ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2017	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESOR:**	
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	11/septiembre/2017

S O L U C I Ó N y R Ú B R I C A

1) (20 PUNTOS) Obtenga las siguientes antiderivadas:

a) $$\int \frac{sen(2x)}{\left(1-cos^2(x)\right)^3}dx$$

Solución:

Se utilizan identidades trigonométricas y se simplifica el integrando:

$$=\int \frac{2sen(x)\cos(x)}{\left(sen^2(x)\right)^3}dx = 2\int \frac{\cancel{sen(x)}\cos(x)}{sen^{\cancel{6}}(x)}dx = 2\int \frac{\cos(x)}{sen^5(x)}dx$$

Se aplica la técnica de sustitución: $u = sen\,(x) \quad \rightarrow \quad du = \cos(x)\,dx$

La nueva función a integrar es:

$$= 2\int \frac{du}{u^5} = 2\int u^{-5}du = \cancel{2}\left(\frac{u^{-4}}{-\cancel{4}}\right) + C = -\frac{1}{2\,u^4} + C$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \frac{sen(2x)}{\left(1-\cos^2(x)\right)^3}dx = -\frac{1}{2\,sen^4(x)} + C}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe la técnica de integración por sustitución y conoce la antiderivada de una función potencia.	**No aplica identidades trigonométricas o no reconoce que debe aplicar integración por sustitución.**	**Reconoce qué técnica aplicar, pero tiene problemas con el diferencial o con el cambio de variable.**	**Aplica la técnica de integración por sustitución, pero tiene problemas para integrar una función potencia, con el signo o la simplificación de la fracción.**	**Aplica bien la técnica de integración por sustitución y considera la constante C.**
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

b) $\int x^2 \cos(x)\, dx$

Solución:

Se utiliza la técnica de integración por partes:

$u = x^2 \qquad dv = \cos(x)\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = sen(x)$

La nueva función a integrar es:

$$= x^2\, sen(x) - 2\int x\, sen(x) dx$$

Utilizamos nuevamente la misma técnica:

$u = x \qquad dv = sen(x) dx$

$du = dx \qquad v = -\cos(x)$

Tenemos ahora la siguiente expresión:

$$= x^2\, sen(x) - 2\left[-x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx\right]$$

$$= x^2\, sen(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)\, dx$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2\, sen(x) + 2x\cos(x) - 2\, sen(x) + C}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante aplica la técnica de integración por partes, conoce la derivada de funciones potencia y la antiderivada de funciones trigonométricas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, ni tampoco sabe la antiderivada de una función trigonométrica.	**Aplica la técnica de integración que debe usar por primera vez, pero se equivoca al derivar la función potencia o integrar la función trigonométrica.**	**Aplica la técnica de integración que debe usar por segunda vez, pero se equivoca al derivar la función potencia, multiplicar el coeficiente o integrar la función trigonométrica.**	**Integra por partes correctamente cada término en las dos ocasiones y considera la constante C.**
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

2) (10 PUNTOS) Calcule:

$$\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{x + \sqrt[3]{1 - x^3}}$$

Solución:

Se identifica el tipo de indeterminación:

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} x\right) + \left(\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1-x^3}\right) = +\infty + \lim_{x\to+\infty} x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}$$

La forma de indeterminación es: $\infty - \infty$.

Se realiza el trabajo algebraico correspondiente:

$$= \lim_{y\to+\infty} x + \sqrt[3]{1-x^3} \cdot \frac{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)^3 + \left(\sqrt[\cancel{3}]{1-x^3}\right)^{\cancel{3}}}{x^2 - x\cdot\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)} + \left(\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3} + 1 - \cancel{x^3}}{x^2 - x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} + x^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}\right)^2\right)} = \frac{1}{\infty(1-(-1)-1)}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt[3]{1-x^3} = 0}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica el tipo de indeterminación, racionaliza correctamente, aplica límites conocidos y el teorema de sustitución.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar el tipo de indeterminación y tampoco resuelve el límite.	**Identifica el tipo de indeterminación, pero no identifica que debe racionalizar o racionaliza mal.**	**Identifica el tipo de indeterminación, racionaliza correctamente, pero no resuelve el límite.**	**Identifica el tipo de indeterminación, racionaliza y resuelve correctamente el límite.**
	0	**1 – 5**	**6 – 9**	**10**

3) (10 PUNTOS) Utilizando la definición $\xi - \delta$, demuestre que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Solución:

Al aplicar la definición, se debe demostrar que:

$$\forall\, \xi > 0\ \exists\, \delta > 0\ \left[0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \xi\right]$$

Análisis preliminar:

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| = \left|\frac{x^2 - 4 - 4x + 8}{x - 2}\right| = \left|\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right| = \left|\frac{(x - 2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x - 2}}\right| = |x - 2|$$

Demostración formal:

$$\text{Sea } \boxed{\delta = \xi} \quad \Rightarrow \quad |x - 2| < \xi$$

$$\forall\, \xi > 0\ \exists\, \delta > 0\ \left[0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x - 2| < \xi\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \xi$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe la definición de límites y determina el valor de δ que permite establecer la implicación lógica.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce la definición de límites.	**Conoce la definición de límites e intenta encontrar el valor de δ.**	**Determina el valor de δ, pero no sabe concatenar correctamente.**	**Plantea la definición, determina el valor de δ y demuestra la implicación lógica correspondiente.**
	0	**1 – 4**	**5 – 9**	**10**

4) (10 PUNTOS) Sea la región:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \left(\frac{3}{2}x \le y \le \frac{6}{x}\right) \wedge (x > 0)\right\}$$

a) Bosqueje R en el plano cartesiano.

b) Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar R alrededor del eje Y.

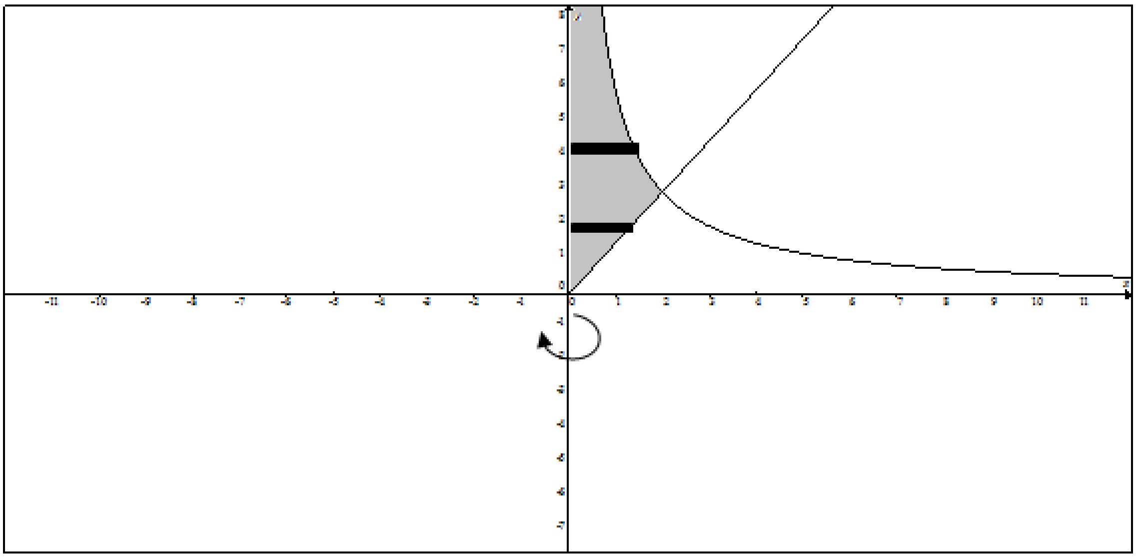
Solución:

Se igualan las funciones para determinar posibles puntos de intersección.

$$\frac{3}{2}x = \frac{6}{x} \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad |x| = 2 \quad \rightarrow \quad (x = -2) \vee (x = 2)$$

Evaluando en alguna de las dos funciones, se concluye que el punto de intersección a considerar es $(2, 3)$, debido a que en la región debe tomarse en cuenta que $x > 0$.

Ambas funciones, en el primer cuadrante, definen la siguiente región en el plano:



Se utilizará el método del disco:

$$Volumen = \pi \int_0^3 \left(\frac{2}{3}y\right)^2 dy + \pi \int_3^{+\infty} \left(\frac{6}{y}\right)^2 dy$$

$$Volumen = \pi \left[\int_0^3 \frac{4}{9}y^2\, dy + \int_3^{+\infty} \frac{36}{y^2}\, dy\right]$$

$$Volumen = \pi \left[\frac{4}{9}\int_0^3 y^2\, dy + 36 \lim_{b \to +\infty} \int_3^b y^{-2}\, dy\right]$$

$$Volumen = \pi \left[\frac{4}{9}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^3 + 36 \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_3^b\right]$$

$$Volumen = \pi \left[\frac{4}{\cancel{27}}(\cancel{27} - 0) - 36 \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$Volumen = \pi \left[4 \cancel{-} 36 \left(0 \cancel{-} \frac{1}{3}\right)\right] = \pi(4 + 12)$$

$$\boxed{Volumen = 16\pi \quad [u^3]}$$

También se puede considerar una integración con el método de las capas cilíndricas, pero el resultado será el mismo.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante identifica una región en el plano acotada por funciones de una variable real, observa el sólido de revolución que se forma y con un análisis de cálculo integral obtiene su volumen.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.	**Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución con alguno de los métodos válidos.**	**Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.**	**Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen, integra correctamente cada término y expresa bien el resultado.**
	0	**1 – 4**	**5 – 9**	**10**

5) **(10 PUNTOS) Dada la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 4x^3}$.**
   a) **Realice un análisis de la monotonía de $\boldsymbol{f}$.**
   b) **Determine los extremos relativos de $\boldsymbol{f}$.**
   c) **Realice un análisis de la concavidad de $\boldsymbol{f}$.**
   d) **Determine los puntos de inflexión de $\boldsymbol{f}$.**
   e) **Bosqueje la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en el plano cartesiano.**

Solución:

a) Derivamos por primera vez:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad (x = 0) \vee (x = 3)$$ Estos son los puntos críticos estacionarios.

Analizamos el signo de la primera derivada:

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2(x-3) > 0 \quad \rightarrow \quad x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad x \in (3, +\infty)$$
$$f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2(x-3) < 0 \quad \rightarrow \quad x - 3 < 0 \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty, 3)$$

La función es estrictamente creciente en el intervalo $(3, +\infty)$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 3)$.

b) Puesto que en $(x = 3)$ la curva cambia su monotonía de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, tiene un mínimo relativo. Su ordenada es:

$$f(3) = (3)^4 - 4(3)^3 = 81 - 4(27) = 81 - 108 = -27$$

c) Derivamos por segunda vez:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

Analizamos el signo de la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\rightarrow \quad 12x(x-2) > 0 \\ &\rightarrow \quad [(x > 0) \wedge (x - 2 > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (x - 2 < 0)] \\ &\rightarrow \quad [(x > 0) \wedge (x > 2)] \vee [(x < 0) \wedge (x < 2)] \\ &\rightarrow \quad (x > 2) \vee (x < 0) \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 \quad &\rightarrow \quad 12x(x-2) < 0 \\ &\rightarrow \quad [(x > 0) \wedge (x - 2 < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (x - 2 > 0)] \\ &\rightarrow \quad [(x > 0) \wedge (x < 2)] \vee [(x < 0) \wedge (x > 2)] \\ &\rightarrow \quad (0 < x < 2) \quad \rightarrow \quad x \in (0, 2) \end{aligned}$$

La función es cóncava hacia arriba en en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(0, 2)$.

d) Se verifica cuando la segunda derivada es igual a cero:

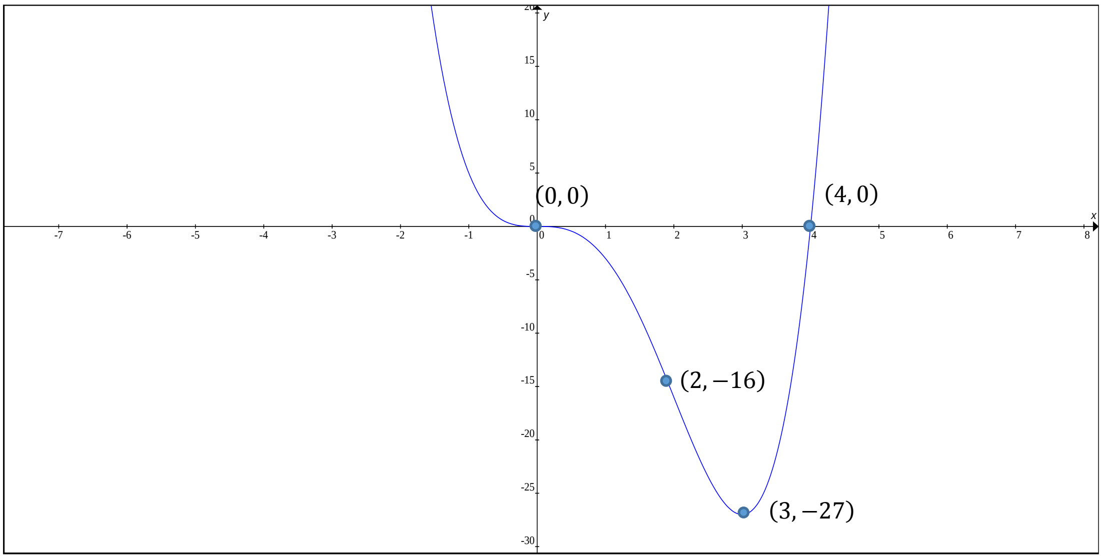
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad (x = 0) \vee (x = 2) \;\; \text{Estos son los puntos de inflexión.}$$

Sus respectivas ordenadas son:

$$\begin{aligned} &f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 = 0 \\ &f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 = 16 - 4(8) = 16 - 32 = -16 \end{aligned}$$

e) Para bosquejar la gráfica de la función, resulta útil determinar sus intersecciones con el eje X:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad (x = 0) \vee (x = 4)$$



Rúbrica del literal a):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar una función polinomial y determinar sus intervalos de monotonía.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe que debe derivar o no deriva bien.		Deriva bien y plantea las inecuaciones, pero no determina los intervalos.	Deriva bien y concluye sobre los intervalos de monotonía de la función.
	0		1	2

Rúbrica del literal b):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar una función polinomial y determinar sus extremos relativos.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe que debe derivar o no deriva bien.		Deriva bien y plantea la ecuación, pero no determina el valor solicitado.	Deriva bien y concluye sobre el tipo de extremo relativo.
	0		1	2

Rúbrica del literal c):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar una función polinomial y determinar sus intervalos de concavidad.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe que debe derivar o no deriva bien.		Deriva bien y plantea las inecuaciones, pero no determina los intervalos.	Deriva bien y concluye sobre los intervalos de concavidad de la función.
	0		1	2

Rúbrica del literal d):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar una función polinomial y determinar sus puntos de inflexión.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe que debe derivar o no deriva bien.		Deriva bien y plantea la ecuación, pero no determina los valores solicitados.	Deriva bien y concluye sobre los puntos de inflexión.
	0		1	2

Rúbrica del literal e):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe bosquejar la gráfica de una función de variable real.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra graficar la función solicitada.		Tiene algún problema en el bosquejo.	Bosqueja correctamente la gráfica.
	0		1	2

6) (20 PUNTOS) Calcule:

a) $\displaystyle\int_0^4 [\,|x-1| + \mu(x-2)\,]\,dx$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\mu(x-2) = \begin{cases} 1, & x-2 > 0 \\ 0, & x-2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ 0, & x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 [(1-x)+0]\,dx + \int_1^2 [(x-1)+0]\,dx + \int_2^4 [(x-1)+1]\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx + \int_2^4 x\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) + (8-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 6$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int_0^4 [\,|x-1| + \mu(x-2)\,]\,dx = 7}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe aplicar la propiedad aditiva de las integrales definidas; y, conoce la antiderivada de una función polinomial.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra identificar que debe sumar las funciones, ni sabe la antiderivada de una función polinomial.	Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, pero no lo hace correctamente.	Identifica que debe sumar las funciones dadas, integra correctamente, pero no evalúa bien algún término.	Identifica que debe sumar las funciones dadas, integra correctamente; y, evalúa bien cada término.
	0	1 – 3	4 – 9	10

b) $\displaystyle \int_{-2}^{2} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x^2}}\, \boldsymbol{dx}$

Se puede aplicar la propiedad de simetría:

$$= 2\int_{0}^{2} \frac{1}{1-x^2}\, dx = 2\left[\lim_{b\to 1} \int_{0}^{b} \frac{1}{1-x^2}\, dx + \lim_{a\to 1}\int_{a}^{2} \frac{1}{1-x^2}\, dx\right]$$

Se utilizará la técnica de descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+B(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$1 = A(1-x) + B(1+x)$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = A(0) + B(2) \quad \rightarrow \quad B = 1/2$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad 1 = A(2) + B(0) \quad \rightarrow \quad A = 1/2$$

Entonces:

$$= 2\left[\lim_{b\to 1} \int_{0}^{b} \left(\frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}\right) dx + \lim_{a\to 1}\int_{a}^{2} \left(\frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}\right) dx\right]$$

$$= 2\left[\lim_{b\to 1} \left(\frac{1}{2}ln|1+x| + \frac{1}{2}ln|1-x|\right)\Big|_{0}^{b} + \lim_{a\to 1}\left(\frac{1}{2}ln|1+x| + \frac{1}{2}ln|1-x|\right)\Big|_{a}^{2}\right]$$

$$= 2\left[\lim_{b\to 1} \left(\frac{1}{2}ln|1+b| + \frac{1}{2}ln|1-b|\right) + \lim_{a\to 1}\left(\frac{1}{2}ln(3) - \frac{1}{2}ln|1+a| - \frac{1}{2}ln|1-a|\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}ln(2) + \frac{1}{2}ln(0)\right) + \left(\frac{1}{2}ln(3) - \frac{1}{2}ln(2) - \frac{1}{2}ln(0)\right)\right]$$

$\therefore$ La integral impropia es DIVERGENTE.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe cómo resolver integrales impropias y concluir si convergen o divergen.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra aplicar técnica de integración alguna.	**Identifica qué técnica debe aplicar, pero se equivoca en la integración.**	**Integra correctamente cada término, pero no evalúa bien el límite o no concluye.**	**Integra correctamente, evalúa bien la integral definida y el límite, e indica que es divergente.**
	0	**1 – 3**	**4 – 8**	**9 – 10**

7) (10 PUNTOS) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = 4x^3 - 2x + 1}$, que son paralelas a la recta $\boldsymbol{y = 10x + 2}$.

Solución:

La recta $y = 10x + 2$ tiene pendiente $m = 10$.

Determinamos la primera derivada de la función dada:

$$m_T = f'(x) = 12x^2 - 2$$

Como las rectas deben ser paralelas:

$$12x^2 - 2 = 10 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{10+2}{12} \quad \rightarrow \quad |x| = 1$$

Las rectas tangentes a la función en los puntos $\left(1, f(1)\right)$ y $\left(-1, f(-1)\right)$ son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.

$$f(1) = 4(1)^3 - 2(1) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$
$$f(-1) = 4(-1)^3 - 2(-1) + 1 = -4 + 2 + 1 = -1$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$y - 3 = 10(x - 1)$$
$$\boxed{y = 10x - 7}$$
$$y + 1 = 10(x + 1)$$
$$\boxed{y = 10x + 9}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar funciones polinomiales y puede obtener las ecuaciones de las rectas tangentes.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No obtiene la pendiente de la recta tangente.	**Deriva correctamente, pero se equivoca al igualar las expresiones o determinar los dos valores.**	**Obtiene correctamente la pendiente de la recta tangente, pero no evalúa bien las ordenadas.**	**Obtiene correctamente la pendiente de la recta tangente y las ecuaciones solicitadas.**
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

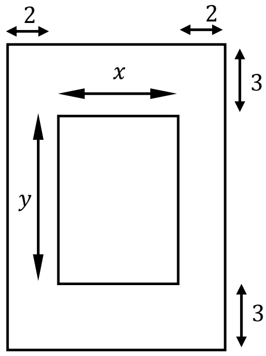
8) (10 PUNTOS) Una agencia de publicidad elabora afiches rectangulares, lo cual incluye el área imprimible (también rectangular) más dos márgenes de $2\ cm$ a la izquierda y también a la derecha, y $3\ cm$ de los márgenes superior e inferior.

Si un cliente necesita un afiche rectangular que tenga $480\ cm^2$ de área imprimible, justificando su respuesta con criterios de cálculo, calcule las dimensiones que debe tener el afiche rectangular para que el valor de su área sea mínimo.

Solución:

Se hace una representación gráfica, tomando en consideración el área imprimible y los márgenes especificados:

$x: dimensión\ del\ ancho\ en\ cm\ (área\ imprimible)$
$y: dimensión\ del\ largo\ en\ cm\ (área\ imprimible)$



Al considerar los márgenes izquierdo, derecho, superior e inferior, se plantea la siguiente expresión de área A para eñ afiche, la cual depende de dos variables:

$$A(x, y) = (x + 4)(y + 6)$$

Pero:

$$xy = 480 \quad \rightarrow \quad y = \frac{480}{x}$$

Lo cual permite trabajar con la función de área A en término de una variable:

$$A(x) = (x + 4)\left(\frac{480}{x} + 6\right)$$

Se deriva por primera vez:

$$A'(x) = (x + 4)\left(-\frac{480}{x^2}\right) + (1)\left(\frac{480}{x} + 6\right)$$

$$A'(x) = -\frac{480x + 1920}{x^2} + \frac{480 + 6x}{x}$$

$$A'(x) = \frac{\cancel{-480x} - 1920 \cancel{+ 480x} + 6x^2}{x^2} = \frac{6x^2 - 1920}{x^2}$$

$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 1920 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 320 \quad \rightarrow \quad x^2 = (64)(5) \quad \rightarrow \quad |x| = 8\sqrt{5}$

$A'(x)\ no\ existe \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow$ No factible.

Se deriva por segunda vez:

$$A''(x) = \frac{x^2(12x) - (6x^2 - 1920)(2x)}{x^2} = \frac{12x^3 - 6x^2 + 3840x^3}{x^2} = \frac{3828x^3 - 6x^2}{x^2}$$

Evaluamos:

$$A''(8\sqrt{5}) > 0 \quad \rightarrow \quad Mínimo$$

Observe que no tiene sentido evaluar $x = -8\sqrt{5}$.

Por lo que:

$$y = \frac{480}{x} = \frac{480}{8\sqrt{5}} = \frac{60}{\sqrt{5}} = \frac{60}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{60\sqrt{5}}{5} = 12\sqrt{5}$$

Las dimensiones del afiche serán:

- Ancho: $x + 4 = 8\sqrt{5} + 4 = 4(2\sqrt{5} + 1)\ cm$
- Largo: $y + 6 = 12\sqrt{5} + 6 = 6(2\sqrt{5} + 1)\ cm$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante plantea un problema de optimización con expresiones de geometría plana, realiza el análisis de cálculo diferencial e interpreta los resultados encontrados.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra asociar los datos proporcionados o se limita al planteo del área de la superficie de un rectángulo.	**Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo y determina bien la función a minimizar, pero se equivoca el derivar.**	**Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo, determina bien la función a minimizar, aplica el criterio de la primera derivada, pero no aplica el criterio de la segunda derivada.**	**Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo, determina bien la función a minimizar, aplica el criterio de la primera y de la segunda derivada; y, determina las dos dimensiones solicitadas.**
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

9) (10 PUNTOS) Suponga que la función de demanda para cierto producto es lineal y viene dada por $p(q) = 400 - 2q$ (en donde p representa el precio unitario y q es el número de unidades producidas) y que la función de costo promedio por unidad producida es $\overline{c(q)} = 0.2q + 4 + \frac{400}{q}$.

Justificando su respuesta con criterios de cálculo, determine:

a) El nivel de producción en donde se maximizan las utilidades.

b) Las utilidades máximas.

Solución:

Las utilidades que se pueden lograr dependen de los ingresos y los costos a través de la siguiente expresión matemática:

$$\overbrace{U(q)}^{Utilidades} = \overbrace{I(q)}^{Ingresos\ totales} - \overbrace{C(q)}^{Costos\ totales}$$

Los ingresos totales dependen del precio unitario p y la cantidad producida q.

Los costos totales dependen del costo unitario $\overline{c}$ y la cantidad producida q.

La expresión de utilidades será:

$$U(q) = p \cdot q - \overline{c} \cdot q$$

$$U(q) = (400 - 2q)q - \left(0{,}2q + 4 + \frac{400}{q}\right)q$$

$$U(q) = 400q - 2q^2 - 0.2q^2 - 4q - 400$$

$$U(q) = -2.2q^2 + 396q - 400$$

Para obtener las utilidades máximas, se deriva esta expresión:

$$U'(q) = -4.4q + 396$$

Se determina el punto crítico estacionario:

$$U'(q) = 0$$

$$-4.4q + 396 = 0$$

$$4.4q = 396$$

$$q = \frac{396}{4.4}$$

$$q = 90$$

Se deriva por segunda vez:

$$U''(q) = -4.4 \quad \rightarrow \quad U''(90) < 0 \quad \rightarrow \quad Máximo$$

$\therefore$ Las utilidades se maximizarán cuando se produzcan 90 unidades.

Entonces:

$$U(90) = -2.2(90)^2 + 396(90) - 400 = -17820 + 35640 - 400 = 17\,420$$

∴ Con este nivel de producción, se tendrán $ 17 420 de utilidades máximas.

Rúbrica del literal a):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre el planteamiento de problemas de economía basado en ingresos y costos.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No conoce sobre el cálculo de una expresión para las utilidades o se equivoca para determinar su expresión.	Conoce sobre el cálculo de utilidades, pero se equivoca al derivar su expresión.	Determina la expresión de utilisades, deriva bien la primera vez, pero no aplica el criterio de la segunda derivada.	Determina la expresión de utilidades, deriva correctamente y concluye que el valor encontrado es un máximo con el criterio de la segunda derivada.
	0	1 – 4	5 – 8	9

Rúbrica del literal b):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe evaluar una función de variable real.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No evalúa bien.			Evalúa bien el valor q en la función de utilidades.
	0			1