ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2017	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	26/junio/2017

Examen:	
Lecciones:	
Deberes:	
Total:	

S O L U C I Ó N y R Ú B R I C A

1) (5 PUNTOS) Identifique el tipo de indeterminación y luego calcule:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{sen^2(x)}}$$

Solución:

Se evalúa la tendencia para identificar el tipo de indeterminación:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{sen^2(x)}} = \sqrt{\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{sen^2(x)}} = \sqrt{\frac{1-1}{0^2}} = \sqrt{\frac{0}{0}}$$

Se realiza el trabajo algebraico correspondiente:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{sen^2(x)}} = \sqrt{\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{sen^2(x)} \cdot \frac{1 + cos(x)}{1 + cos(x)}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2(x)}{sen^2(x)} \cdot \frac{1}{1 + cos(x)}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{sen^2(x)}}{\cancel{sen^2(x)}} \cdot \frac{1}{1 + cos(x)}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + cos(x)}} = \sqrt{\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante identifica el tipo de indeterminación, racionaliza correctamente, aplica límites conocidos y el teorema de sustitución.	**No logra identificar el tipo de indeterminación y tampoco resuelve el límite.**	**Identifica el tipo de indeterminación, pero no identifica que debe racionalizar o racionaliza mal.**	**Identifica el tipo de indeterminación, racionaliza correctamente, pero no resuelve el límite.**	**Identifica la indetermina-ción, racionaliza y resuelve correcta-mente el límite.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4 – 5**

2) (4 PUNTOS) Utilizando la definición de límite, demuestre que:

$$\lim_{x \to -3} (2x^2 - 4) = 14$$

Solución:

Al aplicar la definición, se debe demostrar que:

$$\forall\, \xi > 0\ \exists\, \delta > 0\ \left[0 < |x+3| < \delta \ \Rightarrow\ |(2x^2-4) - 14| < \xi\right]$$

Análisis preliminar:

$$|(2x^2-4) - 14| = |2x^2 - 18| = |2||x^2-9| = 2|(x-3)(x+3)| < \xi$$

Sea $\delta = 1 \ \Rightarrow\ |(x+3)| < 1$

Pero:

$$2|x-3| = 2|x+3-6|$$
$$2|x-3| = 2|(x+3)-6|$$
$$2|x-3| \le 2|x+3| + |-12|$$
$$2|x-3| \le 2|x+3| + 12$$
$$2|x-3| \le 2(1) + 12$$
$$2|x-3| \le 14$$

Demostración formal:

Sea $\xi > 0$, elegimos $\delta = min\left\{1, \frac{\xi}{14}\right\} = \frac{\xi}{14}$

$$\forall\, \xi > 0\ \exists\, \delta > 0\ \left[|x+3| < \delta \ \Rightarrow\ 2|(x-3)(x+3)| < 14\,\delta\right]$$

$$2|x^2-9| < \cancel{14} \cdot \frac{\xi}{\cancel{14}}$$
$$|2x^2 - 18| < \xi$$
$$|(2x^2-4) - 14| < \xi$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe la definición de límites y determina el valor de δ que permite establecer la implicación lógica.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce la definición de límites.	**Conoce la definición de límites e intenta encontrar el valor de δ.**	**Determina el valor de δ, pero no sabe concatenar correctamente.**	**Plantea la definición, determina el valor de δ y demuestra la implicación lógica correspondiente.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

3) (4 PUNTOS) Calcule:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \cos(x) \right)$$

Solución:

Ya que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ ①

entonces se puede emplear el TEOREMA DEL EMPAREDADO para calcular el límite solicitado.

Sea la función:

$$h(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \quad ②$$

Para $\underline{x > 0}$ se tiene que $h(x) > 0$ y al multiplicar ① por ② encontramos que:

$$-h(x) \leq h(x) \cdot \cos(x) \leq h(x) \quad ③$$

Por otro lado:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{4}{x^2}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{1 + 4 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) = \frac{0}{1 + 4(0)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

Pero:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-h(x) \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(h(x) \right) = 0 \quad ④$$

Por ③ y ④ las hipótesis del teorema se satisfacen y en conclusión:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) \cos(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) \cos(x) = 0 \quad ⑤$$

Para $\underline{x < 0}$ se tiene que $h(x) < 0$ y al multiplicar ① por ② encontramos que:

$$h(x) \leq h(x) \cdot \cos(x) \leq -h(x) \quad ⑥$$

y además que:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(h(x) \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-h(x) \right) = 0 \quad ⑦$$

Por ⑥ y ⑦ nuevamente se satisfacen las hipótesis del teorema y en conclusión:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) \cos(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) \cos(x) = 0 \quad ⑧$$

De ⑤ y ⑧ se concluye que:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) \cos(x) = 0$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce del acotamiento de la función coseno, el teorema del emparedado y sabe calcular límites al infinito.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce que la función coseno es acotada, ni calcula límites al infinito, ni tampoco el teorema del emparedado.	Acota la función coseno o calcula el límite al infinito de la función racional.	Acota la función coseno, calcula el límite al infinito de la función racional, pero tiene dificultad en aplicar las hipótesis del teorema del emparedado.	Aplica el teorema del emparedado y concluye correctamente.
	0	1	2 – 3	4

4) (10 PUNTOS) Obtenga $\frac{dy}{dx}$ si:

a) $\boldsymbol{y = (x^2 - 1)^{2x+3} + sen^3(x)}$

Solución:

Aplicando la propiedad de la derivada de una suma de funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(x^2-1)^{2x+3}] + \frac{d}{dx}[sen^3(x)] \qquad ①$$

- Calculamos $\frac{d}{dx}[(x^2-1)^{2x+3}]$ empleando derivada logarítmica, la regla de la cadena y la derivada del producto de funciones.

  Sea $f(x) = (x^2-1)^{2x+3}$, aplicando logaritmo natural y propiedades se tiene:

  $$ln[f(x)] = (2x+3)ln\,(x^2-1)$$

  Derivamos ambos lados y despejamos la derivada:

  $$\frac{d}{dx}(ln[f(x)]) = \frac{d}{dx}[(2x+3)ln\,(x^2-1)]$$

  $$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = (2x+3) \cdot \frac{d}{dx}[ln\,(x^2-1)] + \frac{d}{dx}[(2x+3)] \cdot ln\,(x^2-1)$$

  $$\frac{df(x)}{dx} = f(x)\left[(2x+3) \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x + 2 \cdot ln\,(x^2-1)\right]$$

  $$\frac{d}{dx}[(x^2-1)^{2x+3}] = (x^2-1)^{2x+3}\left[\frac{2x(2x+3)}{x^2-1} + 2\,ln\,(x^2-1)\right] \qquad ②$$

- Calculamos $\frac{d}{dx}[sen^3(x)]$ empleando derivada de una función polinomial y la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}[sen^3(x)] = 3sen^2(x)\frac{d}{dx}[sen(x)] = 3sen^2(x)cos(x) \qquad ③$$

Sustituyendo ② y ③ en ①:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2-1)^{2x+3}\left[\frac{2x(2x+3)}{x^2-1} + 2\,ln\,(x^2-1)\right] + 3sen^2(x)cos(x)$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar la suma y el producto de funciones, derivación logarítmica, derivación de una función trigonométrica y la regla de la cadena.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No distribuye correctamente la derivada en la suma de funciones o no conoce sobre técnicas de derivación.	**Solamente deriva la función trigonométrica.**	**Aplica la derivada de la suma, deriva bien la función trigonométrica pero tiene alguna dificultad en la derivación logarítmica.**	**Deriva correctamente la expresión dada.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

b) $\boldsymbol{r = 5 + 3sen(\theta)}$

Solución:

Para determinar $\frac{dy}{dx}$ a partir de $r = f(\theta) = 5 + 3sen(\theta)$, se emplea derivación polar teniendo en cuenta que:

$$x = r\,cos(\theta) = [5 + 3\,sen(\theta)]\,cos(\theta)$$

$$y = r\,sen(\theta) = [5 + 3\,sen(\theta)]\,sen(\theta)$$

Ahora, por definición:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left[[5 + 3\,sen(\theta)]\,sen(\theta)\right]}{\frac{d}{d\theta}\left[[5 + 3\,sen(\theta)]\,cos(\theta)\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[3\,cos(\theta)]\,sen(\theta) + [5 + 3\,sen(\theta)]\,cos(\theta)}{[3\,cos(\theta)]\,cos(\theta) + [5 + 3\,sen(\theta)]\,[-sen(\theta)]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\,sen(\theta)cos(\theta) + 5\,cos(\theta) + 3\,sen(\theta)cos(\theta)}{3\,cos^2(\theta) - 5\,sen(\theta) - 3\,sen^2(\theta)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\,sen(\theta)cos(\theta) + 5\,cos(\theta)}{3\big(cos^2(\theta) - sen^2(\theta)\big) - 5\,sen(\theta)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\,sen(2\theta) + 5\,cos(\theta)}{3\,cos(2\theta) - 5\,sen(\theta)}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar una ecuación polar y funciones trigonométricas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce sobre derivación polar.	**Obtiene correctamente la expresión para una derivación polar, pero no deriva bien.**	**Tiene alguna dificultad para derivar la expresión de x o de y, o no conoce sobre identidades trigonométricas.**	**Sabe la técnica de derivación polar y simplifica la expresión resultante.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

5) (5 PUNTOS) Determine la ecuación de la recta normal a la curva paramétrica $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = t^2 + 1} \\ \boldsymbol{y(t) = t^3 + 2t} \end{cases}$**, en $\boldsymbol{t = 2}$.**

Solución:

Determinamos el punto $P_0(x_0, y_0)$ que pertenece a la curva cuando $t = 2$:

$$P_0(x_0, y_0) = \big(x(t), y(t)\big)\Big|_{t=2} = (t^2 + 1, t^3 + 2t)|_{t=2} = (2^2 + 1, 2^3 + 2 \cdot 2) = (5, 12)$$

Por otro lado, la pendiente de la recta normal viene dada por:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}} \qquad ①$$

En donde, por derivación paramétrica, la derivada $\frac{dy}{dx}$ se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}[t^3 + 2t]}{\frac{d}{dt}[t^2 + 1]} = \frac{3t^2 + 2}{2t}$$

Por tanto:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \frac{3(2)^2+2}{2(2)} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Reemplazando este último resultado en ①, se obtiene:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{7/2} = -\frac{2}{7}$$

Basado en la expresión punto – pendiente de una recta, se determina que la ecuación de la recta normal solicitada es:

$$y - 12 = -\frac{2}{7}(x-5)$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar una curva paramétrica, funciones polinomiales y sabe obtener la ecuación de la recta normal a partir de la pendiente de la recta tangente.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No obtiene la ordenada, ni la pendiente de la recta tangente.	**Obtiene correctamente la ordenada, pero no puede derivar para obtener la pendiente de la recta tangente.**	**Obtiene correctamente la ordenada y la pendiente de la recta tangente.**	**Obtiene correctamente la ordenada, la pendiente de la recta tangente, la pendiente de la recta normal y su ecuación.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4 – 5**

6) (4 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(8)$ donde $f(x) = x^3 + ln(x-1)$.

Solución:

Por el teorema de derivada de la función inversa, en el punto $y_0 = 8$ se tiene que:

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f\,'(x_0)}$$

donde x_0 es tal que:

$$y_0 = f(x_0) = x_0^3 + ln(x_0 - 1)$$

Por simple inspección se deduce que $x_0 = 2$, ya que:

$$2^3 + ln(2-1) = 8 + ln(1) = 8 + 0 = 8$$

Por otro lado:

$$f\,'(x) = \frac{d}{dx}[x^3 + ln(x-1)] = 3x^2 + \frac{1}{x-1}$$

Entonces:

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f\,'(x)|_{x_0=2}} = \frac{1}{3x_0^2 + \frac{1}{x_0 - 1}\Big|_{x_0=2}} = \frac{1}{3(2^2) + \frac{1}{2-1}} = \frac{1}{12+1} = \frac{1}{13}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante aplica correctamente el teorema de la derivada de las funciones inversibles.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra realizar la derivada de la función original, ni la de su inversa.	**Deriva correctamente la función original, pero no determina correctamente el punto a evaluar.**	**Aplica correctamente el teorema de la derivada de las funciones inversibles y determina el punto, pero se equivoca al evaluar.**	**Deriva bien la función inversa y expresa correctamente el valor solicitado.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

7) (5 PUNTOS) Obtenga una expresión matemática para:

$$\boldsymbol{\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{3}{2x-1}\right)}$$

Solución:

Sea: $f(x) = 3(2x-1)^{-1}$

Se obtienen las primeras derivadas para observar el patrón:

$$f\,'(x) = 3(-1)(2x-1)^{-2}(2) = -(2)(3)(1)(2x-1)^{-2}$$

$$f^{(2)}\,(x) = -(2)(3)(1)(-2)(2x-1)^{-3}(2) = (2^2)(3)(1\cdot 2)(2x-1)^{-3}$$

$$f^{(3)}\,(x) = (2^2)(3)(1\cdot 2)(-3)(2x-1)^{-4}(2) = -(2^3)(3)(1\cdot 2\cdot 3)(2x-1)^{-4}$$

$$f^{(4)}\,(x) = -(2^3)(3)(1\cdot 2\cdot 3)(-4)(2x-1)^{-5}(2) = (2^4)(3)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)(2x-1)^{-5}$$

.
.
.

Se concluye entonces que:

$$f^{(n)}\,(x) = (-1)^n(2^n)(3)(n\,!)(2x-1)^{-(n+1)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{3}{2x-1}\right) = 3\left[\frac{(-1)^n(2^n)(n\,!)}{(2x-1)^{n+1}}\right]$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar funciones polinomiales; y, puede generalizar una expresión para la n-ésima derivada.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra realizar la primera derivada de la función.	Expresa correctamente la regla de la cadena para la primera derivada, pero se equivoca en la siguiente derivación.	Deriva correctamente por lo menos hasta la cuarta/quinta derivada para establecer la generalización.	Deriva y establece correctamente una expresión para la n-ésima derivada.
	0	1	2 – 4	5

8) (5 PUNTOS) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $\boldsymbol{y(y^2+x^2)^2+xy=x+243}$ en el punto $\boldsymbol{P(0,3)}$.

Solución:

Se trata de una ecuación dada en forma implícita, la cual debe derivarse.

$$\frac{dy}{dx}\cdot(y^2+x^2)^2+y\cdot\left[2(y^2+x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}+2x\right)\right]+x\cdot\frac{dy}{dx}+1\cdot y=1$$

$$(y^2+x^2)^2\frac{dy}{dx}+4y^2(y^2+x^2)\frac{dy}{dx}+4xy(y^2+x^2)+x\frac{dy}{dx}+y=1$$

$$\frac{dy}{dx}[(y^2+x^2)^2+4y^2(y^2+x^2)+x]=1-4xy(y^2+x^2)-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-4xy(y^2+x^2)-y}{(y^2+x^2)^2+4y^2(y^2+x^2)+x}=\frac{1-4xy(y^2+x^2)-y}{(y^2+x^2)(y^2+x^2+4y^2)+x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-4xy(y^2+x^2)-y}{(y^2+x^2)(x^2+5y^2)+x}$$

Se determina la pendiente:

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,3)}=\frac{1-0-3}{(3^2+0)\big(0+(5)(3^2)\big)+0}=\frac{-2}{9(45)}=-\frac{2}{405}$$

Basado en la expresión punto – pendiente de una recta, se determina que la ecuación de la recta tangente solicitada es:

$$y-3=-\frac{2}{405}x$$

Rúbrica:

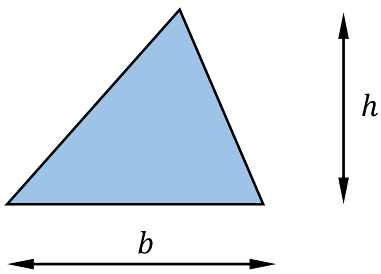
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar funciones polinomiales, la regla de la cadena y puede obtener la ecuación de la recta tangente.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No obtiene la pendiente de la recta tangente.	**Deriva correctamente en forma implícita, pero se equivoca al evaluar.**	**Obtiene correctamente la pendiente de la recta tangente.**	**Obtiene correctamente la pendiente de la recta tangente y su ecuación.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5**

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

9) (8 PUNTOS) La altura de un triángulo disminuye a razón de $2\ \frac{cm}{min}$ mientras que el área del mismo disminuye a razón de $3\ \frac{cm^2}{min}$. ¿A qué velocidad cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a $20\ cm$ y el área es de $150\ cm^2$.

Solución:

Sean el área A, la longitud de la base b y la longitud de la altura del triángulo h, en el instante t. Esto se puede representar gráficamente así:



$$A = \frac{bh}{2}$$

En los datos del problema se especifica que tanto la longitud de la altura h como el área A de la superficie del triángulo disminuyen, por lo tanto se consideran signos negativos para ambas variaciones respecto al tiempo:

$$\frac{dh}{dt} = -2\ \left[\frac{cm}{min}\right] \qquad \text{y} \qquad \frac{dA}{dt} = -3\ \left[\frac{cm^2}{min}\right]$$

La función del área y las variables de las cuales depende serán derivadas respecto al tiempo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(b\frac{dh}{dt} + h\frac{db}{dt}\right)$$

$$2\left(\frac{dA}{dt}\right) = b\left(\frac{dh}{dt}\right) + h\left(\frac{db}{dt}\right)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{2\left(\frac{dA}{dt}\right) - b\left(\frac{dh}{dt}\right)}{h}$$

Se indica que $h = 20\ cm$ y $A = 150\ cm^2$, por lo que:

$$b = \frac{2A}{h} = \frac{2(150)}{20} = 15\ cm$$

La razón de cambio de la longitud de la base del triángulo se calcula con:

$$\left.\frac{db}{dt}\right|_{(b,h,A)=(15,20,150)} = \frac{2(-3) - 15(-2)}{20}$$

$$\left.\frac{db}{dt}\right|_{(b,h,A)=(15,20,150)} = \frac{-6 + 30}{20} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

$$\left.\frac{db}{dt}\right|_{(b,h,A)=(15,20,150)} = 1.2\ \left[\frac{cm}{min}\right]$$

Por cada minuto transcurrido, la longitud de la base del triángulo aumenta $1.2\ cm$.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante plantea y resuelve correctamente un problema de razón de cambio.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra interpretar la situación geométrica especificada.	**Plantea correctamente la relación del área de la superficie del triángulo en función de las longitudes de la base y la altura, pero no deriva bien.**	**Plantea correctamente la relación del área de la superficie del triángulo en función de las longitudes de la base y la altura y la deriva bien, pero no asocia bien los signos o no simplifica bien.**	**Plantea y resuelve correctamente el problema de razón de cambio.**
	0	**1 – 3**	**4 – 6**	**7 – 8**

10) (8 PUNTOS) Una fábrica de zapatos tiene costos mensuales por alquiler, servicios básicos y salarios de $\$\ 4\,000$ y un costo de producción que está dado por la expresión:

$$\boldsymbol{C(q) = \frac{q^2}{40} - 5q + 120}$$

Si la empresa tiene la capacidad de producir 100 zapatos por quincena, determine:

a) El costo total de producción mensual de la empresa.

b) Si en un mes determinado aparece un nuevo cliente solicitando le fabrique 200 pares para él, fuera de lo que se produce en la fábrica, determina la variación del costo de producción de la fábrica para poder producir este pedido del cliente.

c) ¿Cree usted que sea necesarios incrementar el precio del zapato para este cliente o se le debe mantener el mismo precio como a cualquier otro? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Conociendo que el costo total es la suma del costo fijo con el costo de producción:

$$C_T(q) = C_F + C(q)$$

$$C_T(q) = 4\,000 + \frac{q^2}{40} - 5q + 120$$

Y que en el mes (que tiene 2 quincenas) se producen 200 pares de zapatos:

$$C_T(200) = 4\,000 + \frac{(200)^2}{40} - 5(200) + 120$$

$$C_T(200) = 4\,120 + \frac{(40 \times 5)^2}{40} - 1\,000$$

$$C_T(200) = 4\,120 + 1\,000 - 1\,000$$

$$C_T(200) = 4\,120 \ \ [\$]$$

b) Si un cliente requiere 200 pares más de lo que la empresa produce mensualmente, determinamos la variación del costo de producción para fabricar el pedido el cliente.

$$\frac{dC}{dq} = \frac{2q}{40} - 5 = \frac{q}{20} - 5$$

$$\frac{dC}{dq} = \frac{2q}{40} - 5 = \frac{q}{20} - 5$$

$$\left.\frac{dC}{dq}\right]_{q=200} = 10 - 5 = 5 \ \left[\frac{\$}{par}\right]$$

c) Dado que se incrementa el costo de producción, también se le debería incrementar el precio de venta en 5 $[\$/par]$.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante plantea y resuelve correctamente un problema de razón de cambio.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra interpretar la situación económica especificada.	Determina correctamente el costo total de producción, pero no deriva bien.	Determina bien el costo total de producción, deriva bien, pero no evalúa correctamente.	Plantea y resuelve correctamente el problema de razón de cambio.
	0	1 – 3	4 – 6	7 – 8