ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Examen:	
Lecciones:	
Deberes:	
Total:	

AÑO:	2017	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	28/agosto/2017

S O L U C I Ó N   y   R Ú B R I C A

1) (10 PUNTOS) Obtenga las siguientes antiderivadas:

a) $\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}\,dx$

Solución:

Dado que:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$$

Se utilizará la técnica de descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{4x^2-2}{x^3-x} = \frac{4x^2-2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Luego:

$$4x^2 - 2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & \rightarrow & -2 = A(1)(-1) + 0 + 0 & \rightarrow & A = 2 \\ x = -1 & \rightarrow & 2 = 0 + B(-1)(-2) + 0 & \rightarrow & B = 1 \\ x = 1 & \rightarrow & 2 = 0 + 0 + C(1)(2) & \rightarrow & C = 1 \end{array}$$

Entonces:

$$\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}dx = 2\,ln|x| + ln|x+1| + ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}dx = ln|x^2| + ln|(x+1)(x-1)| + C$$

$$\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}dx = ln|x^2(x^2-1)| + C$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, aplica la propiedad de linealidad y conoce la antiderivada de una función racional propia.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, ni resuelve correctamente un sistema de ecuaciones lineales, ni tampoco sabe la antiderivada de una función racional.	**Identifica la técnica de integración que debe aplicar, pero no resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales.**	**Identifica la técnica de integración que debe aplicar, resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales, no aplica bien la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas o no integra correctamente alguno de los términos.**	**Identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales, aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas e integra correctamente cada término.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

b) $\int \frac{\boldsymbol{x^2+3x}}{\sqrt{\boldsymbol{x+4}}}\,\boldsymbol{dx}$

Solución:

Se aplicará la técnica de sustitución:

$$u = x + 4 \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$\downarrow$$

$$x = u - 4$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\,dx = \int \frac{(u-4)^2 + 3(u-4)}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\,dx = \int (u^2 - 8u + 16 + 3u - 12)u^{-1/2}\,du$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\,dx = \int (u^2 - 5u + 4)u^{-1/2}\,du$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\, dx = \int \left(u^{3/2} - 5u^{1/2} + 4u^{-1/2}\right) du$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\, dx = \int u^{3/2}\, du - 5\int u^{1/2}\, du + 4\int u^{-1/2}\, du$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\, dx = \frac{u^{5/2}}{5/2} - 5 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + 4 \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x + 4}}\, dx = \frac{2}{5}(x+4)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+4)^{3/2} + 8(x+4)^{1/2} + C$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe la técnica de integración por sustitución y conoce la antiderivada de funciones potencia.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No reconoce que debe aplicar integración por sustitución.	**Reconoce que debe aplicar integración por sustitución, pero tiene problemas con el diferencial o con el cambio de variable.**	**Aplica la técnica de integración por sustitución, pero tiene problemas para multiplicar los términos algebraicos o integrar una función potencia.**	**Aplica bien la integración por sustitución e integra correctamente cada término.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

2) (5 PUNTOS) Calcule la longitud de la curva dada en forma paramétrica:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = 4\, sen(t)} \\ \boldsymbol{y(t) = 4\, cos(t) - 5} \end{cases} \qquad \boldsymbol{0 \le t \le \pi}$$

Solución:

Se necesitan las siguientes derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = 4\, cos(t) \qquad \wedge \qquad \frac{dy}{dt} = -4\, sen(t)$$

La longitud de curva en forma paramétrica se calcula así:

$$L = \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(4\, cos(t)\right)^2 + \left(-4\, sen(t)\right)^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{16\, cos^2(t) + 16\, sen^2(t)}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{16\left(cos^2(t) + sen^2(t)\right)}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{16(1)}\, dt = 4\int_0^{\pi} dt = 4\, t|_0^{\pi} = 4(\pi - 0)$$

$$L = 4\pi \quad [u]$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo calcular la longitud de una curva dada en forma paramétrica.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce la expresión de cálculo de una longitud de curva.	**Conoce la expresión de cálculo de una longitud de curva, pero no sabe derivar funciones trigonométricas.**	**Sabe calcular una longitud de curva y cómo derivar funciones trigonométricas, pero no conoce la identidad o no integra bien el término resultante.**	**Sabe cómo calcular una longitud de curva, deriva bien funciones trigonométricas e integra correctamente.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

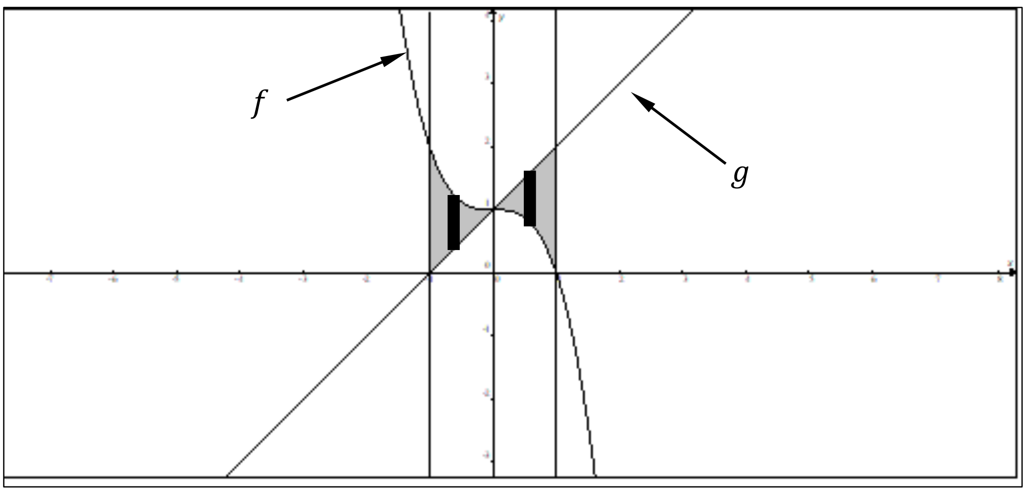
3) (5 PUNTOS) Sea R la región comprendida entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$, y las funciones $f(x) = 1 - x^3$ y $g(x) = x + 1$. Bosqueje R en el plano cartesiano y calcule su área.

Solución:

Se igualan las reglas de correspondencia de las funciones f y g para determinar posibles puntos de intersección.

$$1 - x^3 = x + 1 \quad \to \quad x^3 + x = 0 \quad \to \quad x(x^2+1) = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Pero, $f(0) = g(0) = 1$. Se concluye que el único punto de intersección es: $(0, 1)$. Se grafica la región R:



Se aplica la propiedad aditiva y se calcula el área como la suma de áreas de dos regiones:

$Área = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$

$$Área = \int_{-1}^{0} [(\cancel{1} - x^3) - (x + \cancel{1})]\,dx + \int_{0}^{1} [(x + \cancel{1}) - (\cancel{1} - x^3)]\,dx$$

$$Área = \int_{-1}^{0} (-x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x)\,dx = -\int_{-1}^{0} (x^3 + x)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x)\,dx$$

$$Área = -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$Área = \frac{3}{2}\ \ [u^2]$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica la región común entre funciones de variable real en forma analítica y en forma gráfica; y, con el uso de integrales sabe cómo se calcula el área de dicha región.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar bien cómo se grafican las funciones o no sabe plantear el área como una integral definida.	**Grafica las funciones e identifica sus puntos de intersección, pero no grafica bien la región común entre las ecuaciones o no plantea correctamente la integral definida.**	**Grafica correctamente la región en base a los puntos de intersección, no conoce cómo integrar todas las expresiones que se presentan o no evalúa bien todos los términos.**	**Grafica correctamente la región en base a los puntos de intersección, integra correctamente todas las expresiones que se presentan y evalúa bien cada término.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

4) (8 PUNTOS) Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^x \sqrt{t}\,cos(t)\,dt}{x^2}$

Solución:

Puesto que:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^x \sqrt{t}\,cos(t)\,dt = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

Se puede aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t}\,cos(t)\,dt}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\,cos(x)}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t}\,cos(t)\,dt}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}\,cos(x) - x^{1/2}sen(x)}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t}\,cos(t)\,dt}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{cos(x) - 2x\cdot sen(x)}{4\sqrt{x}} = \frac{1-0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t}\,cos(t)\,dt}{x^2} = +\infty$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre cálculo de límites, el primer teorema fundamental del cálculo y la regla de L'Hopital.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No identifica bien el tipo de indeterminación o no sabe cómo calcular correctamente el límite.	**Identifica el tipo de indeterminación y aplica bien el primer teorema fundamental del cálculo, pero no sabe derivar un producto de funciones.**	**Identifica el tipo de indeterminación y aplica bien el primer teorema fundamental del cálculo, pero no sabe derivar bien una de las funciones presentes en la multiplicación.**	**Identifica el tipo de indeterminación y calcula correctamente el límite.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^{-|x-2|}\,dx$

Solución:

Partiendo de la definición de valor absoluto, se tiene que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$

Entonces, aplicando la propiedad aditiva obtenemos lo siguiente:

$$\int_{-1}^{3} e^{-|x-2|}\,dx = \int_{-1}^{2} e^{-(2-x)}\,dx + \int_{2}^{3} e^{-(x-2)}\,dx$$

$$\int_{-1}^{3} e^{-|x-2|}\,dx = \int_{-1}^{2} e^{x-2}\,dx + \int_{2}^{3} e^{2-x}\,dx = e^{x-2}|_{-1}^{2} - e^{2-x}|_{2}^{3}$$

$$\int_{-1}^{3} e^{-|x-2|}\,dx = (e^{2-2} - e^{-1-2}) - (e^{2-3} - e^{2-2}) = 1 - e^{-3} - e^{-1} + 1$$

$$\int_{-1}^{3} e^{-|x-2|}\,dx = 2 - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe aplicar la propiedad aditiva de las integrales definidas e integra correctamente funciones exponenciales.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra aplicar la propiedad aditiva a la integral definida.	**Identifica que debe aplicar la propiedad aditiva de integrales definidas, pero tiene algún error en la definición del valor absoluto.**	**Aplica bien la definición del valor absoluto, pero comete algún error en los términos que debe integrar.**	**Aplica correctamente la propiedad aditiva, integra bien, evalúa correctamente cada término y presenta la respuesta correcta.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

5) (5 PUNTOS) Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región R limitada por $y = 4 - x^2$, $y = 1$, $y = 3$ se rota alrededor del eje $y = 1$. Bosqueje R en el plano cartesiano.

Solución:

Se igualan las funciones para determinar posibles puntos de intersección.

Intersección de la función cuadrática con $y = 3$:

$$4 - x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad |x| = 1 \quad \rightarrow \quad (x = -1) \vee (x = 1)$$

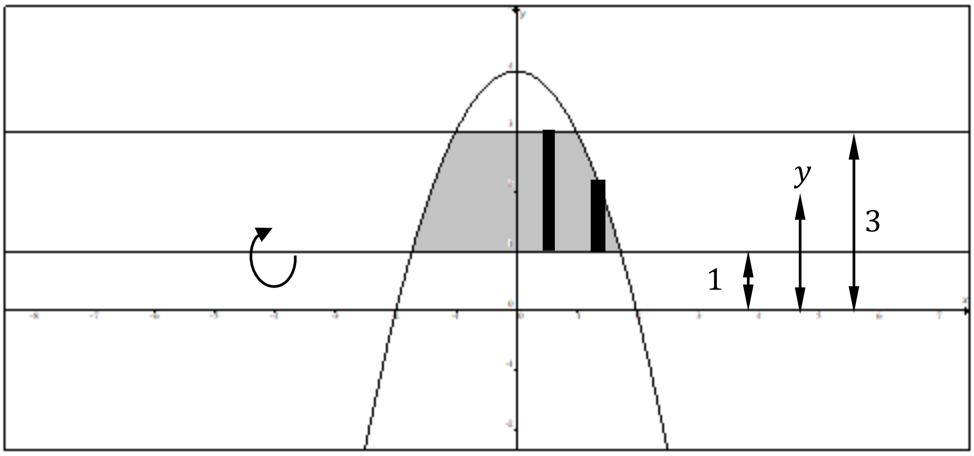
Se concluye que dos puntos de intersección son: $(-1, 3)$ y $(1, 3)$.

Intersección de la función cuadrática con $y = 1$:

$$4 - x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad |x| = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \left(x = -\sqrt{3}\right) \vee \left(x = \sqrt{3}\right)$$

Se concluye que dos puntos de intersección son: $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ y $\left(\sqrt{3}, 1\right)$.

La función cuadrática es cóncava hacia abajo y define con las dos funciones constantes la siguiente región en el plano:



Se utilizará el método del disco y aprovechando la característica de paridad de la función cuadrática se aplicará la propiedad de simetría:

$$Volumen = 2\left[\pi\left(\int_0^1 (3-1)^2\,dx\right) + \pi\left(\int_1^{\sqrt{3}} [(4-x^2)-1]^2\,dx\right)\right]$$

$$Volumen = 2\pi\left[\int_0^1 4\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} (3-x^2)^2\,dx\right]$$

$$Volumen = 2\pi\left[4x|_0^1 + \int_1^{\sqrt{3}} (9-6x^2+x^4)\,dx\right]$$

$$Volumen = 2\pi\left[4(1-0) + \left(9x - 2x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}\right]$$

$$Volumen = 2\pi\left[4 + \left(9\sqrt{3} - 2\cdot 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5}\right) - \left(9 - 2 + \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$Volumen = 2\pi\left[\frac{24\sqrt{3}}{5} - \frac{16}{5}\right]$$

$$Volumen = \frac{16\pi}{5}\left(3\sqrt{3}-2\right) \quad [u^3]$$

También se puede considerar una integración con el método de las capas cilíndricas, pero el resultado será el mismo.

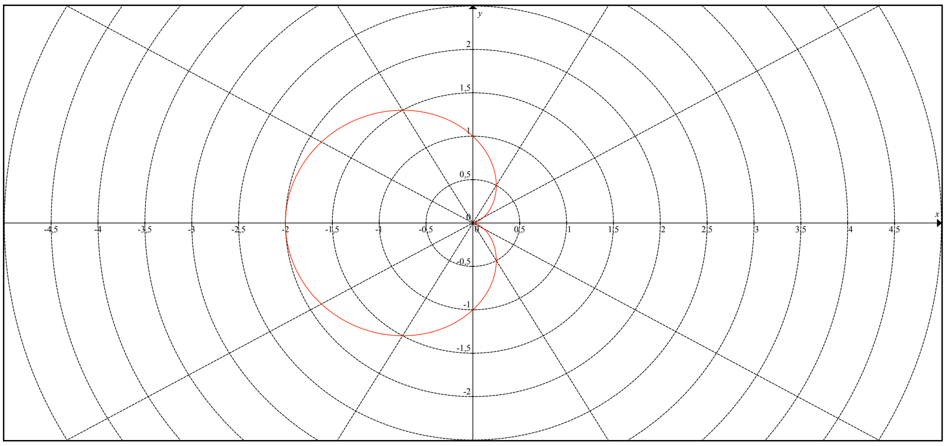
Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante identifica una región en el plano acotada por funciones de una variable real, observa el sólido de revolución que se forma y con un análisis de cálculo integral obtiene su volumen.	No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.	Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución con alguno de los métodos válidos.	Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.	Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen, integra correctamente cada término y expresa bien el resultado.
	0	1	2 – 4	5

6) **(5 PUNTOS) Calcule el área de la región interior a la curva $r = 1 - cos(\theta)$. Bosqueje la curva en el plano polar.**

Solución:

La curva polar es una cardioide, observe su gráfica de color rojo:



Se aprovecha la simetría de la cardioide respecto al eje polar para obtener su área:

$$Área = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(1 - cos(\theta)\right)^2 d\theta\right]$$

$$Área = \int_0^{\pi} \left(1 - 2\,cos(\theta) + cos^2(\theta)\right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(1 - 2\,cos(\theta) + \frac{1 + cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$Área = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\,cos(\theta) + \frac{1}{2}cos(2\theta)\right)\,d\theta$$

$$Área = \frac{3}{2}\int_0^{\pi} d\theta - 2\int_0^{\pi} cos(\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(2\theta)\,d\theta$$

$$Área = \frac{3}{2}\theta|_0^{\pi} - 2\,sen(\theta)|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\,sen(2\theta)|_0^{\pi}$$

$$Área = \frac{3}{2}(\pi - 0) - 2\,\big(sen(\pi) - sen(0)\big) + \frac{1}{4}\,\big(sen(2\pi) - sen(0)\big)$$

$$Área = \frac{3\pi}{2}\quad [u^2]$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica la región interior a la curva polar y con el uso de integrales sabe cómo se calcula el área en coordenadas polares.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra graficar bien la curva o no sabe cómo plantear el área.	**Grafica bien la región, pero no plantea correctamente la integral.**	**Grafica bien la región, pero no conoce cómo integrar todas las expresiones trigonométricas o no evalúa bien algún término.**	**Grafica bien la región, integra correctamente todas las expresiones trigonométricas y evalúa bien cada término.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

7) (4 PUNTOS) Justificando su respuesta, identifique si la siguiente integral impropia converge o diverge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x\,ln(x^2+1)}}{\boldsymbol{x^2+1}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución:

Se realiza la siguiente sustitución:

$$u = x^2 + 1 \qquad \rightarrow \qquad du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x\,ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{ln(u)}{u}\,du$$

Se realiza una nueva sustitución:

$$v = ln(u) \qquad \rightarrow \qquad dv = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{x\,ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int v\,dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2} + C = \frac{1}{4}ln^2(x^2+1) + C$$

La integral es impropia, por lo que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\, ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{x\, ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\, ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{4} ln^2(x^2+1)\right]\Bigg|_1^{b}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\, ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{4}\left[ln^2(b^2+1) - ln^2(2)\right]$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\, ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = +\infty$$

$\therefore$ La integral impropia DIVERGE.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe cómo resolver integrales impropias y concluir si convergen o divergen.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra aplicar técnica de integración alguna.	**Identifica que debe aplicar dos veces la técnica de sustitución, pero se equivoca en la integración.**	**Integra correctamente por sustitución, pero no evalúa bien el límite o no concluye.**	**Aplica correctamente la técnica de sustitución, evalúa bien la integral definida y el límite, e indica que es divergente.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

8) (8 PUNTOS) La población de mosquitos p (en miles de mosquitos) en cierta zona pantanosa, durante el mes de agosto, se expresa por:

$$\boldsymbol{p(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 30x + 112 \ , \qquad 0 \le x \le 8}$$

donde x es la precipitación pluvial (número de pulgadas de lluvia) en ese mes.

Justificando su respuesta con criterios de cálculo, determine:

a) La población máxima de mosquitos.

b) El intervalo de valores de la precipitación pluvial x para los que esta población de mosquitos es creciente.

Solución:

a) Se determina la primera derivada de la función p:

$$p'(x) = -3x^2 + 9x + 30$$

Se iguala a cero esta derivada para determinar los puntos críticos estacionarios, ya que los puntos críticos de frontera son $x = 0$ y $x = 8$:

$$-3x^2 + 9x + 30 = 0 \qquad \div (-3)$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$(x-5)(x+2) = 0$$
$$(x-5=0) \vee (x+2=0)$$
$$(x=5) \vee (x=-2)$$

Se descarta el valor $x = -2$ porque no es parte del dominio de la función, ni tiene sentido en el problema descrito.

Se obtiene la segunda derivada de p:

$$p''(x) = -6x + 9$$

Y evaluamos $x = 5$ en esta segunda derivada:

$$p''(5) = -6(5) + 9 = -30 + 9 = -21 < 0 \qquad \therefore \text{ Se trata de un máximo.}$$

Ahora se evalúa el punto crítico estacionario y los puntos de frontera:

$$p(0) = 112$$
$$p(5) = -(5)^3 + \frac{9}{2}(5)^2 + 30(5) + 112 = -125 + \frac{225}{2} + 150 + 112 = \frac{499}{2}$$
$$p(8) = -(8)^3 + \frac{9}{2}(8)^2 + 30(8) + 112 = -512 + 288 + 240 + 112 = 128$$

$$p(5) > p(0) \qquad \wedge \qquad p(5) > p(8)$$

El número racional $\frac{499}{2}$ es igual a 249.5. Como este número representa la población en miles de mosquitos, quiere decir que la población máxima es de $249\,500$ mosquitos.

b) Para resolver esta segunda interrogante se plantea la siguiente inecuación:

$$p'(x) > 0$$
$$-3x^2 + 9x + 30 > 0 \qquad \div (-3)$$
$$x^2 - 3x - 10 < 0$$
$$(x-5)(x+2) < 0 \qquad \wedge \qquad x \in [0,8]$$

La población de mosquitos es creciente en el intervalo $(0,5)$.

Rúbrica del literal a):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante reconoce un problema de aplicación de máximos y mínimos en donde puede aplicar los criterios de la primera y la segunda derivada.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra asociar los datos proporcionados o no sabe que debe derivar.	Deriva bien, pero tiene algún problema para resolver la ecuación planteada.	Resuelve bien la ecuación, pero presenta algún inconveniente en la evaluación del punto crítico estacionario y los puntos críticos de frontera para poder decidir.	Concluye correctamente sobre la población máxima de mosquitos.
	0	1 – 2	3 – 5	6

Rúbrica del literal b):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante reconoce un problema de aplicación de máximos y mínimos.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra asociar los datos proporcionados, no sabe que debe derivar o no deriva bien.		Plantea la inecuación, pero tiene algún problema en determinar el intervalo solicitado.	Concluye bien sobre el intervalo de valores donde la población de mosquitos es creciente.
	0		1	2

9) (8 PUNTOS) Se desea construir una cisterna subterránea con la finalidad de almacenar $100\,\pi\,pies^3$ de desechos radioactivos. La cisterna tendrá forma cilíndrica. La base y la cara lateral (todas bajo tierra) tendrán un costo de $\$\,100/pie^2$ y la tapa (al nivel del suelo) tendrá un costo de $\$\,56.25/pie^2$.

Justificando su respuesta con criterios de cálculo, determine las dimensiones de la cisterna para que el costo de construcción sea mínimo.

Solución:

Sean r y h, las longitudes del radio y de la altura del cilindro, respectivamente. La cantidad de material necesario bajo tierra es $\acute{A}rea_{Base} + \acute{A}rea_{Lateral}$. La cantidad necesaria para la tapa es $\acute{A}rea_{Base}$. Considerando los costos indicados, se plantea la siguiente expresión:

$$C(r,h) = \left(\overbrace{2\pi r h}^{\acute{A}rea_{Lateral}} + \overbrace{\pi r^2}^{\acute{A}rea_{Base}} \right) \cdot \overbrace{100}^{Costo\ Unitario} + \left(\overbrace{\pi r^2}^{\acute{A}rea_{Base}} \right) \cdot \overbrace{56.25}^{Costo\ Unitario}$$

Se conoce que:

$$Volumen = \pi r^2 h = 100\,\pi$$

Por lo que:

$$h = \frac{100}{r^2}$$

Reemplazando en la expresión de costo:

$$C(r) = 100 \cdot \left(2\pi r \left(\frac{100}{r^2}\right) + \pi r^2\right) + 56.25 \cdot \pi r^2$$

$$C(r) = \frac{20\,000\,\pi}{r} + 156.25 \cdot \pi r^2$$

Derivamos:

$$C'(r) = -\frac{20\,000\,\pi}{r^2} + 312.50\,\pi r$$

Se iguala a cero la derivada para determinar los puntos críticos estacionarios:

$$-\frac{20\,000\,\cancel{\pi}}{r^2} + 312.50\,\cancel{\pi} r = 0$$

$$-20\,000 + 312.50\,r^3 = 0$$

$$r^3 = 64$$

$$r = 4 \quad [pies]$$

Se obtiene la segunda derivada de C:

$$C''(r) = \frac{40\,000\,\pi}{r^3} + 312.50\,\pi$$

Y evaluando, se obtiene que $C''(4) > 0$. Lo cual quiere decir que se trata de un valor mínimo.

Entonces, la longitud de la altura sería:

$$h = \frac{100}{(4)^2} = \frac{100}{16} = 6.25 \quad [pies]$$

En conclusión, las longitudes de la cisterna cilíndrica para minimizar el costo de construcción deben ser de $4\,[pies]$ para el radio y $6.25\,[pies]$ para la altura.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante plantea un problema de optimización con expresiones de geometría del espacio, realiza el análisis de cálculo diferencial e interpreta los resultados encontrados.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra asociar los datos proporcionados o se limita al planteo del área de la superficie lateral y de las bases del cilindro.	**Plantea la expresión de área de la superficie lateral y de la base de un cilindro; y, determina bien la función de costo en términos de una variable, pero se equivoca el derivar.**	**Plantea la expresión de área de la superficie lateral y de la base de un cilindro, determina bien la función de costo a minimizar, aplica el criterio de la primera derivada, pero no aplica el criterio de la segunda derivada.**	**Plantea la expresión de área de la superficie lateral y de la base de un cilindro, determina bien la función de costo a minimizar, aplica el criterio de la primera y de la segunda derivada; y, determina las dos dimensiones solicitadas.**
	0 – 1	**2 – 4**	**5 – 7**	**8**