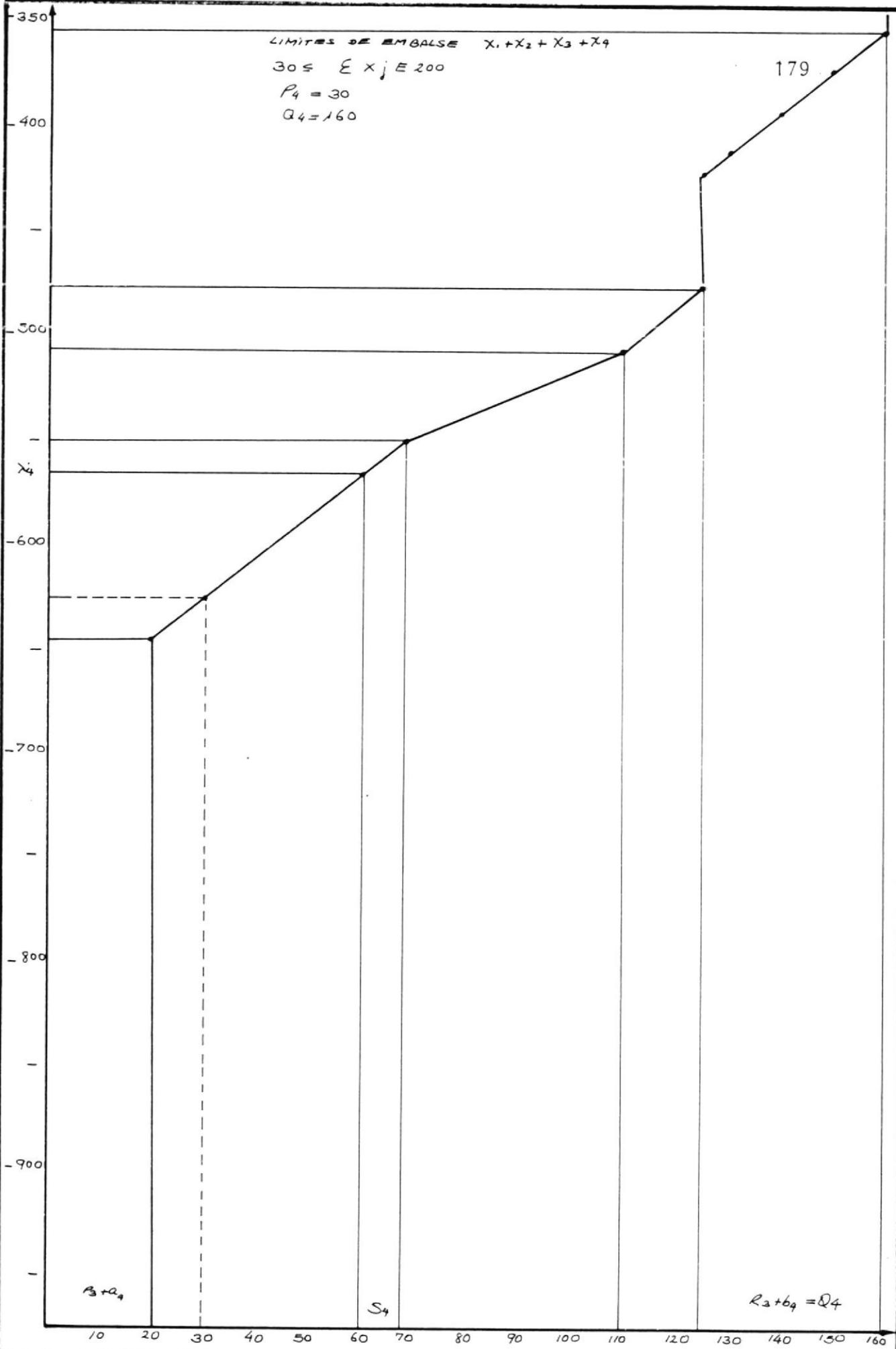
LIMITES DE EMBALSE
 $10 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 180$
 $P_3 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 93$
 $P_3 = 15$
 $Q_3 = 120$

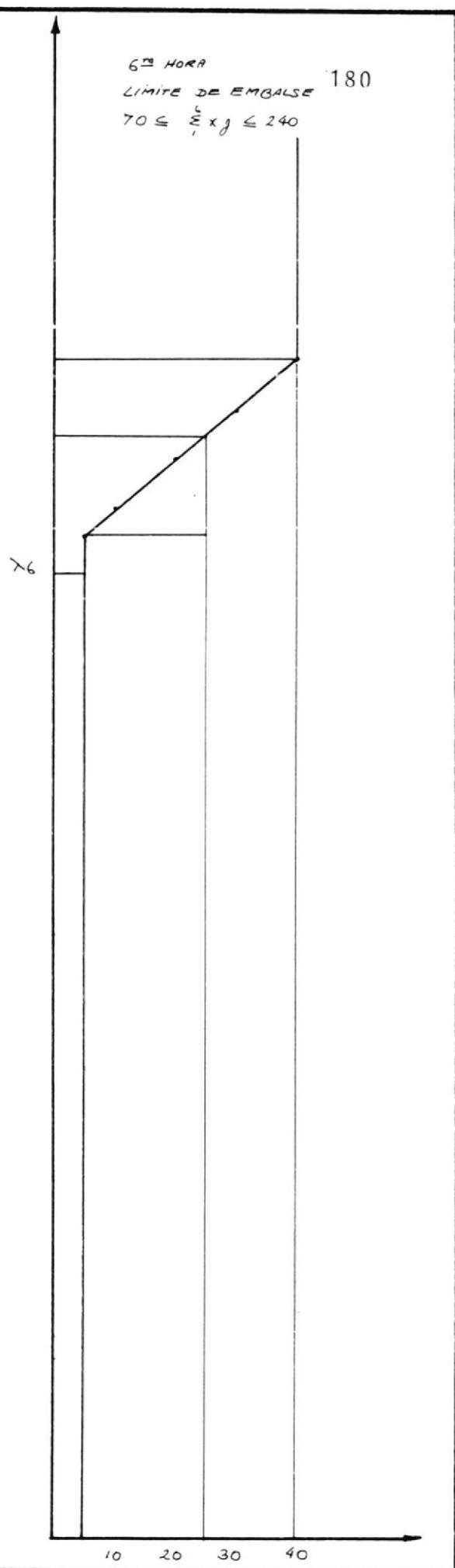
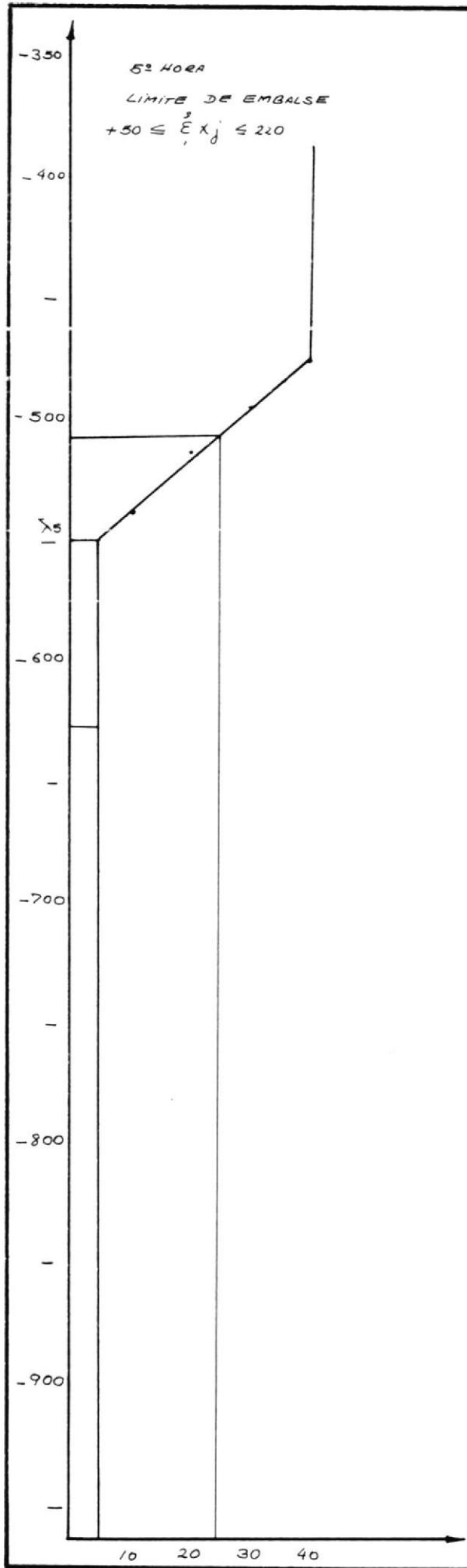
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160

4ª HORA

LÍMITES DE EMBALSE:
 $30 \leq X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 200$



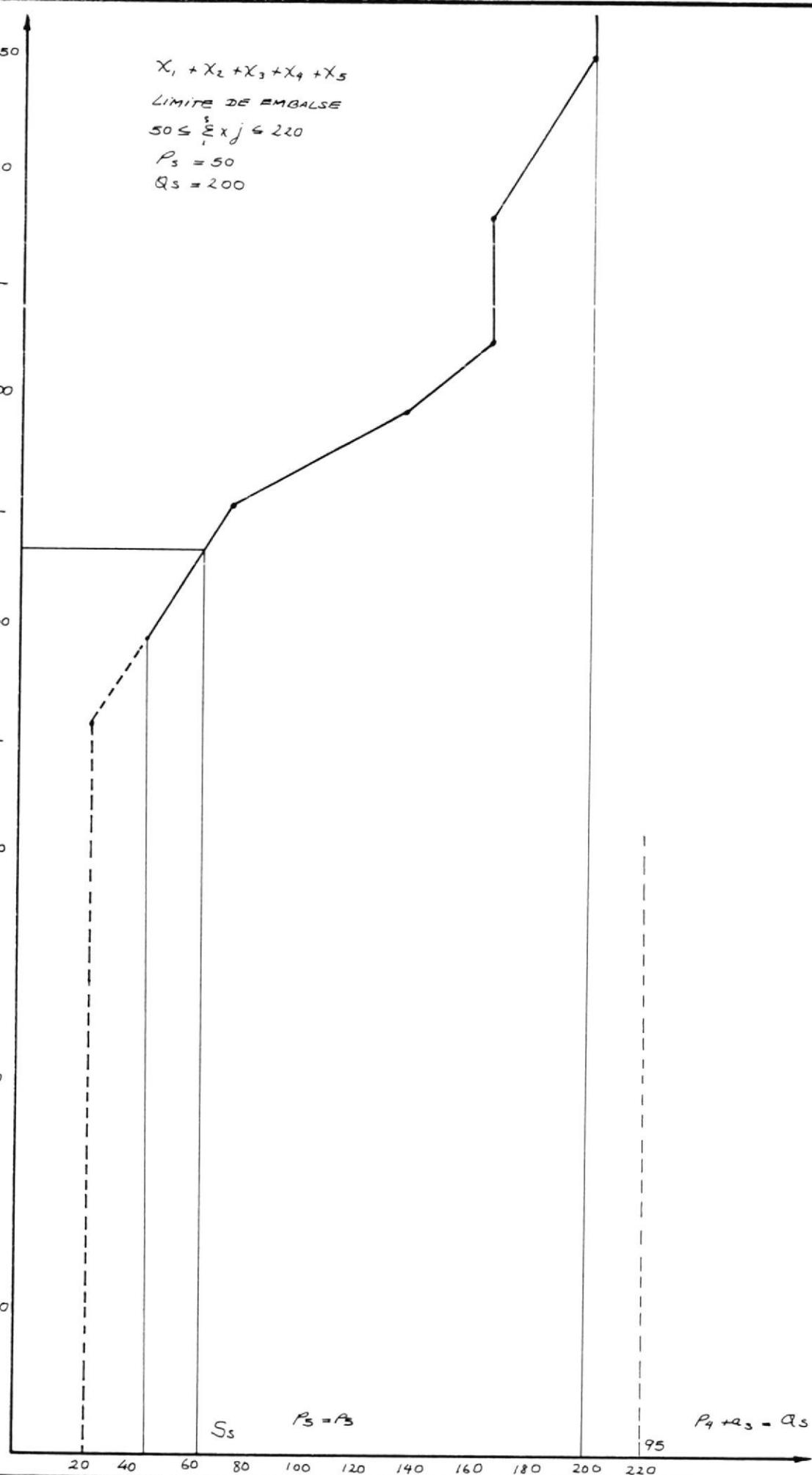




-350
-400
-
-500
-
-600
-
-700
-
-800
-900

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
 LIMITE DE MARGE
 $50 \leq \sum_j x_j \leq 220$
 $P_3 = 50$
 $Q_3 = 200$

λ_5



S_3

$P_3 = P_3$

$P_4 + a_3 = Q_3$

95

20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220

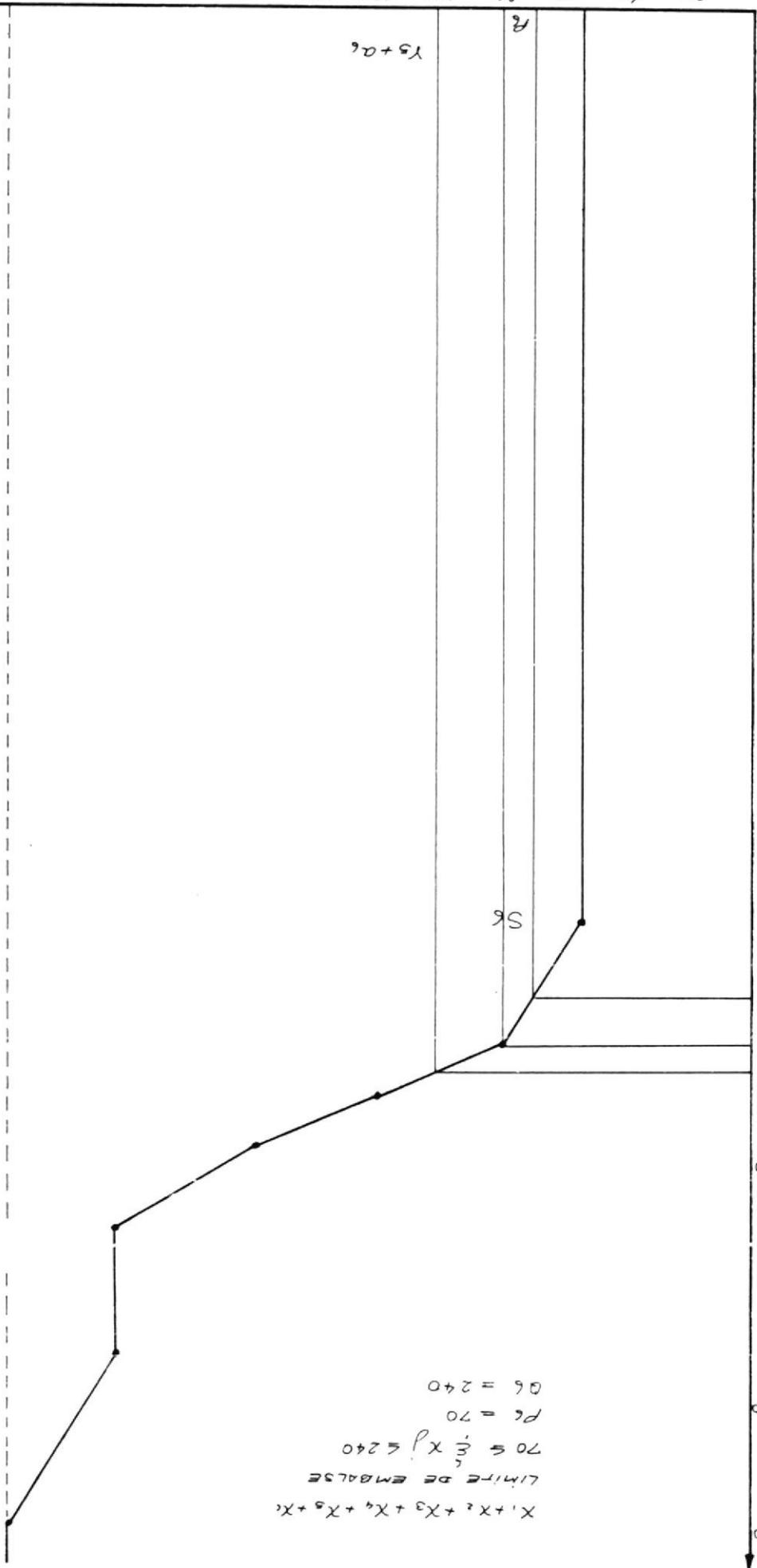
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280

$Q_6 = 96$

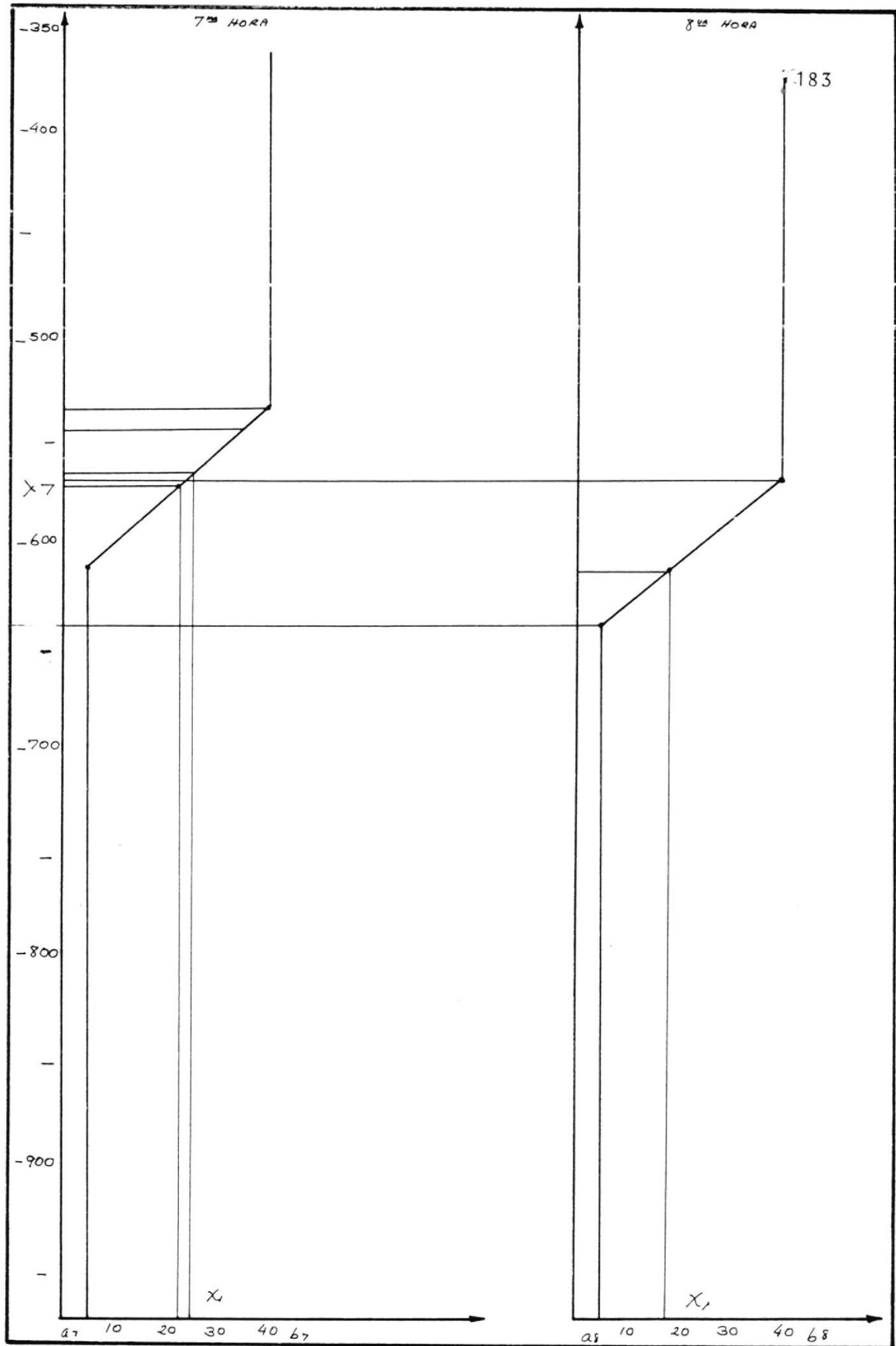
$Y_5 + Q_6$

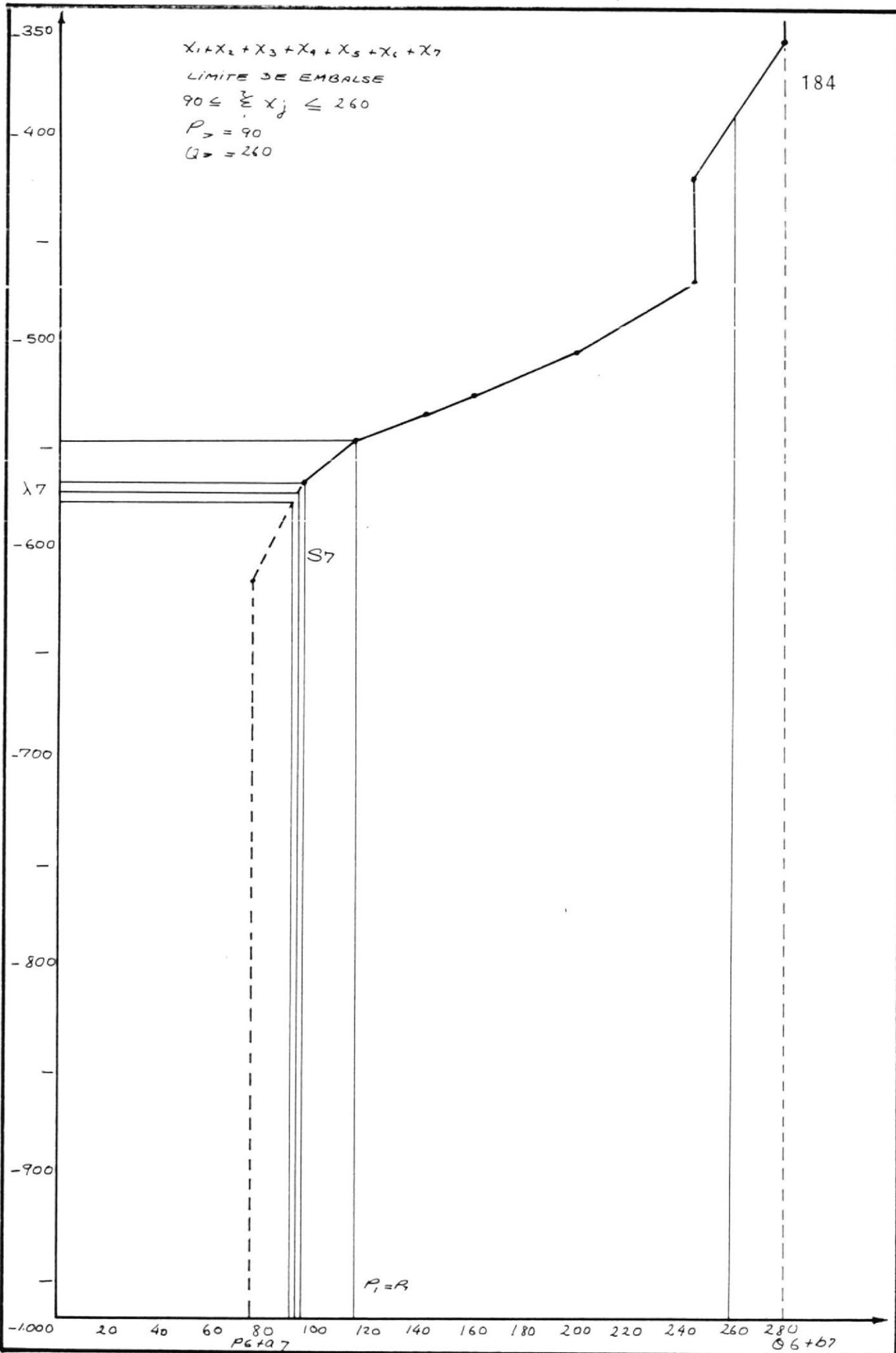
R

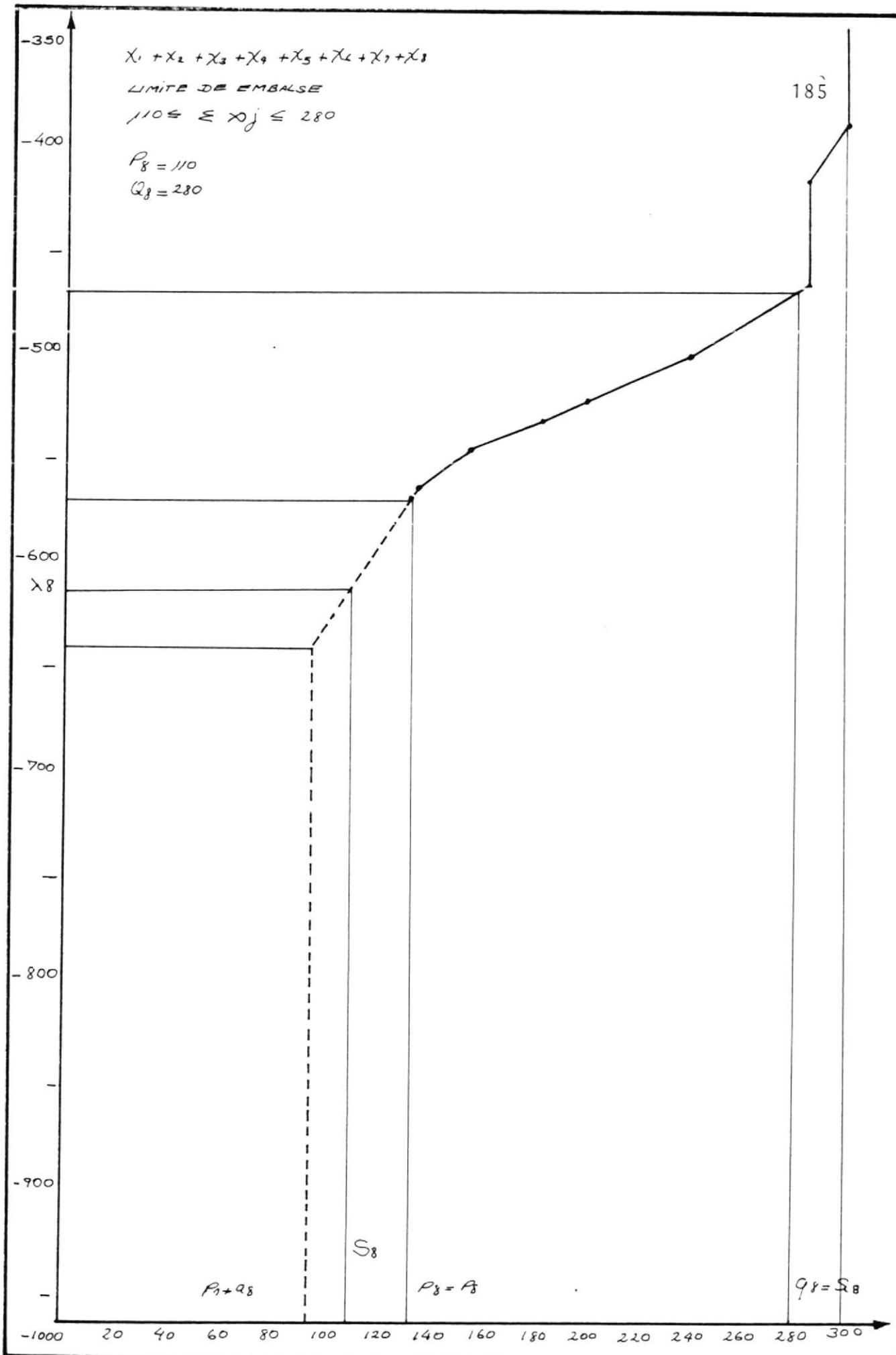
-900
-800
-700
-600
-500
-400
-350

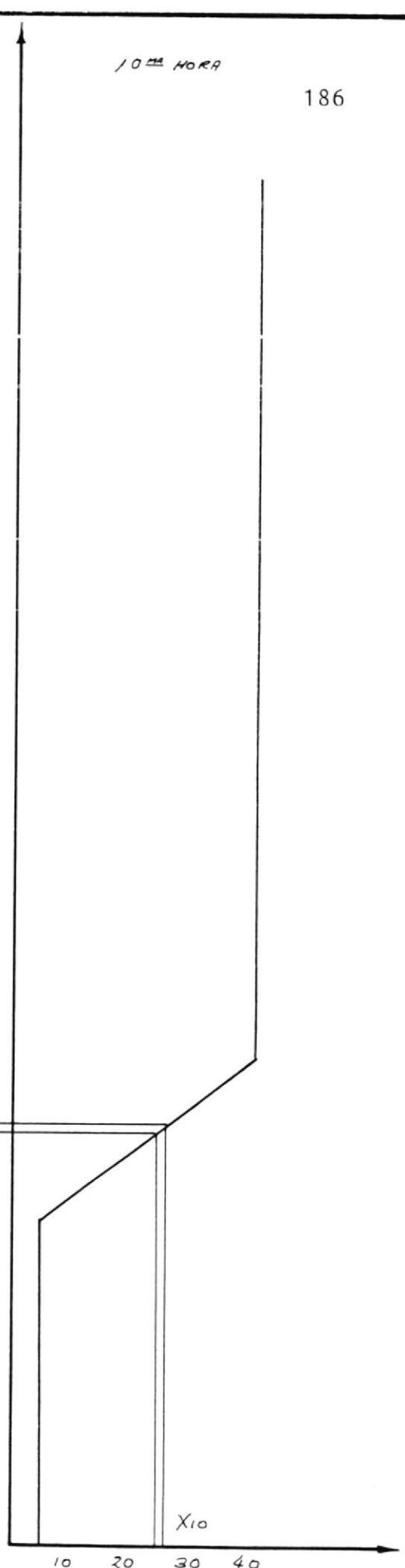
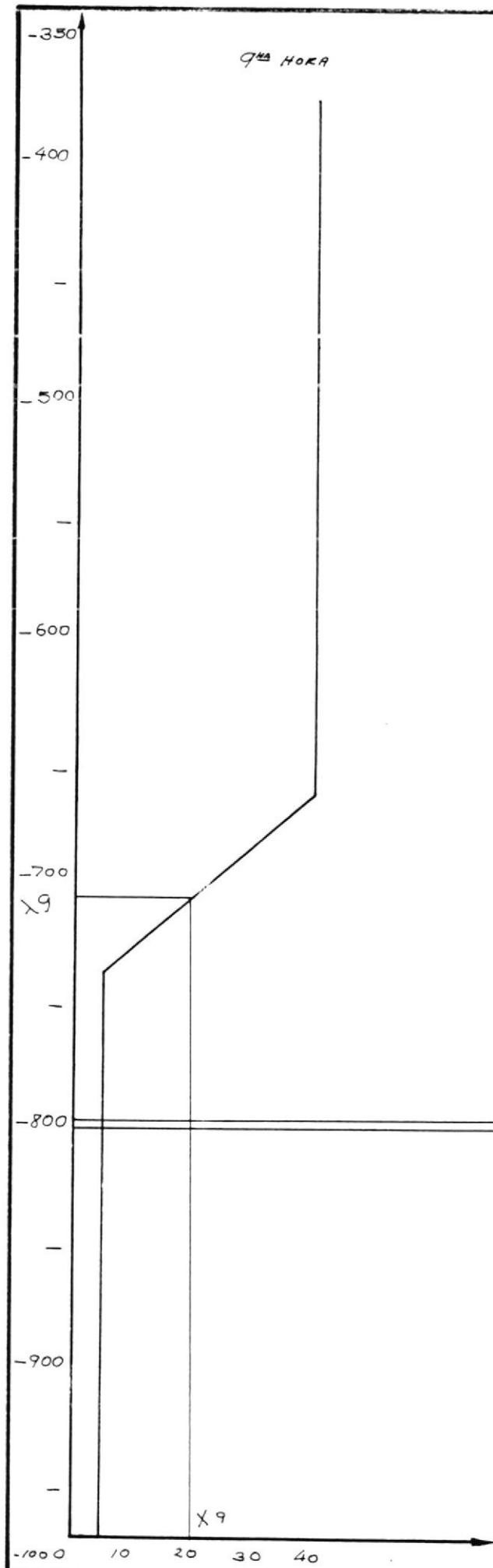


$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
 LIMITE DE EMBAISSE
 $70 \leq \sum X_j \leq 240$
 $P_6 = 70$
 $Q_6 = 240$









$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9$$

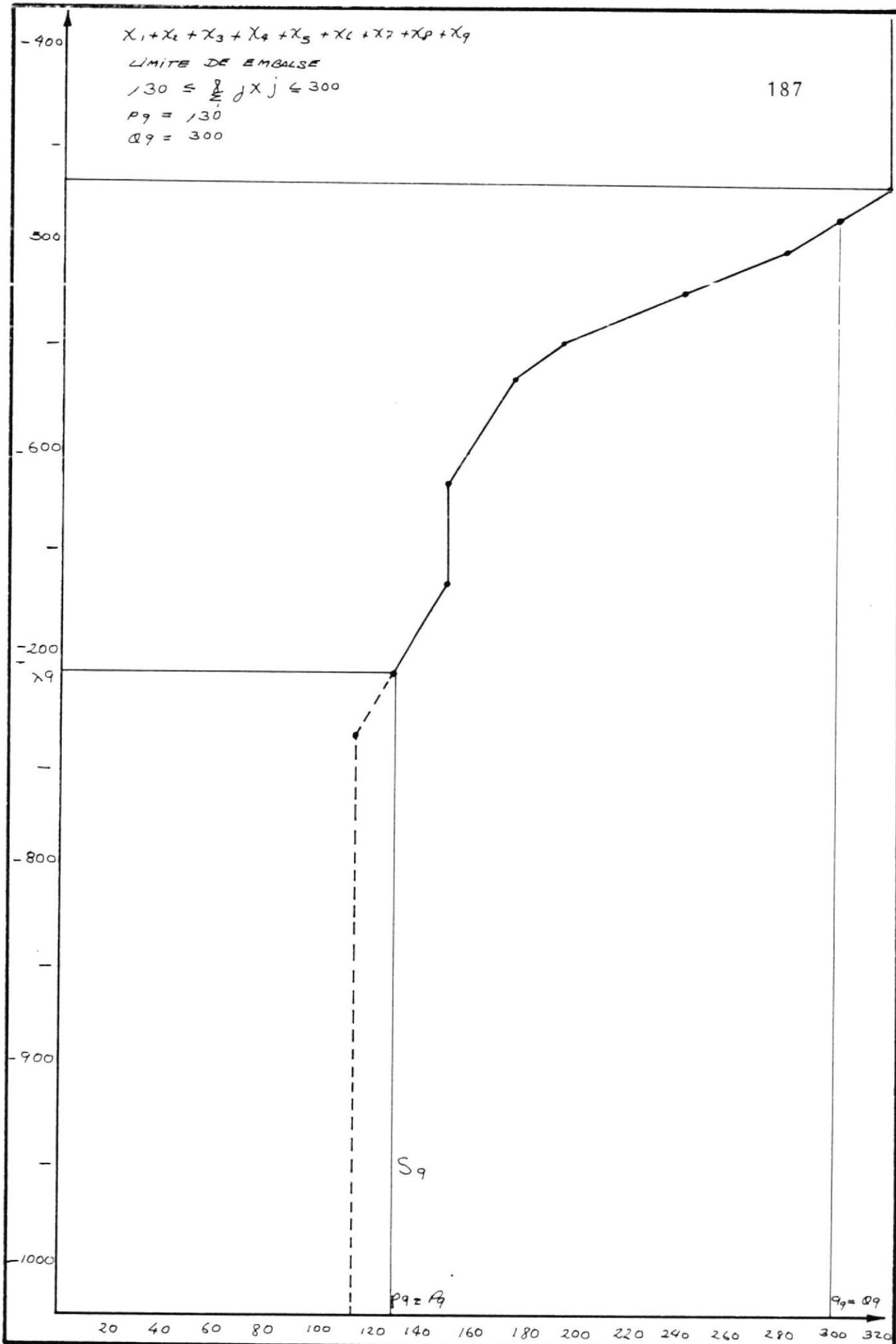
LIMITE DE EMBALSE

$$130 \leq \sum_j X_j \leq 300$$

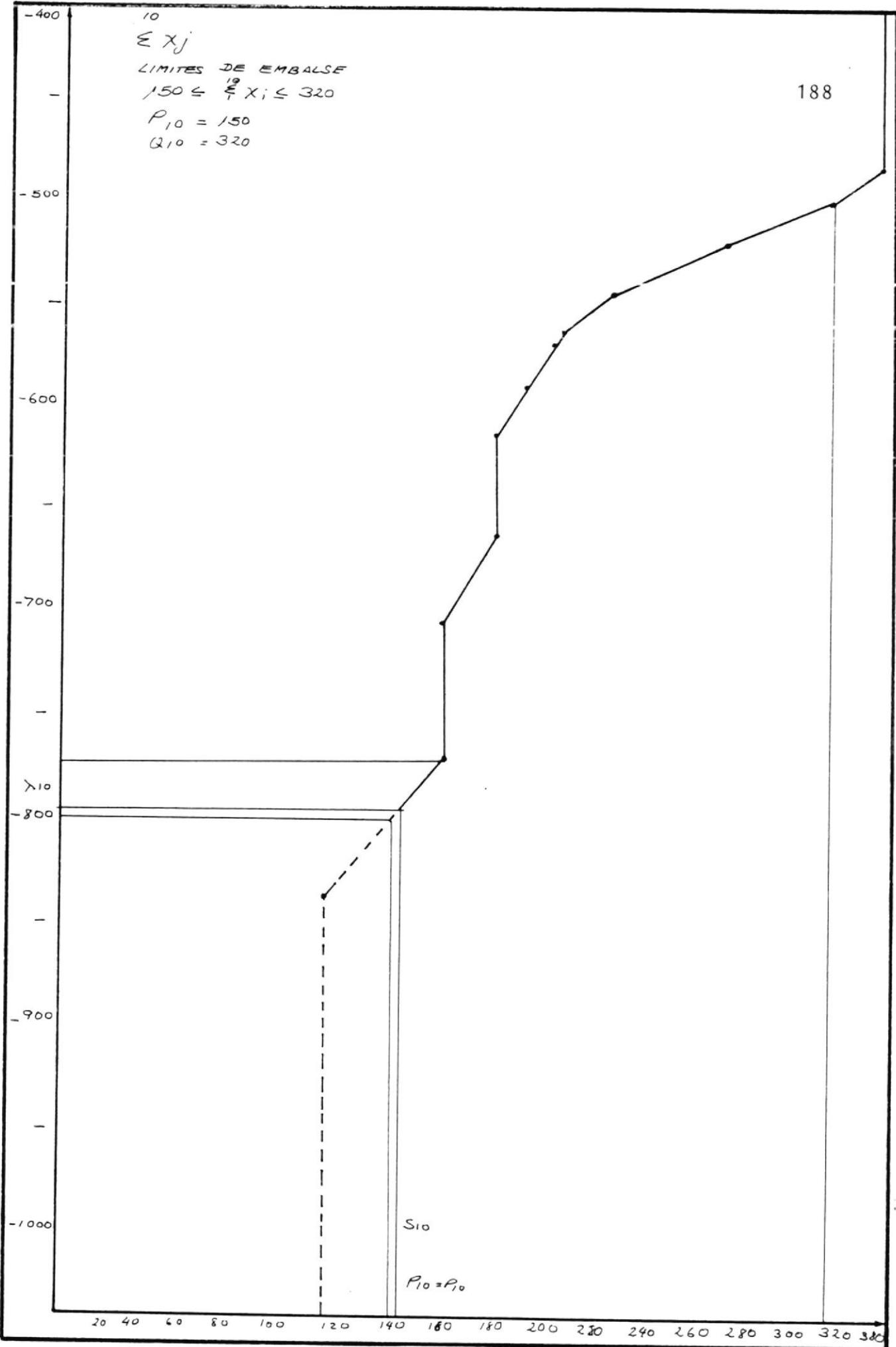
$$P_9 = 130$$

$$Q_9 = 300$$

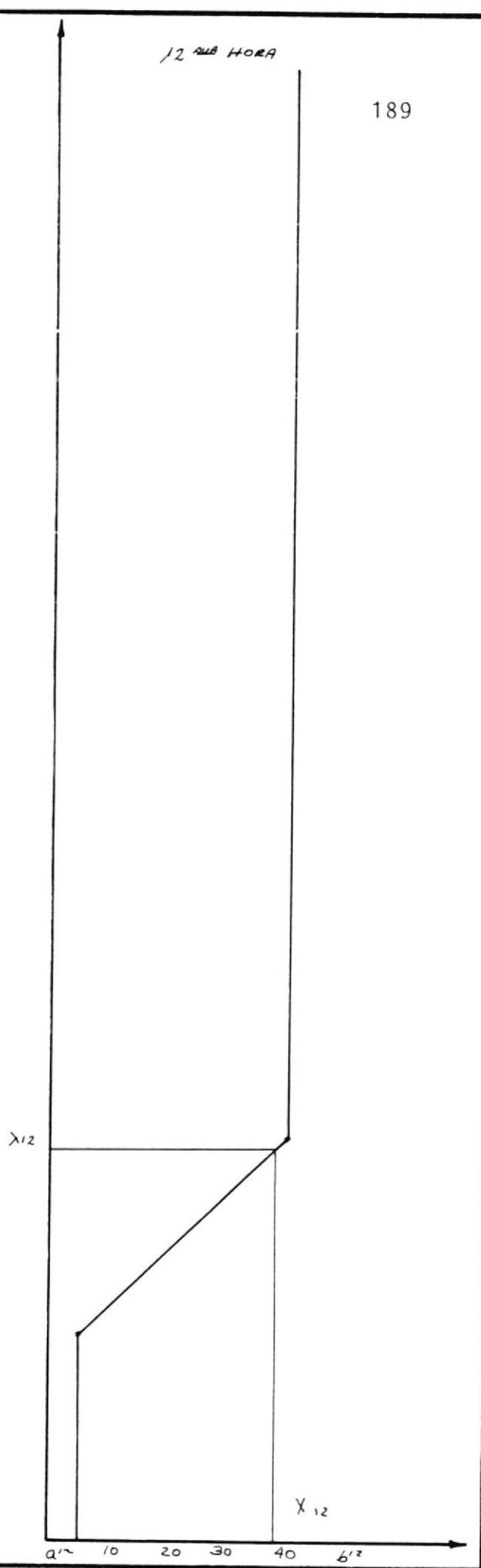
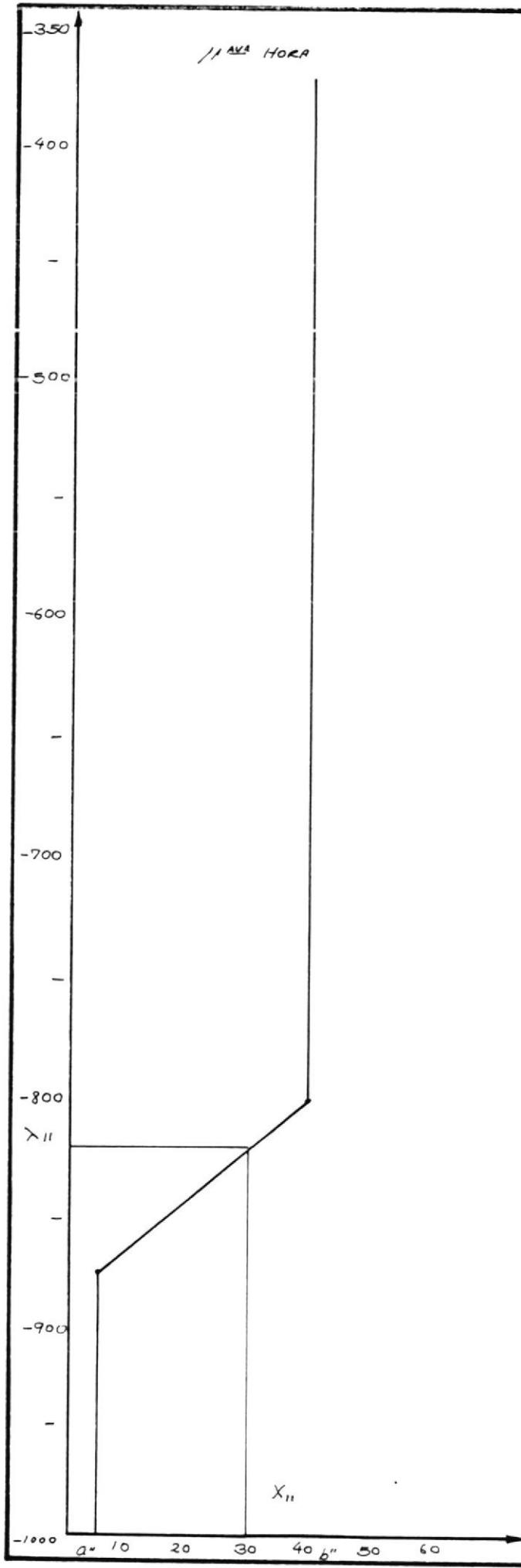
187

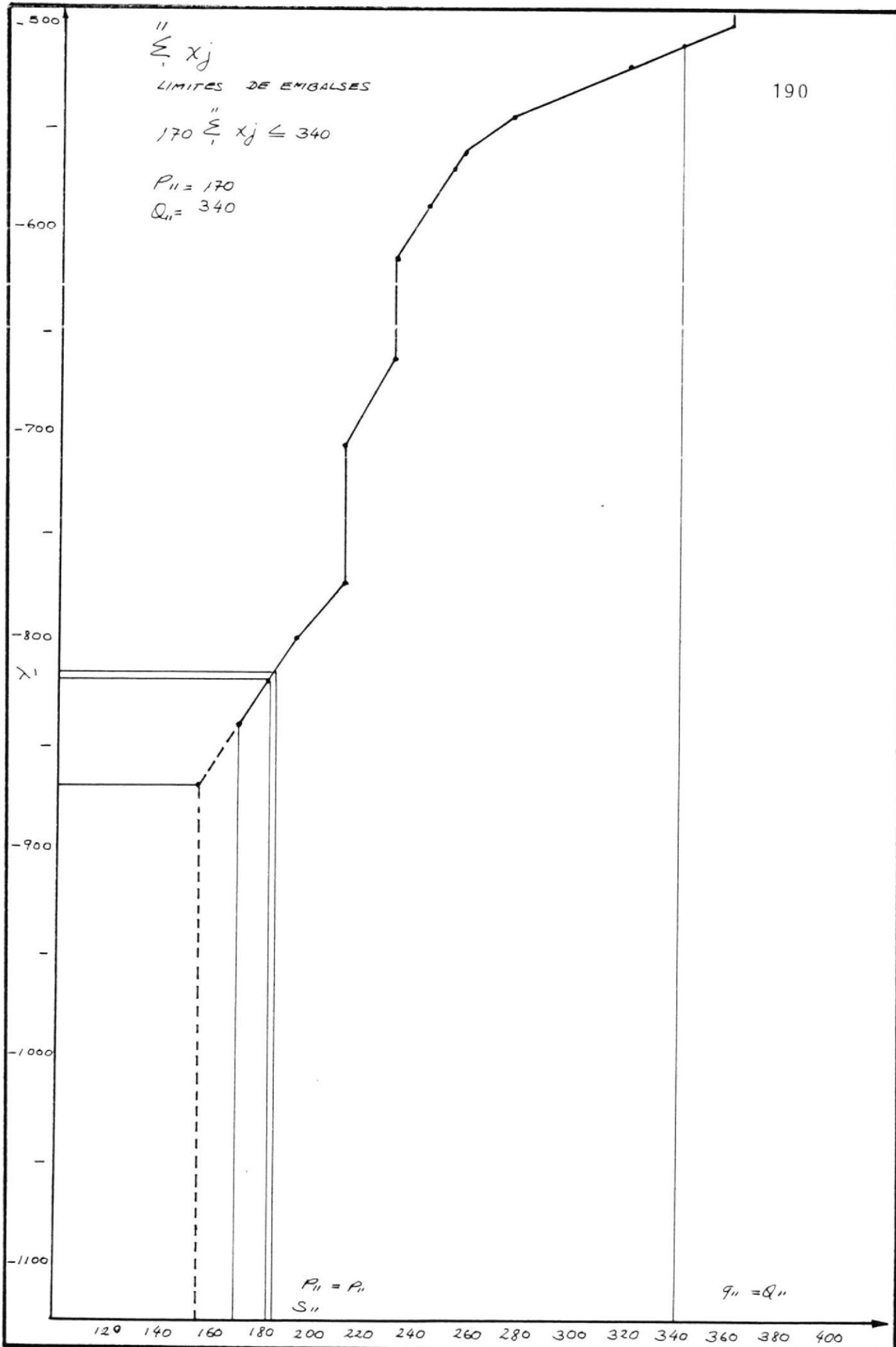


$\sum X_j$
LIMITES DE EMBALSE
 $150 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 320$
 $P_{10} = 150$
 $Q_{10} = 320$



S_{10}
 $P_{10} = P_{10}$





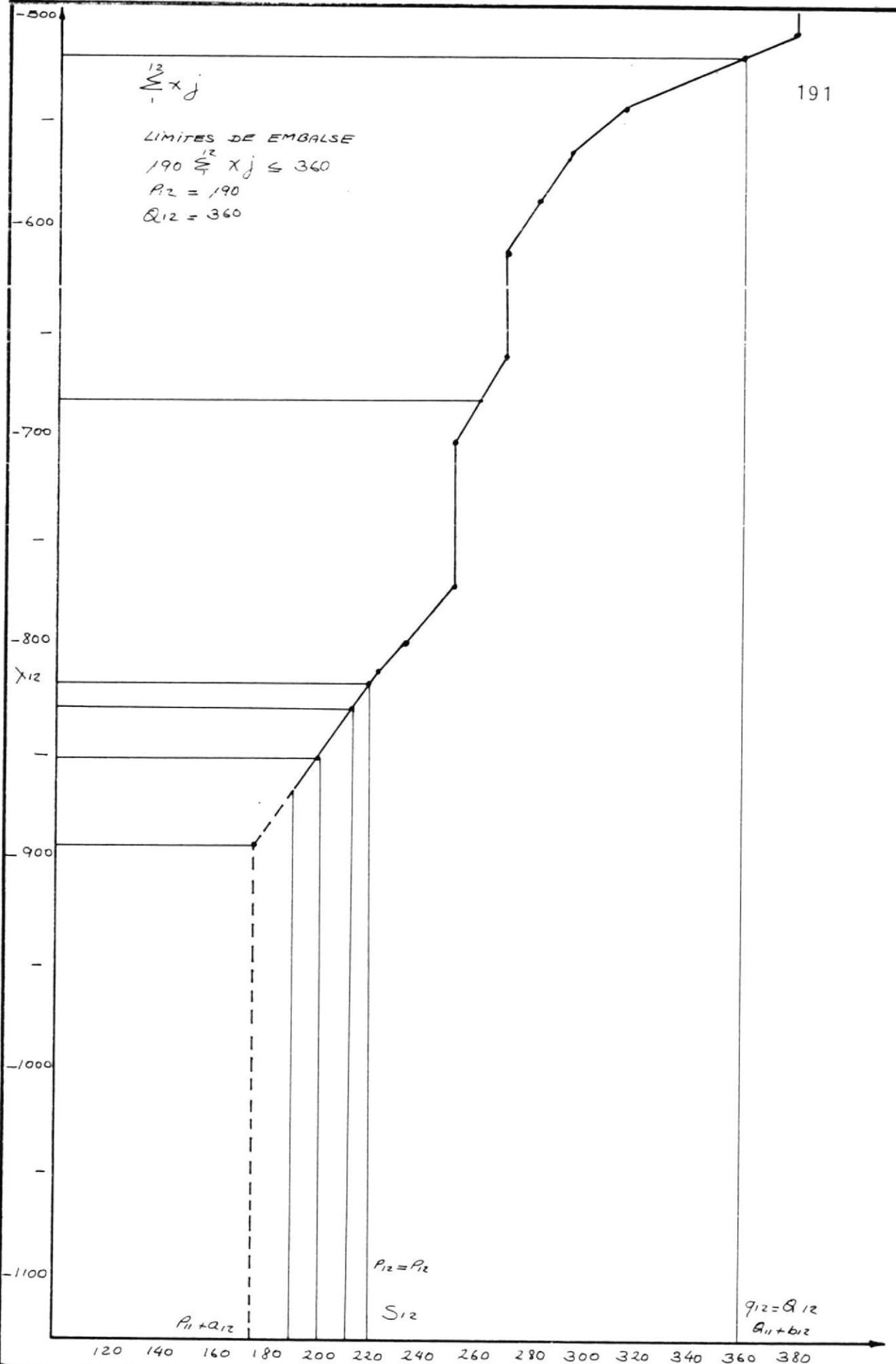
$$\sum_{j=1}^{12} x_j$$

LIMITES DE EMBALSE

$$190 \leq \sum_{j=1}^{12} x_j \leq 360$$

$$P_2 = 190$$

$$Q_{12} = 360$$



x_{12}

-900

-1000

-1100

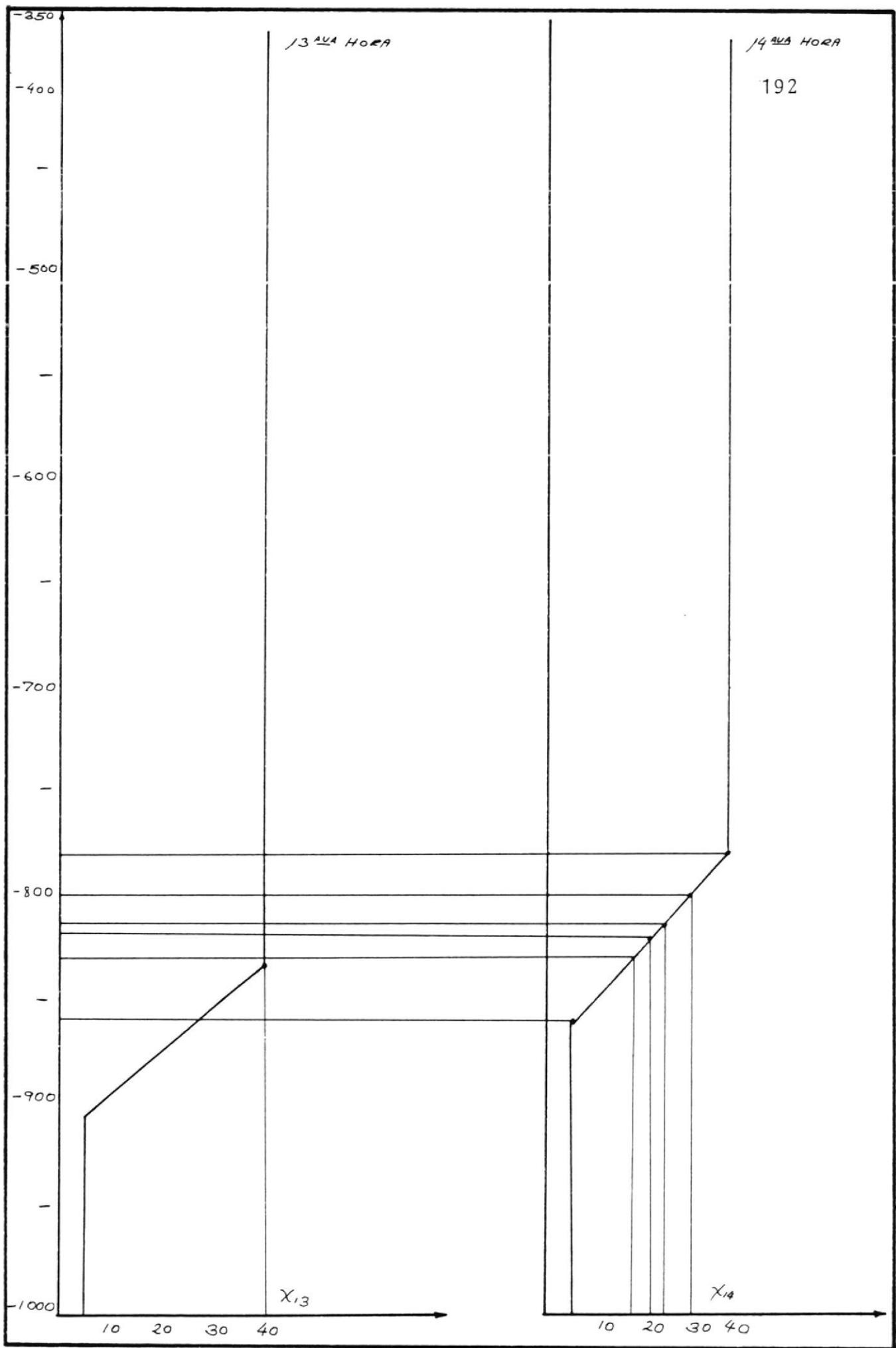
120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 380

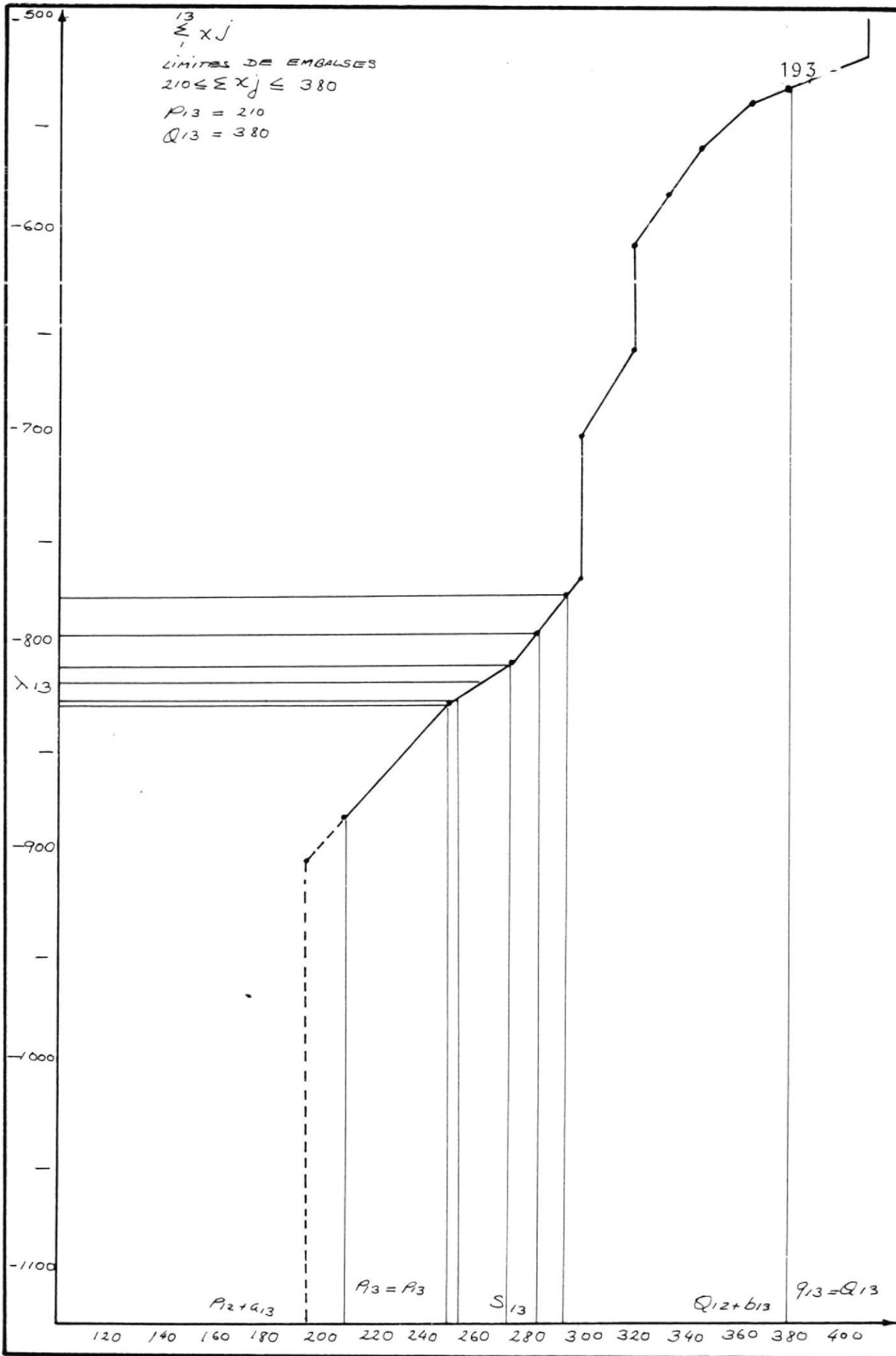
$P_{11} + Q_{12}$

$P_{12} = P_{12}$

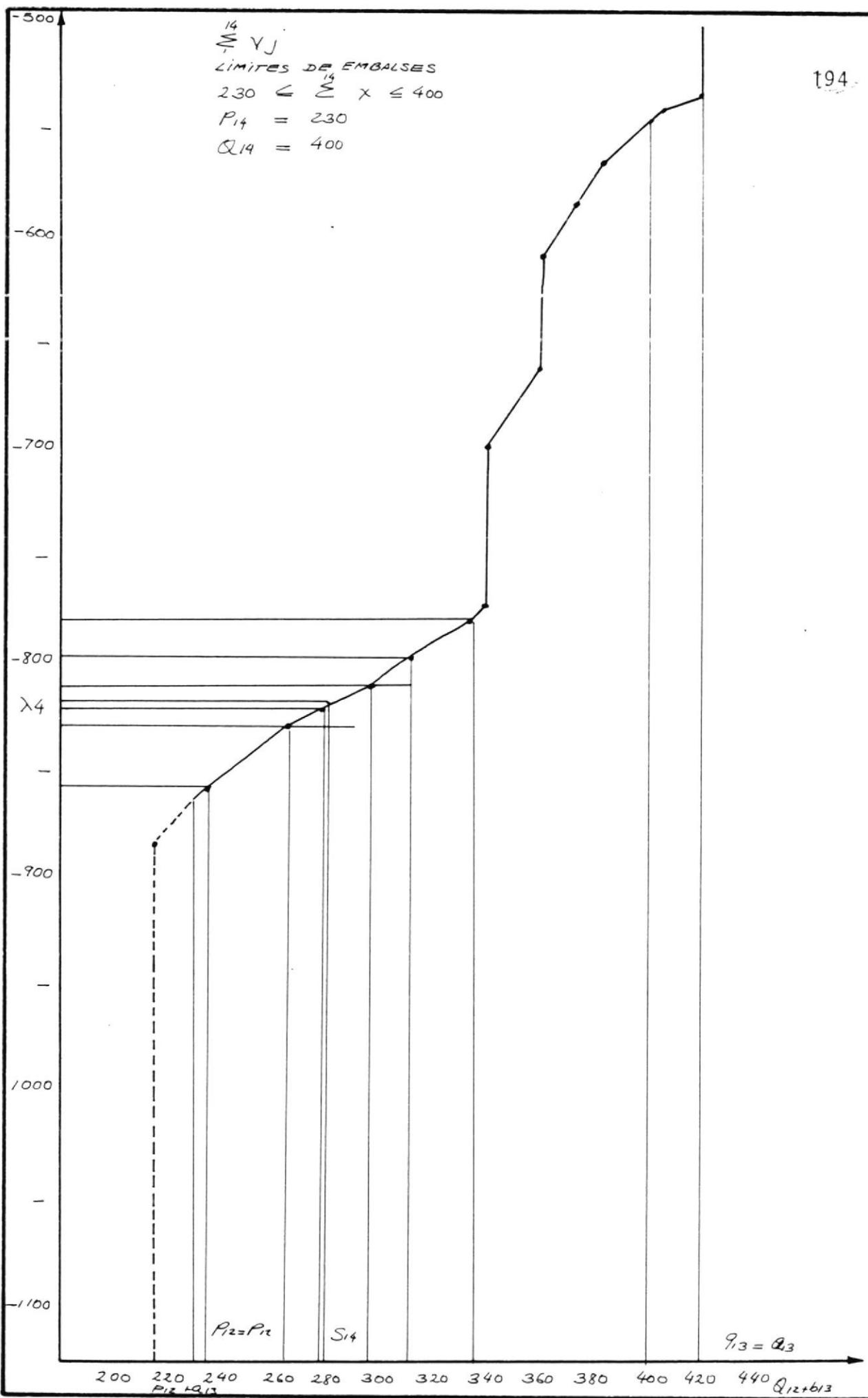
S_{12}

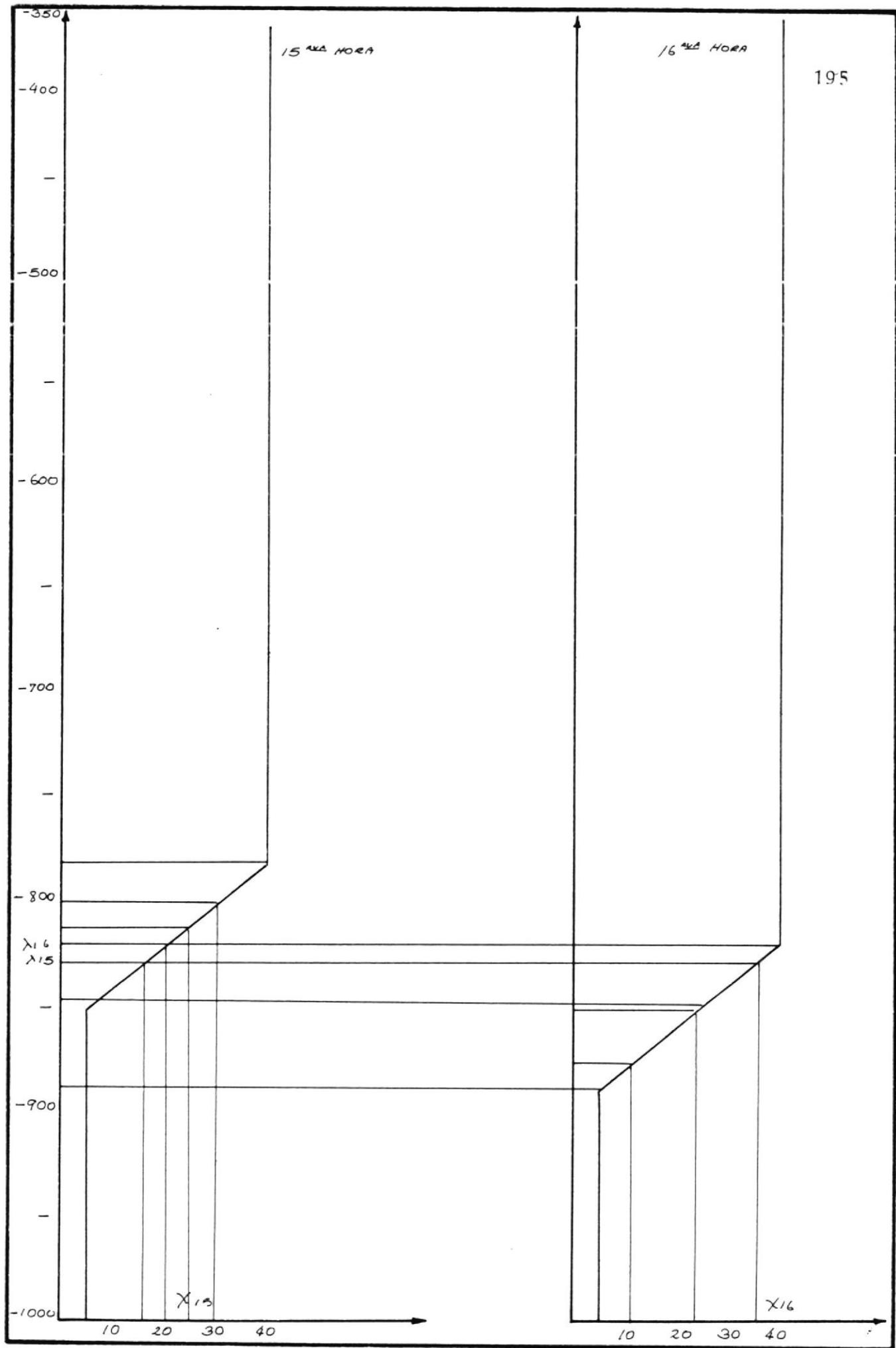
$Q_{12} = Q_{12}$
 $A_{11} + b_{12}$



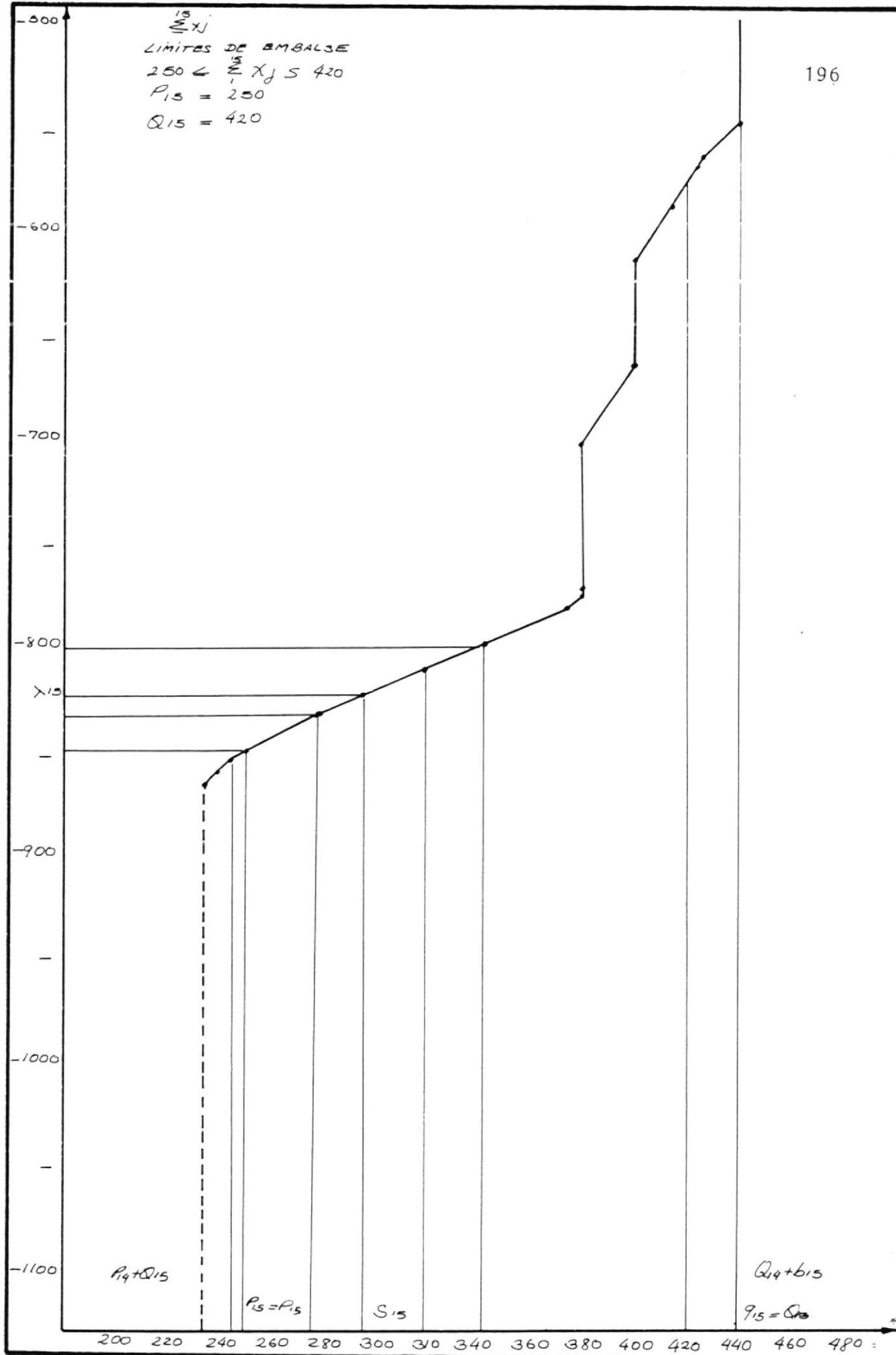


$\sum_{j=1}^{14} Y_j$
LIMITES DE EMBALSES
 $230 \leq \sum_{j=1}^{14} x_j \leq 400$
 $P_{14} = 230$
 $Q_{14} = 400$



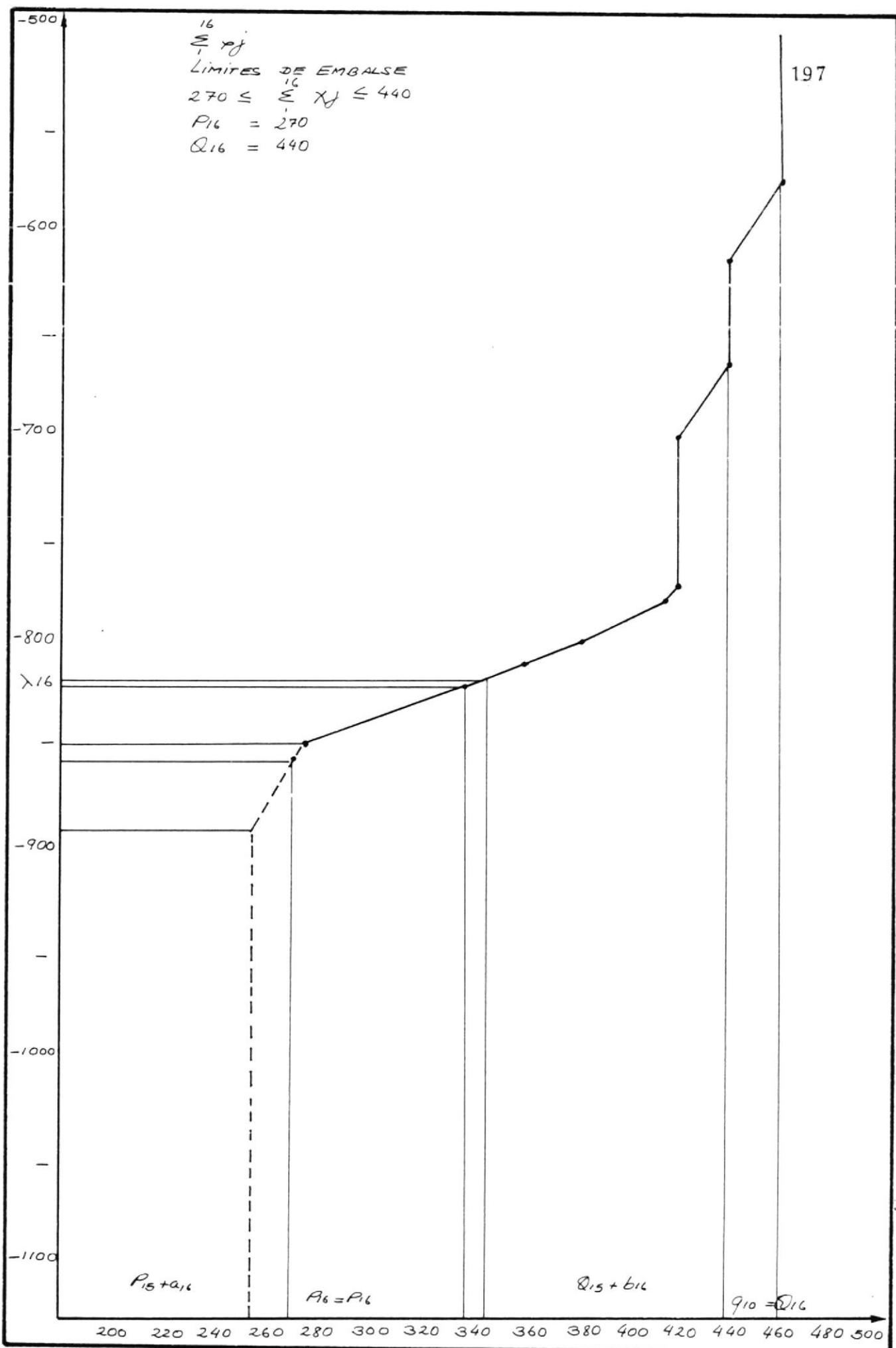


$\sum_{j=1}^{15} X_j$
 LIMITE DE AMBALSE
 $250 \leq \sum_{j=1}^{15} X_j \leq 420$
 $P_{15} = 250$
 $Q_{15} = 420$



$\sum_{j=1}^{16} x_j$
 LIMITE DE ENGARSE
 $270 \leq \sum_{j=1}^{16} x_j \leq 440$
 $P_{16} = 270$
 $Q_{16} = 440$

197



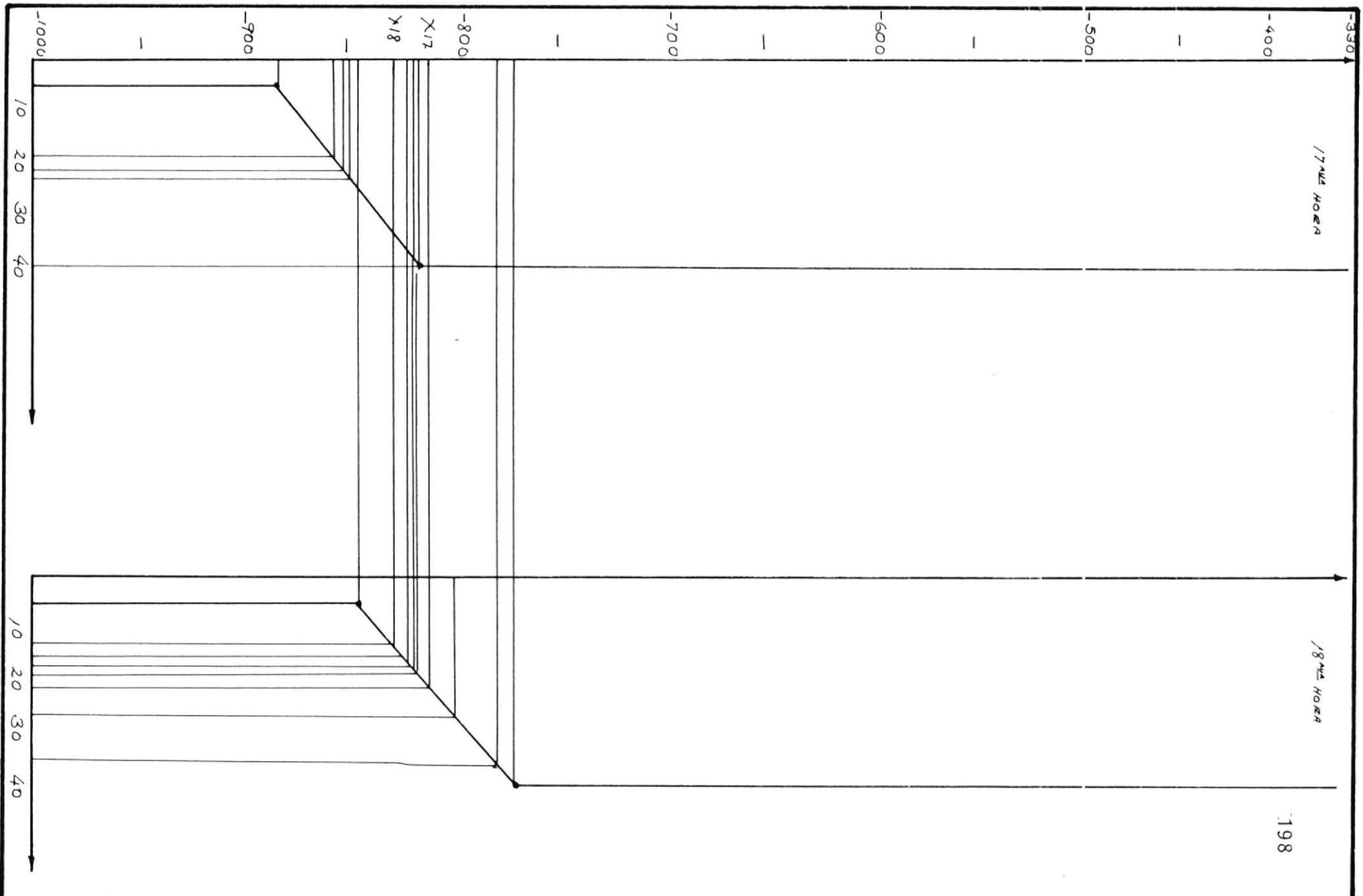
$P_{15} + a_{16}$

$A_6 = P_{16}$

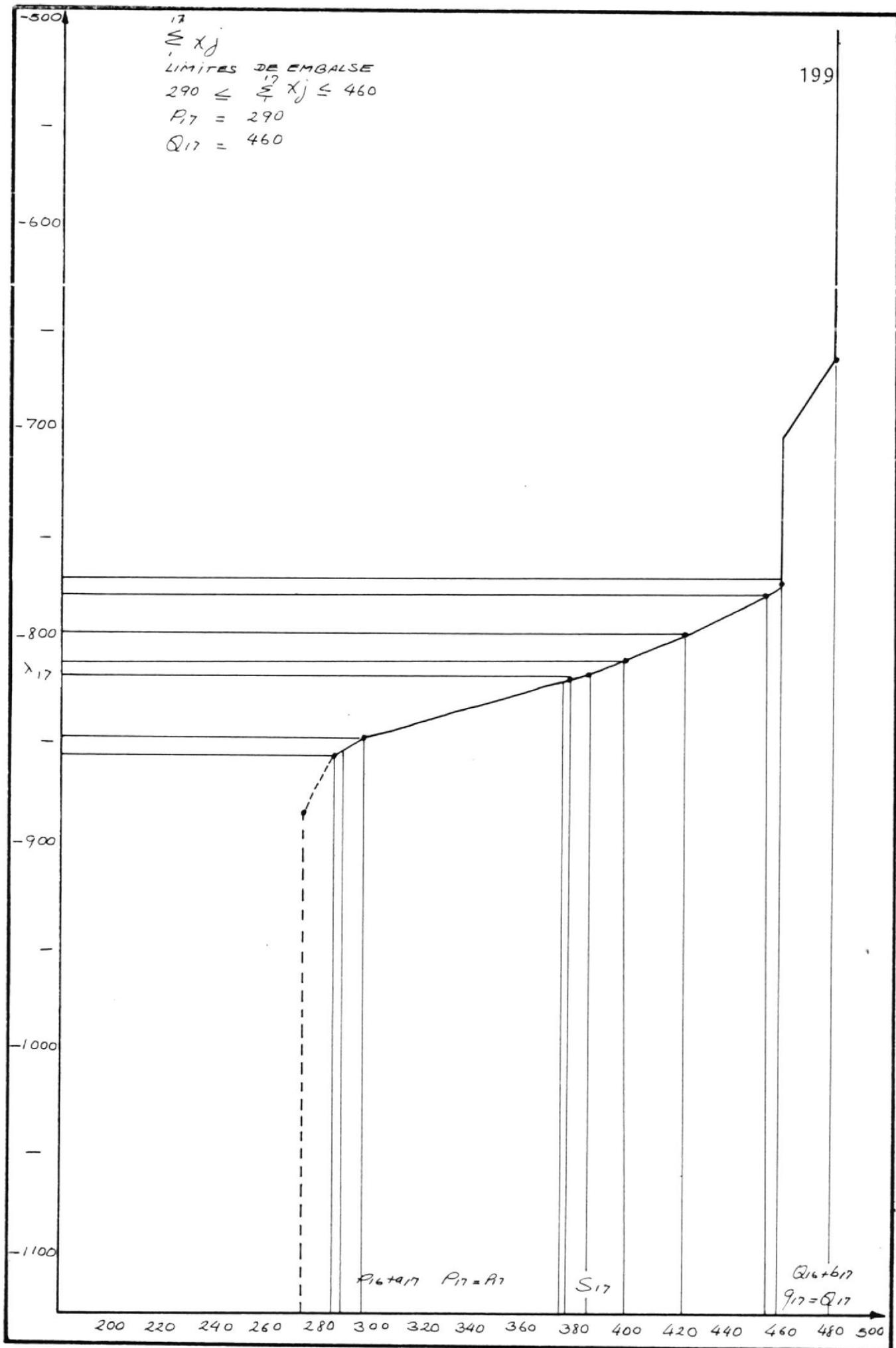
$Q_{15} + b_{16}$

$q_{10} = Q_{16}$

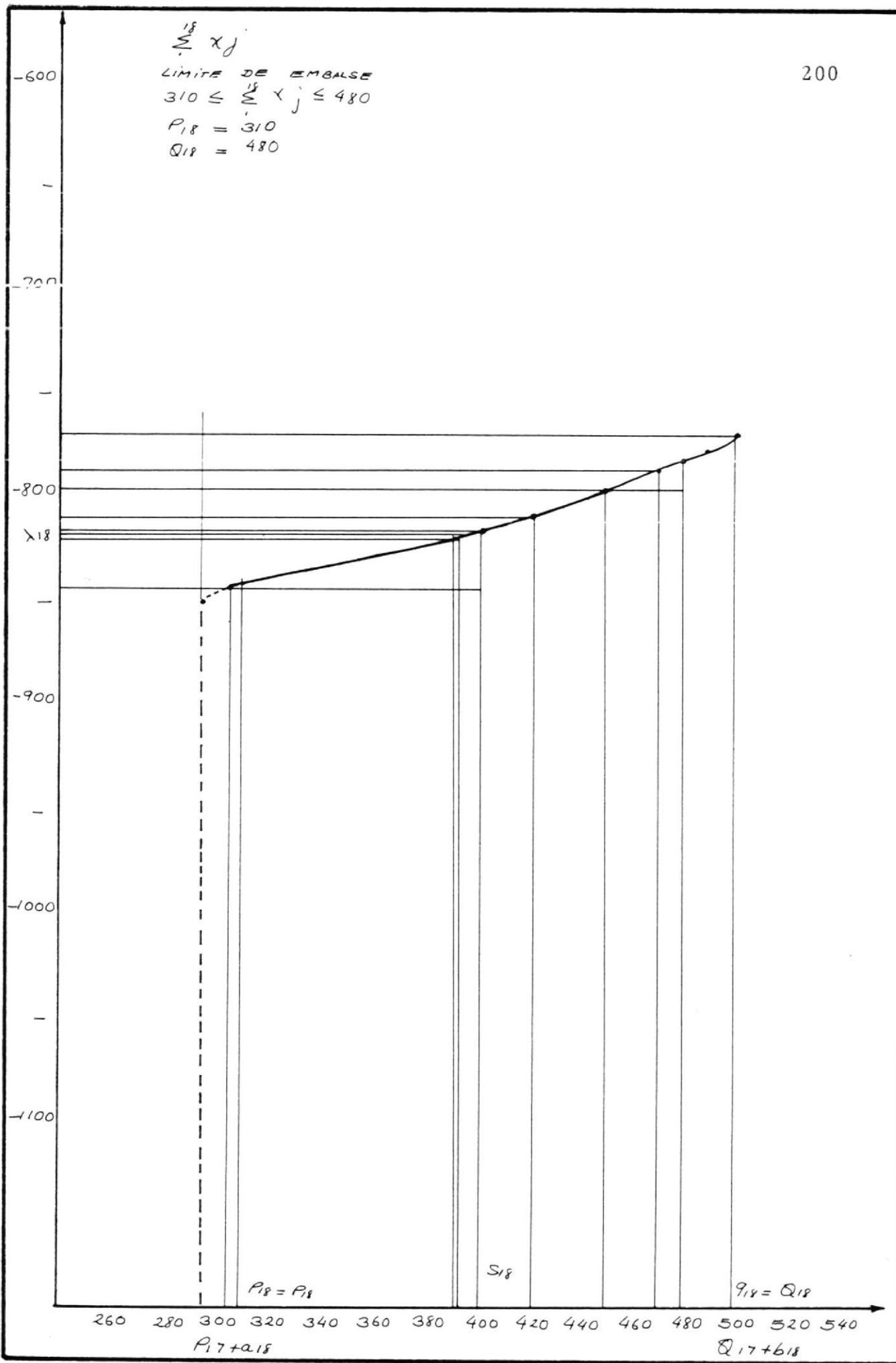
200 220 240 260 280 300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500



$\sum_{j=1}^{17} x_j$
LIMITE DE ENGARSE
 $290 \leq \sum_{j=1}^{17} x_j \leq 460$
 $P_{17} = 290$
 $Q_{17} = 460$



$\sum_{j=1}^{18} x_j$
LIMITE DE EMBALSE
 $310 \leq \sum_{j=1}^{18} x_j \leq 480$
 $P_{18} = 310$
 $Q_{18} = 480$

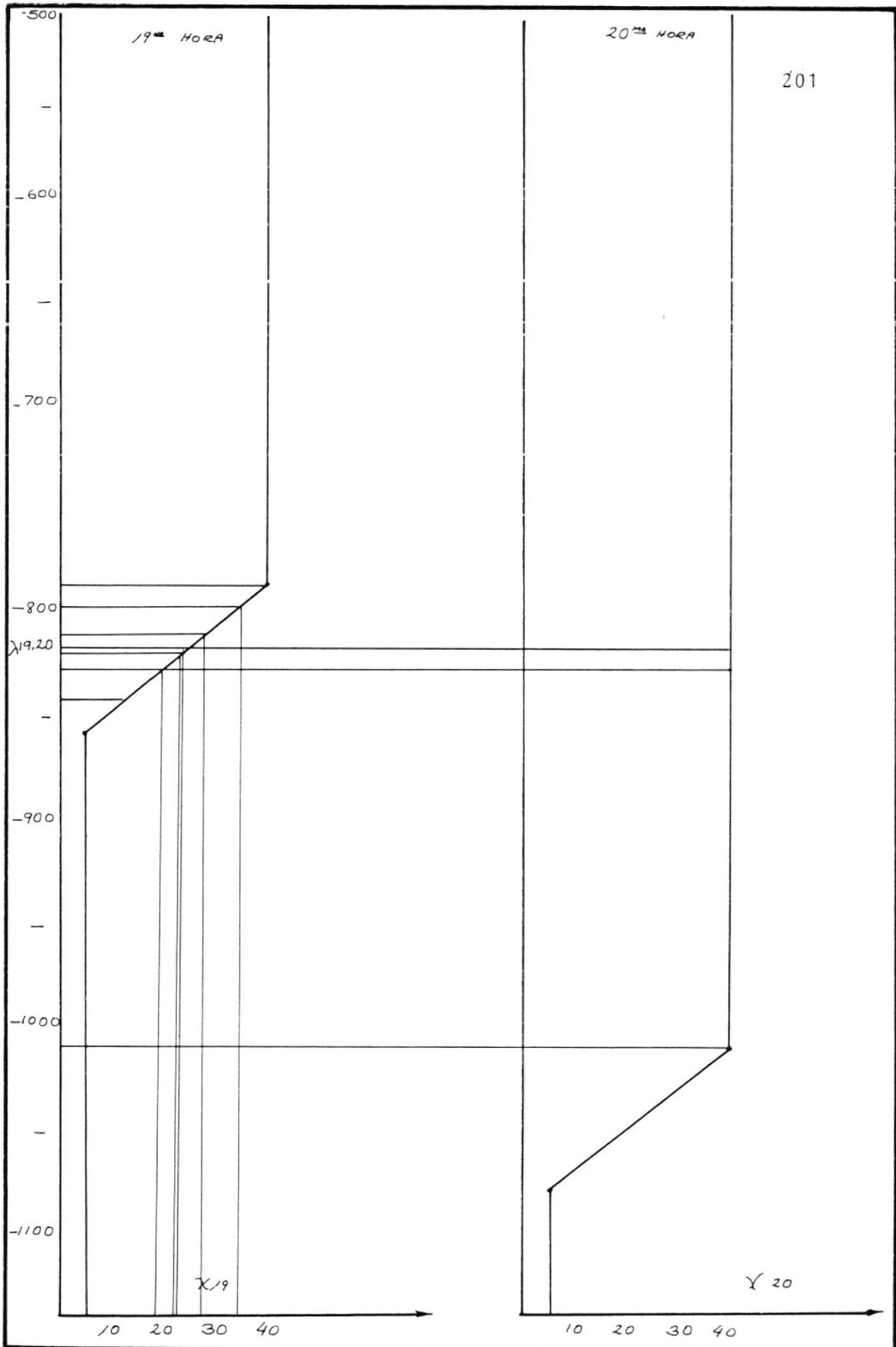


$P_{18} = P_{18}$

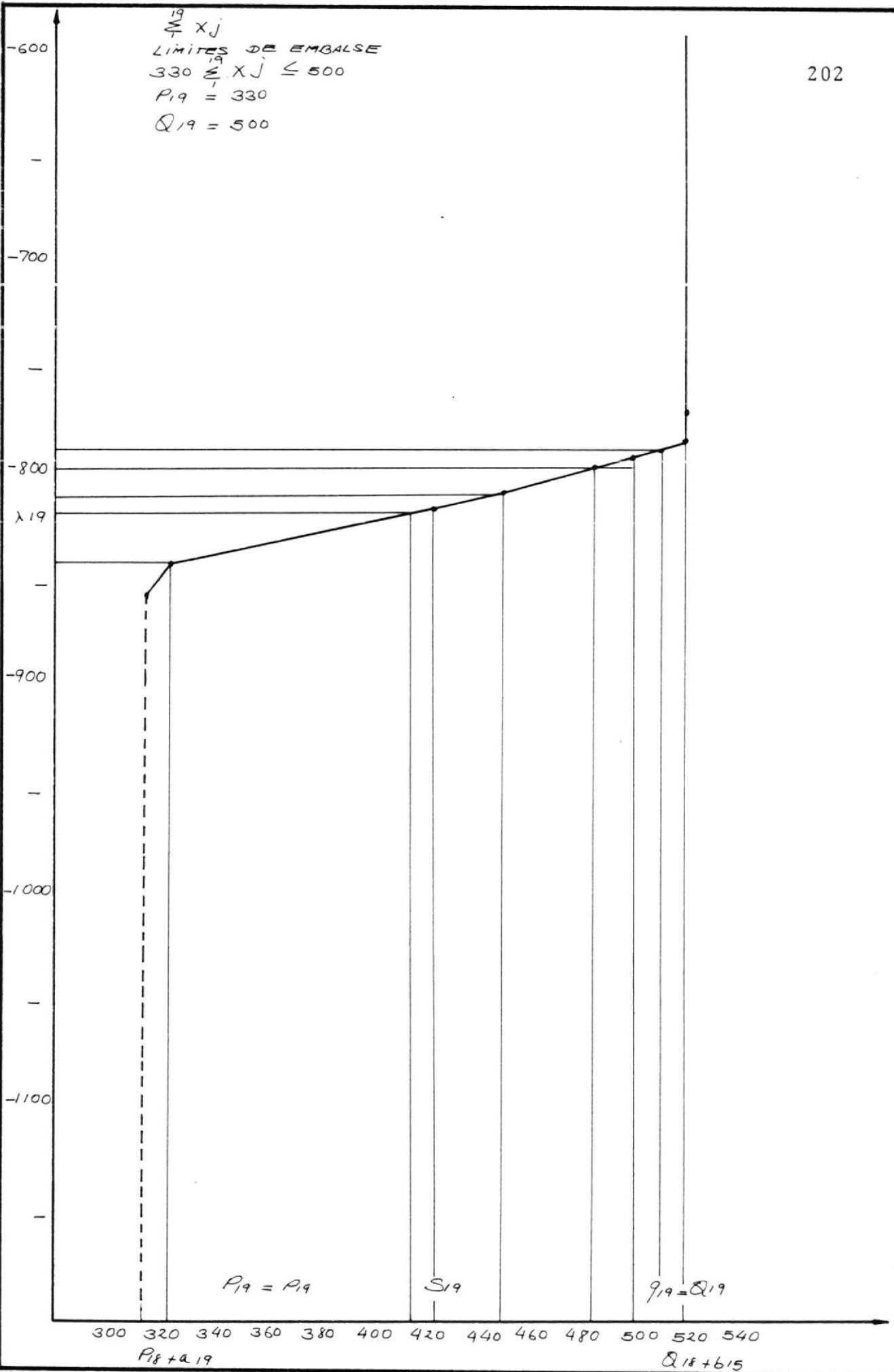
S_{18}

$Q_{18} = Q_{18}$

260 280 300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500 520 540
 $P_{17+a_{18}}$ $Q_{17+b_{18}}$



$\sum_{j=1}^{19} X_j$
LIMITES DE EMBALSE
 $330 \leq \sum_{j=1}^{19} X_j \leq 500$
 $P_{19} = 330$
 $Q_{19} = 500$



$P_{19} = P_{19}$

S_{19}

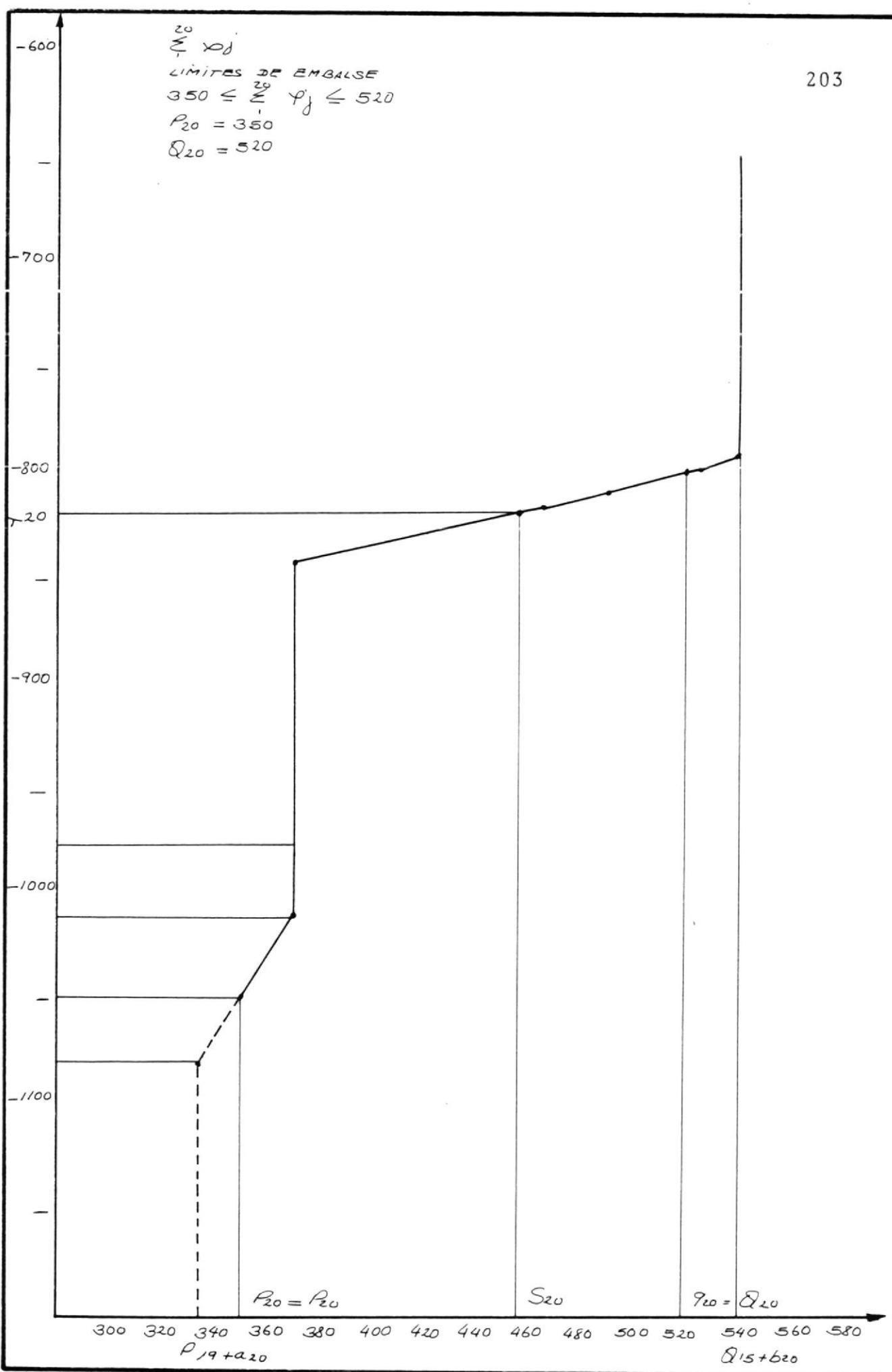
$Q_{19} = Q_{19}$

300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500 520 540

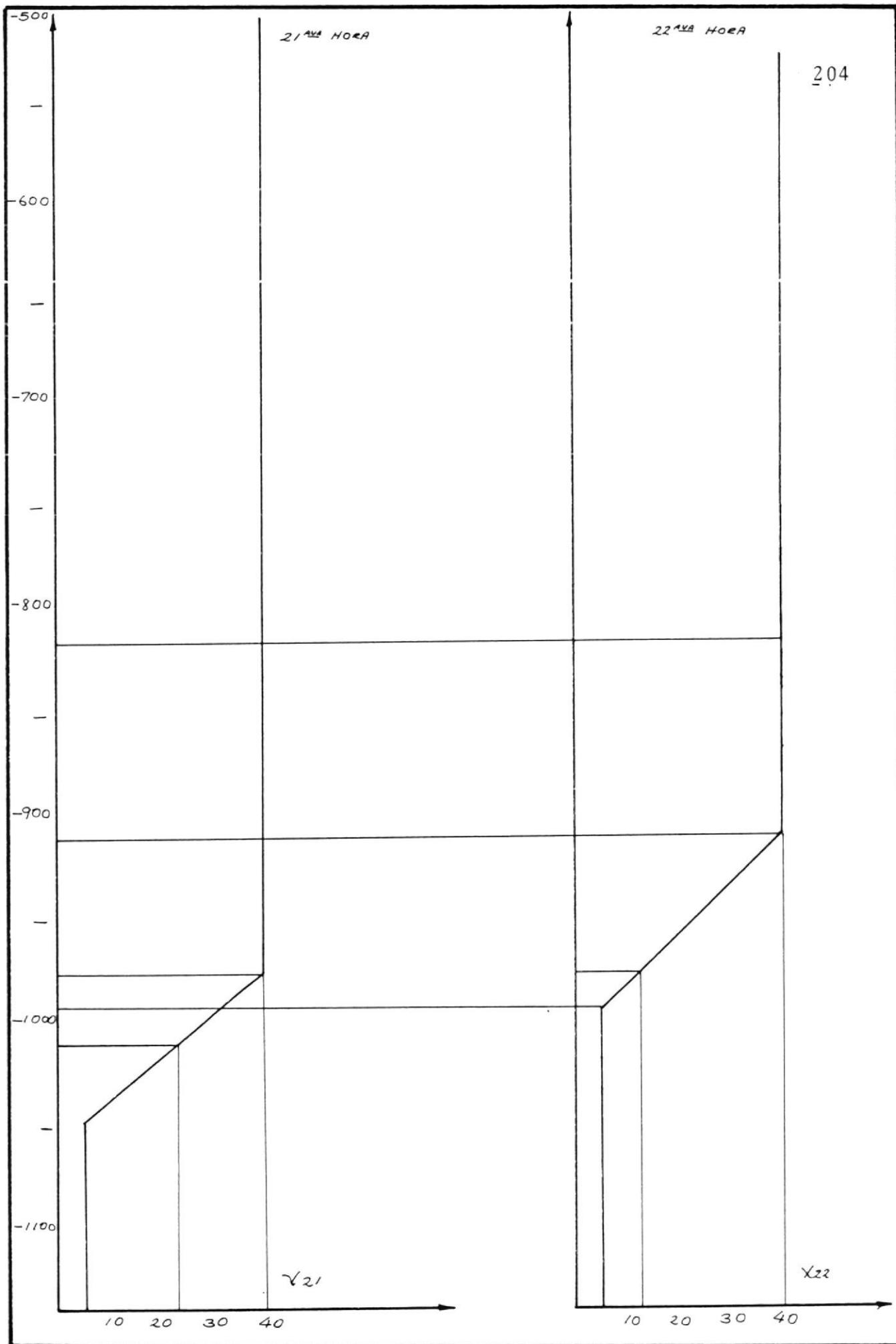
$P_8 + a_{19}$

$Q_{18} + b_{15}$

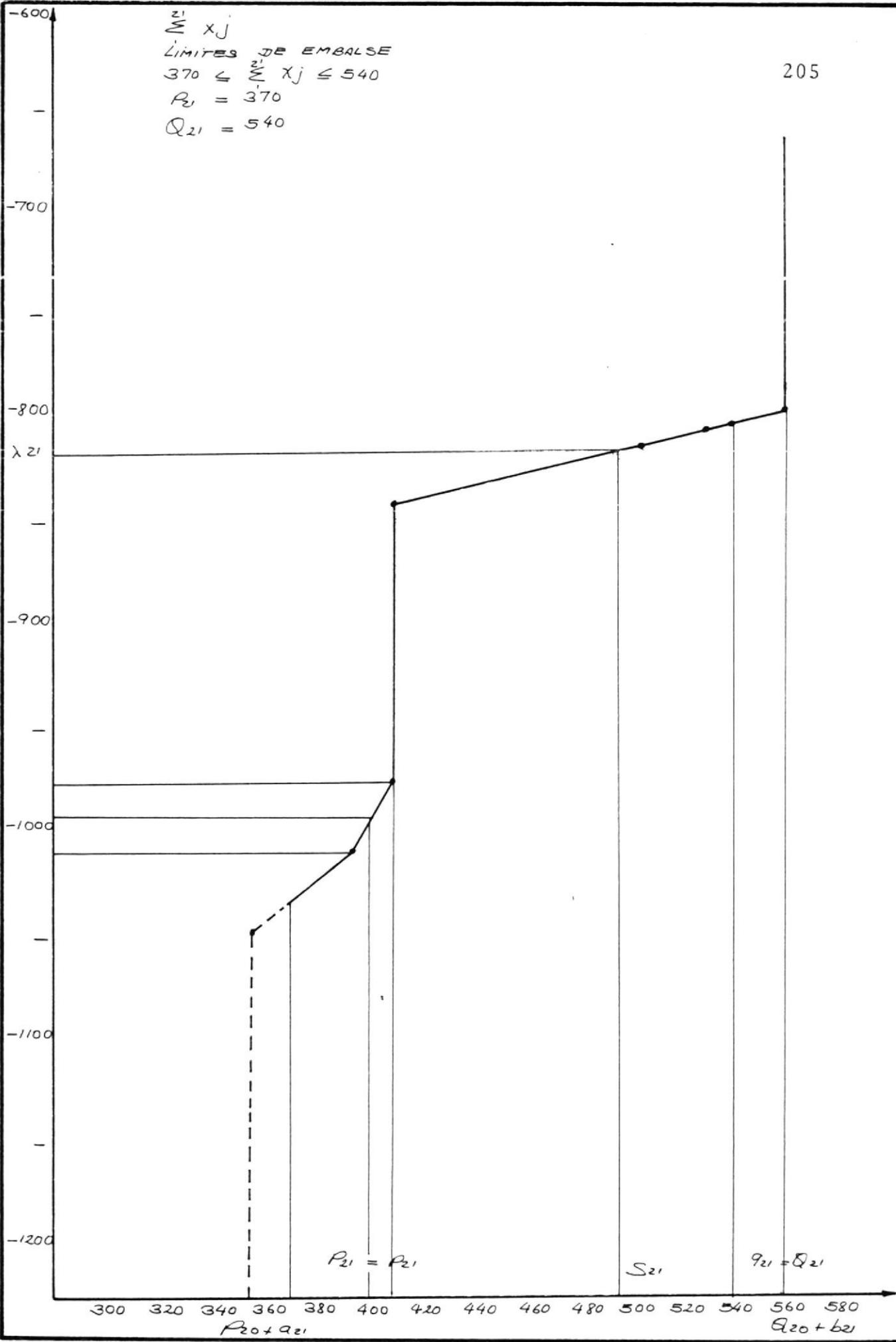
$\sum_{j=1}^{20} x_j$
 LIMITES DE EMBAISE
 $350 \leq \sum_{j=1}^{20} y_j \leq 520$
 $P_{20} = 350$
 $Q_{20} = 520$



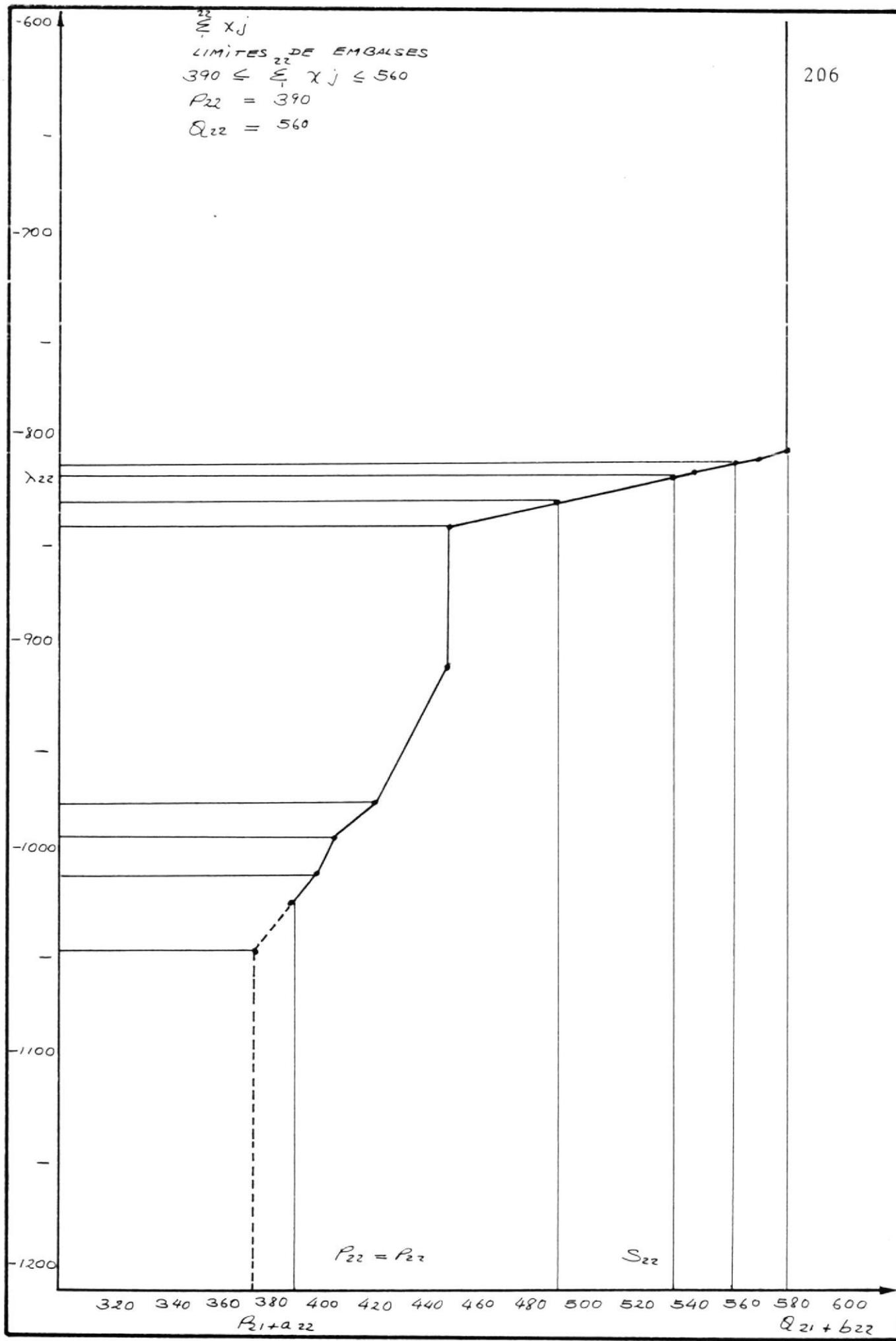
$P_{19} + a_{20}$ $P_{20} = P_{20}$ S_{20} $Q_{15} + b_{20}$ $Q_{20} = Q_{20}$

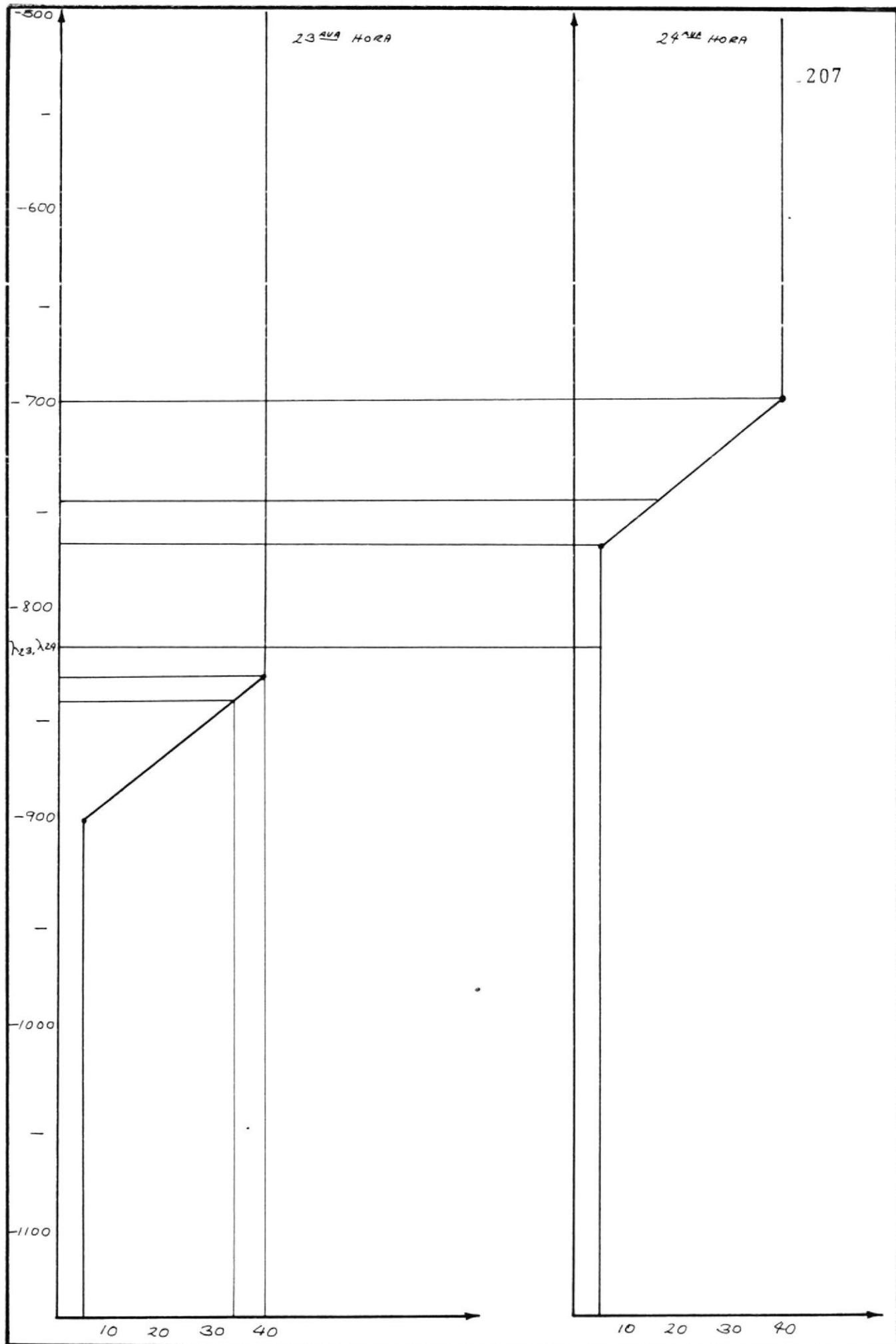


$\sum_{j=1}^{21} x_j$
 LIMITEs DE EMBALSE
 $370 \leq \sum_{j=1}^{21} x_j \leq 540$
 $P_{21} = 370$
 $Q_{21} = 540$

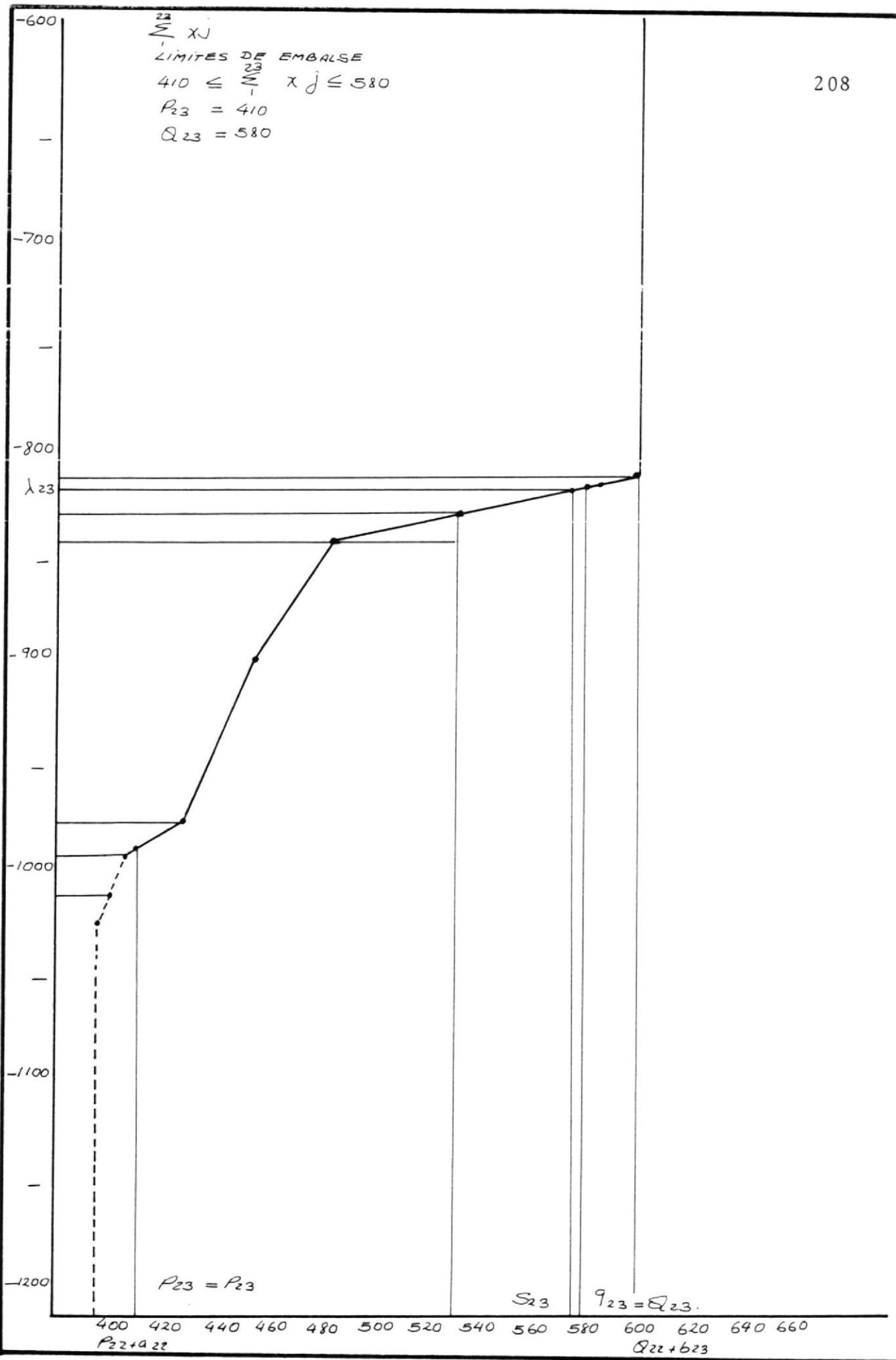


$\sum_{j=1}^{22} x_j$
LIMITES DE EMBAISES
 $390 \leq \sum_{j=1}^{22} x_j \leq 560$
 $P_{22} = 390$
 $Q_{22} = 560$





$\sum_{j=1}^{22} x_j$
 LIMITES DE EMBALSE
 $410 \leq \sum_{j=1}^{23} x_j \leq 580$
 $P_{23} = 410$
 $Q_{23} = 580$



$\sum_{j=1}^{24} X_j$
LIMITES DE EMBALSE
 $430 \leq \sum_{j=1}^{24} X_j \leq 600$
 $P_{23} \leq 430$
 $Q_{23} = 600$

