ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

Instituto de Ciencias Matemáticas

" Aplicación de Modelos Autoregresivos para variables económicas en el Cálculo Actuarial "

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERO EN ESTADISTICA INFORMATICA

Presentada por:

Francisco Rafael Torres Guaranda

GUAYAQUIL - ECUADOR

AÑO

2000

AGRADECIMIENTO

A Dios, por haberme dado el intelecto suficiente para desarrollar este trabajo; a mi madre, porque por ella soy todo lo que soy; a mi padre, por ser la fuerza que me bastó sentir para poder luchar; al Mat. Fernando Sandoya, Director de Tesis, por su constante ayuda; al Sr. Jhon Pollard; a todos mis amigos, en especial a Jaime; a mi familia; y, a ti, por llenarme de magia e ilusión el corazón, cuando la ciencia ocupaba mi raciocinio.

DEDICATORIA

A Dios; a mi madre, por su infinito amor y comprensión; a la memoria de mi padre; y a mi hermana.

TRIBUNAL DE GRADUACION

Ing. Félix Ramírez
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

Mat. Fernando Sandoya
DIRECTOR DE TESIS

Mat. Jhon Ramírez
VOCAL

Ing. Moisés Villena
VOCAL

DECLARACION EXPRESA

"la responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL"

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)

Francisco R. Torres G.

INDICE GENERAL

,

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

RESUMEN

El objetivo principal del desarrollo de este tema de investigación: *Aplicación de Modelos Autoregresivos para variables económicas en el Cálculo Actuarial*, es hallar, a partir de un Modelo Autoregresivo que ajusta la fluctuación de la tasa de interés en el tiempo, los momentos de las anualidades, seguros ciertos y de vida, los cuales representan el negocio de muchas empresas no sólo de nuestro país sino también del extranjero. El cálculo de estos momentos es un tema fundamental en matemáticas actuariales pues permiten evaluar el monto de las primas y el riesgo de emitirlas.

La importancia que esta investigación toma dentro del Ecuador se fundamenta en la realidad del estudio para con la situación económica de nuestro país, ya que para nadie es desconocido que uno de los más grandes problemas existentes aquí es la constante variación de las medidas económicas y monetarias que trae consigo la fluctuación y el cambio de muchas variables económicas entre las cuales se encuentran las tasas de interés.

En este trabajo básicamente se estudiarán, tal y como lo expresamos anteriormente, los momentos de las anualidades y seguros ciertos y de vida los mismos que representan la esencia del negocio de las financieras y

aseguradoras. Cabe recalcar que en varios de los casos se ha trabajado con aproximaciones de los momentos de las variables en estudio, debido principalmente a la facilidad de uso que éstas prestan con respecto a las funciones exactas.

Algunos resultados obtenidos han sido producto del análisís del Modelo en forma matricial, en cambio que para otros se ha recurrido a las distribuciones de variables conocidas o, en su defecto, al estudia de la combinación lineal de ellas.

INTRODUCCION

A lo largo de la historia de nuestra economía, hemos sido testigos en muchos casos del desenvolvimiento que ha tenido la misma dentro de diversos ámbitos, tales como el económico social y cultural.

Dentro del ámbito económico en el Ecuador, se destacan todo lo que es comercio y negocios, con una amplia gama que va desde las pequeñas industrias, hasta las grandes empresas productoras, comercializadoras y exportadoras para mercados de todo el planeta.

En lo que respecta a la comercialización de bienes y servicios, se destaca el negocio de los seguros, servicio que es prestado a personas naturales o jurídicas, por entidades tanto públicas como privadas. Cabe recalcar que este tipo de negocios es muy rentable si se lo realiza de una manera responsable, técnica y profesional, características que según ciertos sectores no posee la única entidad aseguradora pública del país, como lo es el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, la misma que se ha venido a menos, desprestigiándose a sí misma y a este tipo de negocios, por las razones antes mencionadas.

En la década de los 90, han surgido una gran cantidad de aseguradoras en el país, las mismas que se encuentran reaseguradas a nivel internacional.

Estas aseguradoras son de carácter privado, y en términos generales, se han manejado correctamente, lo que les falta para terminar de surgir brillantemente es una nueva ley del Estado que permita a los trabajadores ecuatorianos, la libre elección para su aseguramiento, lo que fortalecería directamente la competitividad, que como todos sabemos, beneficia directamente a los consumidores y este caso a los asegurados. Pero esta competitividad será también importante para el desarrollo técnico de la ciencia Actuarial, la misma que si bien es utilizada por unas cuantas aseguradoras en el medio, no se lo hace en la medida en el que se la desarrolla en otros lugares.

Dentro del desarrollo de este tema a nivel de mercados, se ha considerado únicamente a la Ciencia Actuarial, como herramienta para obtener mayores réditos mutuos en el negocio de las aseguradoras, y en general se ha considerado a la tasa de interés como una cantidad constante; pero, en países como el nuestro, en el que se maneja un mercado donde la tasa de interés es a veces fluctuante es necesario, a más de la Ciencia Actuarial, técnicas que nos permitan analizar y manejar la tasa de interés a través del tiempo, en particular los llamados Modelos Autoregresivos , los que nos permitirán incluir la variabilidad de la tasa de interés en los modelos actuariales.

las actividades que se realizarán dentro de este tema serán, como ya lo mencionamos anteriormente, influenciadas por la realidad de nuestro mercado, puesto que las técnicas y modelos generalmente utilizados en nuestro país se manejan con situaciones creadas dentro de otras realidades, de ahí la importancia y relevancia que tiene desarrollar este trabajo de investigación.

Capítulo 1

1. ECONOMIA DEL SEGURO: AVERSION AL RIESGO

1.1. La Economía del seguro.

Las operaciones de seguro se han establecido con el fin de protegerse respecto **a** contratiempos financieros importantes que puedan acaecer aleatoriamente y que forman parte de planes futuros de empresas o personas.

La cobertura se limita **a** reducir las consecuencias de los sucesos aleatorios que se pueden medir en términos monetarios. Podríamos definir una " Operación de Seguros " como un medio para reducir el impacto financiero adverso ocasionado por sucesos aleatorios que impiden que se realicen normalmente las expectativas futuras.

1.2. La esperanza matemática de la utilidad.

Si pudiéramos prever fas consecuencias de nuestras decisiones, podríamos tomarlas en base a nuestras preferencias respecto a las consecuencias ciertas .

En la práctica no disponemos de estas previsiones, pero podemos tomar decisiones con la incertidumbre asociada a nuestras expectativas, así se ha elaborado la llamada **teoría de la utilidad** ,para fundamentar el uso de la esperanza matemática de la utilidad, como criterio de elección en el futuro aleatorio y determínar una función de utilidad que permita ordenar las eventualidades.

Una solución al problema de la toma de decisiones en la fase de íncertidumbre es definir el valor de un proyecto económico con un resultado aleatorio que será su valor esperado.

Por este **principio del valor esperado,** la distribución de posibles resultados podrían ser reemplazados para el propósito de decisión por un simple número, el valor esperado de los resultados monetarios aleatorios . Por este principio, un decisor podría ser indiferente entre asumir la pérdida aleatoria X , y el pago del monto E[X] , en orden de aliviar una posible pérdida. Similarmente, un decisor podría estar decidido a pagar **E[Y]** para participar en un negocio riesgoso con una amortización aleatoria Y.

En Economía el valor esperado de una expectativa aleatoria con pagos monetarios es frecuentemente llamado el valor actuarial del contrato.

Muchos decísores no adoptan el principio del valor esperado, generalmente por su nivel de opulencia y otros aspectos de la distribución de sus ingresos .

Cabe recalcar, que no siempre el decisor estaría dispuesto a cancelar el valor del seguro, a continuación se presenta una explicación del porqué un decisor podría estar gustoso de pagar más que el valor esperado de su posible pérdida.

En principio, asumiremos simplemente que el valor o utilidad que un decísor particular toma para asegurar un monto w, medido en unidades monetarias, puede ser expresado en forma de una función, a la que llamaremos función de utilídad.

Consideremos el siguiente caso para la explicación de esta función:

Asumamos que un **decisor** tiene un capital de 100 unidades monetarias. Una vez visto este detalle, observemos la siguiente transformación lineal:

$$u^*(w) = cu(w) + d$$

$$c > 0$$

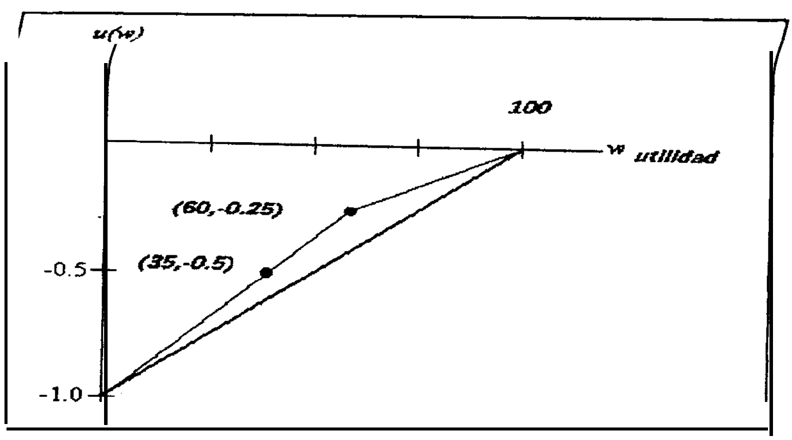
Definamos la función en el punto cero y cualquier otro punto de la función de utilidad. Fijaremos entonces que:

u(0) = -1
$u(100) = \mathbf{0}$

Estos valores son presentados en el siguiente gráfico:

Figura 1.1

Función de Utilidad



Ahora , suponga que con una probabilidad de 0.5 usted se enfrenta ante una pérdida de 100 unidades monetarias, y que con la misma probabilidad (0.5) usted mantiene su actual capital. Entonces, nace la siguiente interrogante, ¿Cuál es el máximo monto M que usted estaría dispuesto a pagar para una protección de seguros en contra de una posible pérdida aleatoria?

Podemos expresar esta pregunta en la siguiente forma:

$$u(100 - M) = 0.5u(100) + 0.5u(0)$$
$$u(100 - \mathbf{M}) = 0.5(0) + 0.5(-1) = -0.5?$$

Como se observa, sí el decisor cancela el valor de M, su nuevo capital será 100- M . El signo igual muestra que el decísor será indiferente entre pagar el monto M con certeza, y aceptar la utilidad esperada que se muestra en el lado derecho de la ecuación.

Vamos a suponer que la respuesta del decísor es M = 65, entonces:

$$u(100 - 65) = u(35) = -0.5$$

Este punto se encuentra graficado en la figura 1.1

Lo más importante es que la respuesta del decísor nos lleva a concluir que él estará díspuesto a pagar una cantidad superior a :

$(0.5)(0)+(0.5)(100)=50$

Que es la pérdida esperada.

La teoría de la función de utilidad empieza con la suposición de un decisor, cuando enfrentado con dos distribuciones (X y Y) que afectan el resultado de una determinada operación con un capital dado será capaz de expresar una preferencia por uno de ellos, o la indiferencia entre ambas. Además, la preferencia debería satisfacer ciertos requerimientos, la cual culmina con un teorema que especifica que si las preferencias satisfacen los requerimientos dados previamente, entonces habrá una función de utilidad:

$u(w)$

de tal modo que sí la distribución de X es preferida a la distribución de Y , entonces

$$E[u(w+X)] > E[u(w+Y)]$$

0 si el decisor es indiferente entre las dos distribuciones, entonces

$$E[u(w+X)] = E[u(w+Y)]$$

Antes de revisar las aplicaciones de la teoría de la utilidad para los seguros, haremos las síguíentes observaciones:

Observaciones

1. La teoría de la utilidad está construida sobre la base de la existencia y consistencia de preferencias para con las distribuciones de probabilídad de resultados.

2. La función de utilidad es muy importante en el momento en que estamos estudiando la factibilidad de contratar o no un determinado seguro.

3. Una función de utílídad no necesita ser determinada únicamente. Por ejemplo, si:

$$u^*(w) = au(w) + b$$
$$a > 0$$

Entonces:

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

Es equivalente a:

$$E[u^*(X)] > E[u^*(Y)]$$

Esto significa que las preferencias son preservadas cuando la función de utilidad es una función lineal con pendiente positiva de su forma original. Esto se ílustró en la figura 1.1

A continuación procederemos a familiarizamos con ciertos términos y a ahondar en la esencia de las Matemáticas Actuariales y su campo de aplicación: los seguros.

1.3. Los seguros y su importancia.

Vamos a suponer que una organización de seguros **(asegurador)** fue establecida para ayudar a reducir las consecuencias financieras del daño, la destrucción o la quiebra de una propiedad. El asegurador proporcionaría contratos (**pólizas**) que prometerán pagar al dueño de la propiedad un monto definido, igual o menor que la pérdida financiera si la propiedad fuere dañada, destruida o quebrada, durante el periodo de vigencia de la póliza. El eventual pago enlazado al monto de la pérdida es llamado **pago demandado.** En retorno por el compromiso contraído dentro de la póliza, el dueño de la propiedad **(asegurado**) paga una cantidad denominada prima.

Dentro del rango de los resultados financieros para una póliza de seguro individual, la función de utilidad del asegurador podría ser aproximada por una línea recta, en este caso, el asegurador debería adoptar el principio del valor esperado para lo que respecta a las prímas . Esto quiere decir que el asegurador debería escoger su precio básico para la cobertura total de la operación de seguros como la pérdida **esperada**, $E[X] = \mu$. En este sentido μ es llamada, la **prima pura o prima única pura** para la póliza de seguro.

Para suplir gastos, costos, impuestos, y para algún otro rubro en contra de las pérdidas de los siniestros adversos, el sistema de seguro debería decidir escoger la prima para la póliza por un determinado procedimiento de aumento, sumándole a la prima única, un recargo por los valores antes mencionados.

Para este caso, la prima aumentada, denotada por H, estaría dada por:

$$H = \mu(1+\pi)+t$$
$$\pi > 0$$
$$t > 0$$

En esta expresión, la cantidad $\mu\pi$, puede ser vista como la parte asociada con los costos y los gastos que varían con las pérdidas esperadas y con el riesgo que demanda la desviación del parámetro de su valor esperado. La constante t suple los gastos esperados que no varían con las pérdidas; por ejemplo, en esta constante podrán estar considerados los gastos fijos de la aseguradora, éstos pueden ser los gastos de funcionamiento por ejemplo agua, luz, teléfono, etc.

Apliquemos ahora la teoría de la utilidad a problemas de decisión, es decir problemas en donde la incertidumbre está presente frente al dueño de la propiedad en lo que respecta a una posible pérdida.

El bien de propiedad del cliente o asegurado, tiene una utilidad que representamos por medio de la función $u(w)$, en donde el capital o recurso w es medido en términos de recursos monetarios.

El dueño del bien o propíetarío enfrenta una posible pérdida por eventos aleatorios que podrían dañar a la propiedad, entiéndase por daíío al deterioro del bien o a la quiebra del mismo. La distribución de la pérdida aleatoria X es asumida como conocida.

La posición por parte del propietario del bien a asegurarse, podría ser indiferente entre pagar un monto M al asegurador o asumir por cuenta propia la pérdída ocasionada por el siniestro.

Esta situación podría ser escrita de la siguiente manera:

$$u(w-M)=E[u(w-X)]$$

La parte derecha de la ecuación, representa la utilidad esperada de no adquirir el seguro; esto es, que el asegurado o dueño del bien asuma el mismo el costo de la pérdida dado que el capital que éste posee es w, y el lado izquierdo de dicha igualdad representa la utílídad del propietario del bien al haber pagado al asegurador la cantidad monetaria M por una protección financiera completa.

Se había mencionado anteriormente que las preferencias de la persona que toma las decisiones deberán satisfacer ciertos requerimientos para asegurar la existencia de una función de utilidad.

Estos requerimientos no incluyen ninguna especificación que forzaría a una función de utilidad a ser lineal, cuadrática, exponencial, o de cualquier otra forma, pero en efecto cada una de ellas deberían servir como una función de utilidad para algunos tomadores de decisiones o podrían servir para reflejar alguna otra preferencia de los mismos, como lo veremos posteriormente

La aproximación de la función de utilidad de la figura que presentamos anteriormente (Fig. 1. 1), consiste de segmentos de líneas rectas, con pendientes positivas. Esto nos muestra que $b(w)^2 \leq 0$, entonces podríamos tomar como condiciones sugeridas a:

$u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$.

La segunda desigualdad indica que $u(w)$ es una función estrictamente cóncava hacia abajo, situación que podría ser un poco mejor entendida cuando hablemos sobre la aversión al riesgo.

En nuestra discusión de seguros, los decisores usan curvas cóncavas hacía abajo como función de utilidad; ahora bien, si $u''(w) < 0$ y X es una variable aleatoria, entonces:

$$E[u(X)] \leq u(E[X])$$

Esta desigualdad, llamada desigualdad de Jensen, se cumple excepto cuando X es una constante.

La desigualdad de Jensen requiere la existencia de los dos valores esperados .

Si wes reemplazada por la variable aleatoria X, y el valor esperado es tomado en cada lado de la desigualdad (1.3. 1), tenemos la desigualdad $E[u(X)] \leq u(\mu)$, la cual tiene varias aplicaciones en todo lo que es Matemáticas Actuariales.

Apliquemos la desigualdad de Jensen al problema del tomador de decisiones de seguros $u(w-M) = E[u(w-X)]$ (1.3.2) , asumiremos que las preferencias del tomador de decisiones cumplen $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. Aplicando la desigualdad de Jensen a la igualdad (1.3.2), tenemos:

$$u(w-M) = E[u(w-X)] \leq u(w-\mu) \qquad (1.3.3)$$

Como $u'(w) > 0$, $u(w)$es una función creciente, entonces por consiguiente (1.2.3) implica que $w-M \leq w-\mu$, o $M \geq \mu$ con $M > \mu$ a menos que X sea una constante.

En términos económicos, hemos encontrado que si $u'(w) > 0$ *y* $u''(w) < 0$, el tomador de decisiones pagará un monto más grande que el valor esperado para el seguro. Esto será conocido como **aversión al riesgo.**

Sí M es al menos igual a la prima escogida por el asegurador, entonces existe una oportunidad para una póliza de seguros con ventajas para ambos participantes: asegurador y asegurado.

Usemos una función elemental para ilustrar las propiedades de la función de utilídad:

Sea una función de utílídad de tipo exponencial, que tiene la forma:

$u(w) = -e^{-\delta w} \qquad \delta > 0$

la misma que tíene muchas características atractivas:

En primer lugar, $u'(w) = \delta e^{-\delta w} > 0$, es decir cumple con la primera sugerencia.

Y además, $u''(w) = -\delta^2 e^{-\delta w} < 0$, cumpliendo de este modo la segunda condición sugerida.

Es decir, $u(w)$ puede servir como la función de utílídad con aversíón al riesgo.

Ahora recordando la definición de la función generadora de momentos, esto es:

$$M_x(t) = E[e^{tx}]$$

Podemos concluir que:

$$E(-e^{-\delta X}) = -E(e^{-\delta X}) = -M_X(-\delta)$$

Es decir, es lo mismo que encontrar la función generadora de momentos de la variable X.

1.4. Aversión al riesgo.

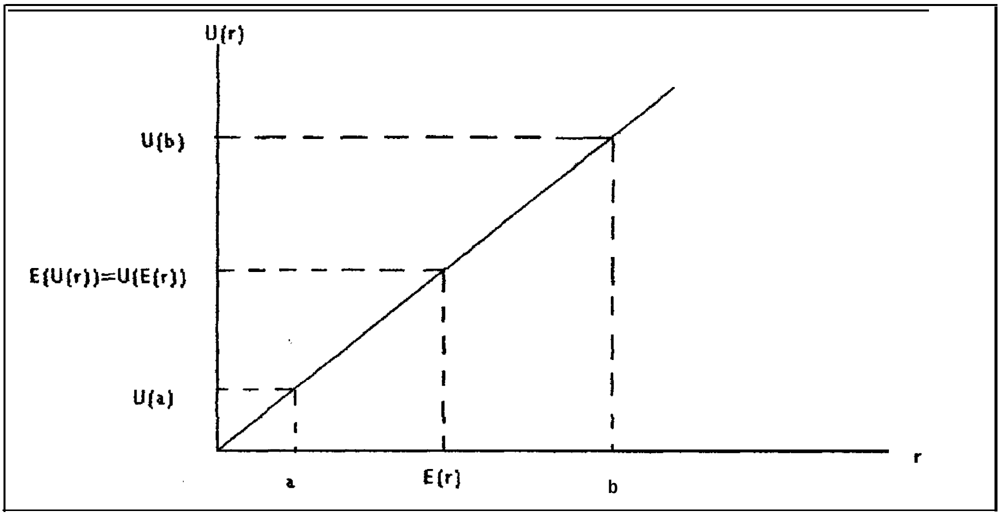
Vamos a definir como r a una cantidad de un determinado recurso que dispone una empresa o una persona, ahora si $U(r)$ representa la utilidad de esta empresa o persona al haber empleado el recurso r en una determinada actividad , entonces existen tres posibilidades para la forma de la función de utilidad U(r).

CASO 1:

Supongamos en primera instancia que la función $U(r)$ es lineal, entonces:

Figura 1.2

Función de utilidad Lineal



Observamos que $E(U(r)) = U(E(r))$.

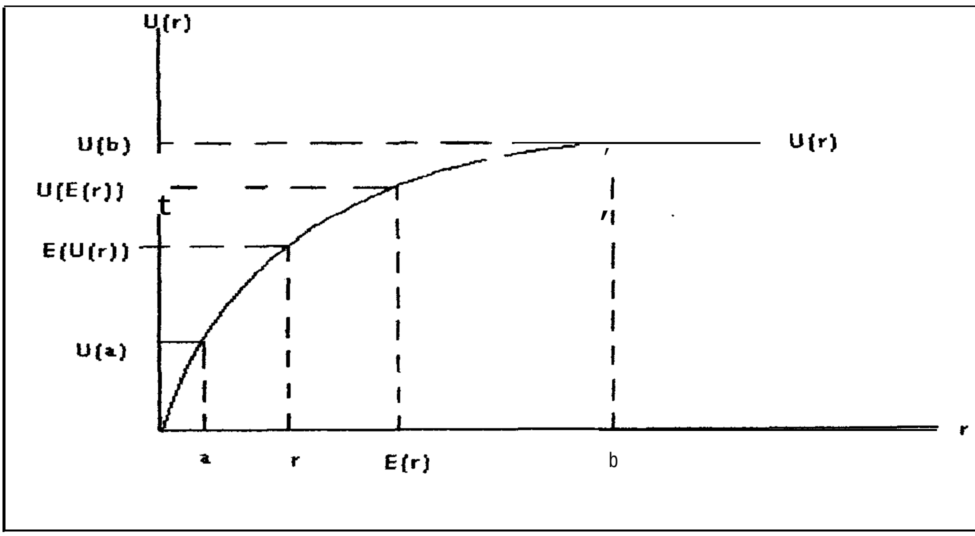
Entonces se dice que, para este caso en particular, el asegurado es *indiferente al riesgo.*

CASO 2:

En este caso vamos a considerar que la función de utilidad, es decir, U(r) es cóncava:

Figura 1.3

Función de Utilidad Cóncava



y se cumple que :

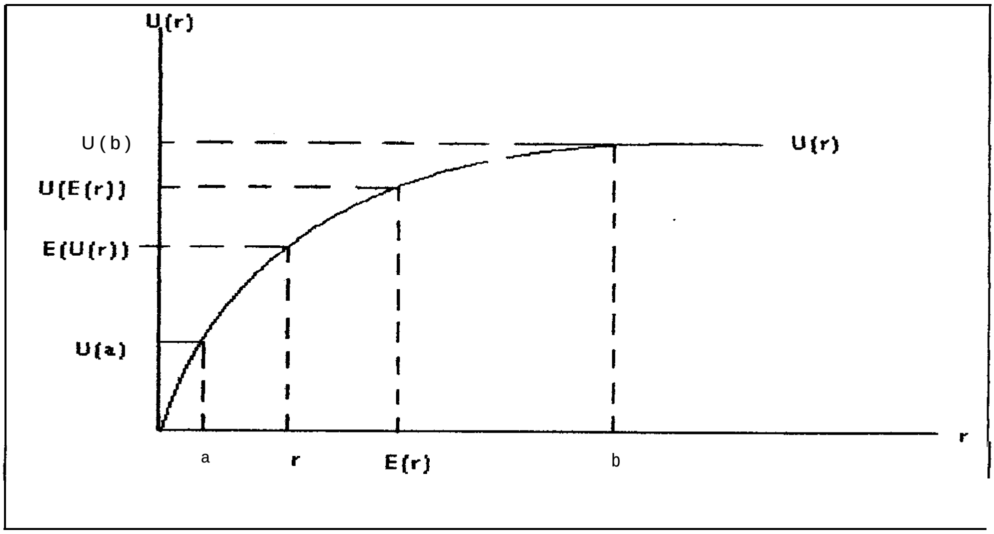
$U(E(r)) > E(U(r))$, por lo tanto se expresa que el asegurado es *adverso **al** riesgo.*

CASO 3:

En este caso, consideraremos que la función de utilidad $U(r)$ es convexa:

Figura 1.3

Función de Utilidad Cóncava



y se cumple que :

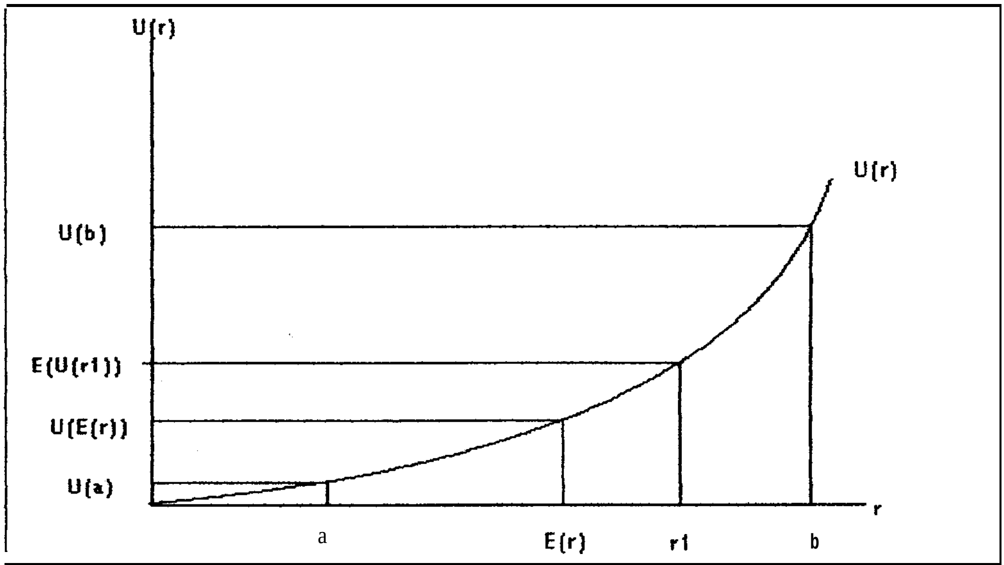
$U(E(r)) > E(U(r))$, por lo tanto se expresa que el asegurado es adverso al ***riesgo.***

CASO 3:

En este caso, consideraremos que la función de utilidad $U(r)$ **es** convexa:

Figura 1.4

Función de utilidad convexa



y se cumple que:

$U(E(r)) < E(U(r))$, y por lo tanto se dice que el asegurado es *propenso al riesgo.*

1.5. Seguros Optimos.

Vamos a suponer que un tomador de decisiones tiene un capital de monto w y enfrenta una posible pérdida en un período posterior, ésta es una variable aleatoria y es denotada por X, el tomador de decisiones puede adquirir una póliza de seguro que pagará un monto de $I(x)$ por la pérdida.

Luego, asumamos que todas las pólizas de seguros factibles son tales que $0 \leq I(x) \leq x$. Supongamos ahora que ninguna póliza de seguro puede ser comprada por el monto del pago de la demanda esperada, es decir la prima por un pago de una póliza de monto Z(x) es $E[I(X)] \leq E[X]$.

El tomador de decisiones ha formulado una función de utilidad $u(w)$ que es consistente con sus preferencias para las posibles distribuciones de los resultados. Asumiremos que el decísor tiene aversión al riesgo, es decir $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$.

Ahora la pregunta es: ¿Cuál de las pólizas de seguros que son factibles deberían ser compradas para maximizar la utilidad esperada del tomador de decisiones?.

Una subclase de la clase de pólizas de seguros factibles se puede definir como sigue:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ x - d & x \geq d \end{cases}$$

Esta dase de pólizas está caracterizada por el hecho de que el pago no empiece hasta que ía pérdida exceda el monto deducible d. Para pérdidas sobre el monto deducible, el exceso es pagado bajo íos términos de la póliza.

Este tipo de póliza es algunas veces ííamada seguros **fuera de pérdida.**

Sabemos que la prima P es igual a ía demanda esperada y por tanto:

$$P = \int_{d}^{\infty} (x-d) f(x) dx$$

En donde $f(x)$ denota la función de densidad de probabilidades y $F(x)$ ía función acumulada de ía variable aleatoria X.

El principal resultado de esta sección, ío vamos expresar en forma de un teorema que lo mencionamos a continuación.

TEOREMA:

Sí un tomador de decisiones cumple con ías síguientes características:

- Tiene por riqueza un monto w .

- Es adverso al riesgo, en otras palabras tiene una función de utilidad $u(w)$ tal que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < \square$

- Enfrenta una pérdida aleatoria X.

- Gastará un monto P en el seguro, donde $\square < P \leq E[X] = \mu$, más la ganancia del asegurador.

- Le ofrecen todas las pólizas factibles de seguros de la forma I(x), $0 \leq I(x) \leq x$, y

- Ofrece comprar una póliza de seguros por el pago de su pérdida esperada, $E[I(x)]$.

Entonces, la utilidad esperada del tomador de decisiones será maximizada por la compra de una póliza de seguro.

$$I_{d^*}(x) = \begin{cases} 0 & x < d^* \\ x - d & x \geq d^* \end{cases} \tag{1.51}$$

donde d^* es la solución de

$$P - \int_d^\infty (x-d) f(x)dx = 0$$

Demostración:

Supongamos que $I(x)$ sea asociada a una póliza de seguro, satisfaciendo la hipótesis del teorema.

Vamos a considerar el siguiente lema:

Si u"(w) < 0, entonces

$$u(w) - u(z) \leq (w - z)u'(z)$$

Luego, se tiene:

$$u(w - x + I(x) - P) - u(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq$$

$$\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P)$$

(1.52)

Resumiendo:

$$[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq \qquad (1.53)$$

$$\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - d^* - P)$$

Para establecer la desigualdad (í.5.3), hemos de considerar tres casos:

- Caso I. $I_{d^*}(x) = I(x)$ (1.54)

En este caso, la igualdad (l-5.4) sostiene que la desigualada (1.53) es 0 en ambos lados.

- Caso II. $I_{d^*}(x) >$ [illegible]

En este caso $I_{d^*} > 0$ y además sabemos de la desigualdad **(1.5.1)** que $x - I_{d^*}(x) = d^*$

- Caso **III** [illegible] $< I(x)$

En este caso $I(x) - I_{d^*}(x) > 0$. De la desigualdad **(1.5.1),** sabemos que $I_{d^*}(x) - x \geq -d^*$ y $I_{d^*}(x) - x - P \geq -d^* - P$.

Además $u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq u'(w - d^* - P)$ porque la segunda derivada de $u(x)$ es negativa y $u'(x)$ es una función decreciente.

Además, cabe recalcar que en cada caso:

$$\left[I(x) - I_{d^*}(x)\right]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq \left[I(x) - I_{d^*}(x)\right]u'(w - d^* - P)$$

estableciendo de este modo la desigualdad (1.5.3).

Ahora, combinando las desigualdades (1.52) y (1.53) y tomando el valor esperado obtenemos:

$$E[u(w-X+I(X)-P)]-E[u(w-X+I_{d^*}(X)-P)]\leq$$

$$\leq E[I(X)-I_{d^*}(X)]u'(w-d^*-P)=0$$

Además,

$$E[u(w-X+I(X)-P)]\leq E[u(w-X+I_{d^*}(X)-P)]$$

y la utilidad esperada será maximizada seleccionando I_{d^*} (x) , que es lo que queríamos demostrar.

Capítulo 2

2. MODELOS AUTOREGRESIVOS: ANALISIS E IMPORTANCIA.

2.1. Introducción

Dentro de las muchas aplicaciones estadísticas una de las más importantes es su poder de inferencia, es decir poder llegar a concluir algo concreto sobre cierto tema en particular, basado en datos o información que se tiene sobre este tema.

Existen varias herramientas que nos pueden ayudar a trabajar sobre este tema en particular, tales como la Regresión Lineal, las tablas de contingencia, o en el caso de un análisis en donde se hallen implícitas y relacionadas más de una variable, tenemos herramientas tales como el Análisis de Factores, el Diseño Experimental, y otras técnicas del Análisis Multivariado.

Además de estas herramientas que hemos nombrado anteriormente, existe otra técnica que es el Análisis de Series de tíempo, y con ella todos los modelos que veremos detalladamente luego, entre los que se encuentran los Modelos Autoregresivos, con los cuales podemos llegar a obtener excelentes aproximaciones de lo que queremos estimar.

Antes de explicar detalladamente todo sobre los modelos Autoregresivos, consideremos primero algunos conceptos básicos sobre el Análisis de Series de Tiempo.

2.1.1. Series de tiempo

Una serie de tiempo no es otra cosa que un grupo de observaciones de una variable tomadas periódicamente en un tiempo determinado, donde este tiempo puede ser mensual, anual, semanal e inclusive en muchos casos hasta diario.

Como ejemplo de lo que podría ser una serie de tiempo, tenemos los registros del número de accidentes automovilísticos que se producen en determinada provincia cada semana, las ventas mensuales de determinado producto en un local comercial, o inclusive las precipitaciones pluviales que se registran en determinada zona diariamente.

Una característica de una serie de tiempo es que las observaciones adyacentes son dependientes entre sí, dependencia que se analizará mediante los usos de modelos y procesos para series de tiempo, los mismos que desarrollaremos en este capítulo.

2.1.2. Procesos Estocásticos y determinísticos.

El poder analizar, estudiar y lo más importante prever la conducta o el comportamiento de ciertos sucesos es muy importante y útil, y esto se lleva a cabo gracias a modelos estadísticos-matemáticos.

La aplicación de fórmulas matemáticas o físicas, nos dan la idea, por ejemplo, con que velocidad un cierto objeto se moverá dentro de un determinado tiempo, o con qué aceleración caerá una pelota lanzada de un edificio desde una cierta altura, todos estos sucesos han sido previstos por modelos matemáticos representados por fórmulas físicas, siendo además sus conclusiones o respuestas exactas.

Cuando el caso es este, es decir que se pueda calcular sucesos orientados en el tiempo de una manera exacta y precisa, entonces se dice que estamos en presencia de un proceso **determinístico.**

Pero hay que notar que estas condiciones generalmente no se presentan, es decir que de cierto modo podamos concluir o calcular sucesos futuros de manera exacta, pues los fenómenos o sucesos que se dan en la realidad no son completamente o totalmente exactos o determinístícos, pues si consideramos el primer ejemplo que pusimos acerca del objeto que se moverá dentro de un determinado tiempo, debemos considerar, si el objeto va al nivel de la tierra, las posibles interrupciones que tenga el mismo, o en el peor de los casos una posible avería, o si consideramos el ejemplo de la pelota, podemos considerar que en ese momento haya existido una corriente fuerte de viento que provoque que la pelota se desvíe o demore en caer, es decir en ambos ejemplos podemos considerar acciones o ruidos que interrumpan el normal desenvolvimiento de un suceso, si este es el caso, entonces estamos en presencia de un proceso **estocástico,** en el cual no se concluye o responde exactamente, pero que con la ayuda de las probabilidades podemos encontrar rangos de valores, en el cual puede acaecer el suceso en estudio.

Los modelos de **los** cuales hemos **estado hablando hace un** momento, para el estudio de las Series de Tiempo, son esencialmente estocásticos.

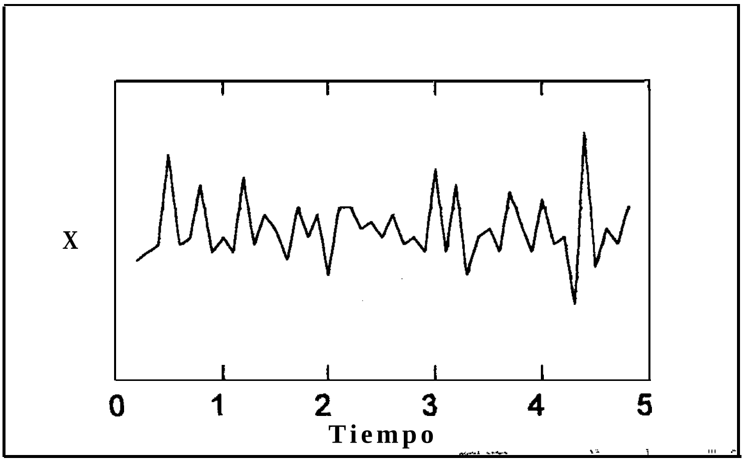
2.1.3. Procesos Estocásticos Estacionarios y No Estacionarios.

Dentro del desarrollo de la teoría sobre el Análisis de Series de Tiempo, existen dos tipos de procesos, los estacionarios y los no estacionarios.

Los procesos estacionarios son los que mantienen un cierto equilibrio alrededor de un valor específico promedio, es decir los datos de la serie de tiempo que se estudia, giran alrededor de ese valor, tal como se indica en el siguiente gráfico.

Figura 2.1

Serie Estocástica estacionaria



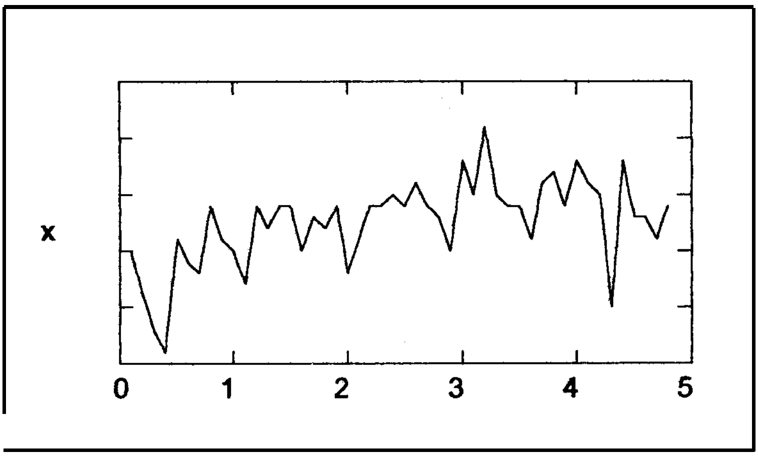
Como podemos observar en el gráfico, las observaciones están alrededor de un mismo valor, es decir el proceso es estacionario.

Los procesos no estacionarios son aquellos en los cuales las observaciones no se encuentran en un mismo nivel constante, por ejemplo los datos siguen una tendencia, cualquiera fuera ésta.

Un ejemplo gráfico de un proceso estocástíco no estacionario es:

Figura 2.2

Serie **Estocástica** No estacionaria



Como observamos en el gráfico, los datos no tienen un valor central definido, es decir su media no es constante, pues los datos tienen una ligera tendencia lineal creciente, la misma que puede ser anulada con herramientas muy útiles en el Análisis de Series de Tiempo, los operadores.

2.1.4. **Operadores**

Un operador es un transformador, el cual aplicado a una función $f(x)$, hace corresponder otra función g(x).

Existen varios operadores dentro del desarrollo del Análisis de Series de Tiempo, uno de ellos, por ejemplo, es el operador B, el cual está definido por:

$$B^k x_t = x_{t-k}$$

Donde x_t es una serie de tiempo.

Existe también el operador $F = B^{-1}$

De tal manera que $Fx_t = x_{t+1}$

Otro operador importante dentro del desarrollo de este tema, es el operador de diferencias ∇ , el cual está definido por:

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - B)x_t .$$

2.1.5. Autocovarianza y coeficientes de autocorrelación.

La autocovarianza en un periodo k, es la covarianza entre x, $y\ x_{t+h}$, variables que se encuentran distanciadas en el tiempo por k unidades , y es definida por :

$$\gamma_k = Cov[z_t, z_{t+k}] = E[(z_t-\mu)(z_{t+k}-\mu)] = E(z_t * z_{t+k}) - E(z_t)E(z_{t+k})$$

De igual manera, definimos la autocorrelación en un periodo k, como:

$$\rho_k = \frac{E[(z_t-u)(z_{t+k}-\mu)]}{\sqrt{E[(z_t-\mu)^2]E[(z_{t+k}-\mu)^2]}} = \frac{E[(z_t-\mu)(z_{t+k}-\mu)]}{\sigma_z^2}$$

Cabe recalcar que para los procesos estacionarios, la varianza $\sigma_z^2 = \gamma_0$ es la misma para el tiempo $k + t$, que en el tiempo t , es por esta razón entonces que:

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1.$$

2.1.6. Matriz de autocovarianzas

Veamos ahora lo que es la matriz de autocovarianza asociada con un proceso estacionario para las observaciones que componen el mismo, las cuales son tomadas en un número determinado de veces. La notación que generalmente utilizamos para definir esta matriz es Γ_n , donde n es el número de veces que las observaciones de un proceso son tomadas.

Entonces,

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & & \gamma_{n-3} \\ . & & & & . \quad . \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Vemos que si obtenemos el factor común σ_z^2 a la matriz Γ_n , obtendríamos la siguiente relación matricial:

$$\Gamma_n = \sigma_z^2 \mathrm{P}_n$$

donde P_n es la matriz de autocorrelaciones.

2.1.7. Funciones de autocovarianza y autocorrelaciones

La gráfica de la función de autocovarianza es la gráfica de (k, γ_k)

De igual manera, la gráfica de la función de autocorrelaciones es la gráfica de (k, ρ_k) , denominado también **correlograma**.

2.1.8. Procesos Débilmente Estacionarios

Se dice que un proceso x_t $t \in Z$, es débilmente estacionario, si es que éste cumple las siguientes condiciones:

- $E x_t = m \quad \forall t\ Z$
- $E x_t^2 = Var\ x_t = \sigma^2 < \infty$
- $Cov(x_t, x_{t+h})$ = g(h), es decir, que la covarianza de estas variables del proceso, depende únicamente del salto de tiempo h.

2.1.9. Ruidos Blancos

Dentro de cualquier estimación de parámetros o procesos de predicciones siempre hablaremos del error, que no es otra cosa que la diferencia entre el valor real y el valor estimado. Específicamente hablando de predicciones dentro de los modelos de-series de tiempo, existirán siempre factores que van a disminuir la precisión de las mismas, estos factores son sucesos externos a nuestro modelo, y son denominados **ruidos blancos.**

Definiendo ahora estadísticamente, podríamos expresar que si u_t es un proceso **estocástico,** entonces éste es un ruido blanco sí:

- $E\,u_t^2 = Var\;u_t = \sigma^2 < \infty$

. $E\,u_t = 0 \quad \forall t$

- $Cov(u_t, u_{t+h}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h \neq 0 \\ \sigma^2 & \text{sí} \quad h = O \end{cases}$

2.1.10. Procesos Invertibles

Definición .-

Se dice que un proceso $x_t \quad t \in Z$, es ínvertible sí tiene la siguiente relación:

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-j}$$

2.2. Procesos Lineales

Definición.-

El proceso x_t se dice un proceso lineal si se puede expresar de la siguiente forma:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} y_j u_{t-j}, \quad t \in \mathbf{Z} \qquad (2.2\text{-}l)$$

donde

$$y_0 = 1, \quad \sum_j |y_j| < \infty; \quad u_t,\ t \in \mathbf{Z} \text{ es } \textit{un ruido blanco}$$

Podemos probar además que estos procesos lineales son débilmente estacionarios.

Si sacamos el valor esperado de ambos lados de la igualdad **(2.2.1)**, obtendríamos:

$Ex_t = E(\sum_{j=0}^{\infty} y_j u_{t-j}) = 0$, pues recordemos que u_t , es un ruido blanco.

Luego, se puede decir también que:

$$Cov(x_t, x_{t+h}) = Ex_t x_{t+h} = E\left[\sum_j y_j u_{t-j} \sum_{j^*} y_{j^*} u_{t+h-j^*}\right] =$$

$$Cov(x_t, x_{t+h}) = \sum_j \sum_{j^*} y_j y_{j^*} E\left[u_{t-j} u_{t+h-j}\right] \qquad (2.2.2)$$

Pero para que esta expresión tenga validez, los subíndices de u_t o sea de los ruidos blancos deben ser iguales, por que de otro modo la expresión (22.2) se anularía.

Entonces tendremos que para que (2.2.2) sea válido:

$$t - j = t + h - j^{*} \qquad (2.2.3)$$

que no son otra cosa que los subíndices de u_t, obteniendo de (2.2.3) que j* = $j + h$.

De este modo:

$$\sum_{j}\sum_{j^{*}} y_j y_{j^{*}} \cdot E\left[u_{t-j} u_{t+h-j}\right] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} y_j y_{j+h} = \gamma(h) \qquad (2.2.4)$$

Luego si reemplazamos en (2.2.4) $h = 0$, tendríamos:

$$h = 0 \quad \gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2 \leq \sigma^2 \sum_{j} \left|y_j\right| \sum_{j^{*}} \left|y_{j^{*}}\right| < \infty$$

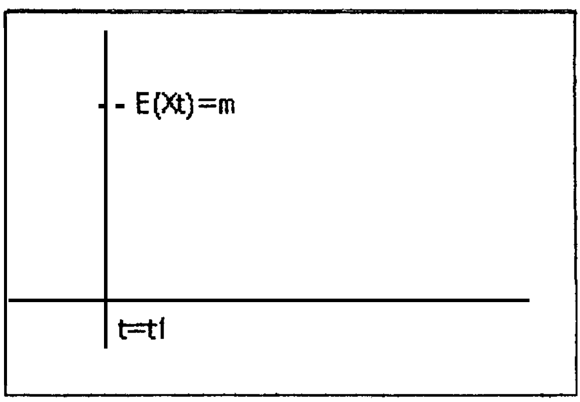
De tal forma, hemos probado los tres requerimientos para que un proceso sea considerado débilmente estacionario.

2.3. Erqodicidad

Vamos a considerar n realizaciones u observaciones de un proceso estacionario x_t , el cual tiene una media m, y donde $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{t_n}$ son las n observaciones tomadas en el proceso, entonces, fijemos un valor del parámetro $t = t_1$

Figura 2.3

Ergodícidad



Definamos ahora el promedio de las observaciones:

$$\frac{x_{t_1} + x_{t_2} + \ldots\ldots + x_{t_n}}{n}$$

el mismo que será una estimación del momento de primer orden $E(x_t)$.

Consideremos ahora las siguientes observaciones:

$$x_{t_0}^*, x_{t_1}^*, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{t_n}^*, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

de las cuales se obtiene también el promedio:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} x_{t_i}}{n+1} = M_{x_t}$$

Al límite de este promedio, cuando t crece indefinidamente, lo podemos considerar como una media temporal

$$\lim_{t \to \infty} M_{x_t} = M_x$$

Una **condición necesaria** y **suficiente** para que $M_x \doteq E(x_t)$, es **decir** que M_x **converja** para casi todas las observaciones, hacia $E(x_t)$, con probabilidad **1**, es decir, que se verifique

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \rho_v = 0$$

De esta manera podríamos entonces definir un proceso ergódíco.

Definición.-

Un proceso se llama ergódico si la media temporal M_x converge hacia $E(x_t)$ con probabilidad 1. Una condición necesaria y suficiente para la ergodicídad de un proceso es que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\rho_v = 0$$

2.4. Procesos Autoregresivos

Definición.-

Se dice que x_t es un proceso autoregresivo de orden p si:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \ldots\ldots + a_p x_{t-p} + u_t = \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} + u_t$$

donde $a_p = 0$, (u_t) *es un r.b.* $u_t \perp x_{t-s} \quad \forall s \geq 1$

Como una observación podríamos citar que la representación de los procesos autoregresivos es única.

Supongamos que:

$$x_t = \sum_{j=1}^{p} a*_j \, x_{t-j} + u*_t$$
$$a*_p = 0, \; u*_t \; es\, un\, r.b.$$

Ahora verifiquemos si:

$$\sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} + u_t = \sum_{j=1}^{p} a*_j \, x_{t-j} + u*_t \qquad (2.4.1)$$

Primero, tenemos que u_t es un espacio vectorial, tomando ahora la proyección ortogonal de u_t sobre u_{t-1} en la ecuación **(2.4.1),** tenemos entonces:

$$\sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} = \sum_{j=1}^{p} a*_j \, x_{t-j}$$

es decir se hacen cero (0) los valores de los parámetros u_t debido a la proyección antes mencionada.

Ahora supongamos que $a*_1 \neq a_1$, y que:

$x_{t-1} = \alpha_2 x_{t-2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_p x_{t-p} \;\; \forall t$, $x_t = \beta_1 x_{t-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots*.. + \beta_p x_{t-p}$,

entonces podemos decir que: $x_t \in u_{t-1}$.

luego, $u_t = x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j}$ que también pertenece a u_{t-1}, y además

$u_t \perp u_{t-1}$, por lo tanto lo que se concluye es que u_t = 0, lo cual sería

una contradicción, ya que $Var(u_t) = \sigma^2$ es un valor mayor a cero (0).

Otra observación adicional es que el proceso x_t , es un modelo autoregresivo (AR) sí y sólo sí las raíces del polínomío asociado: $1 - a_1 z - a_2 z^2 .... - a_p z^p = a(z)$ están fuera del círculo unidad . Bajo estas condiciones el modelo AR es débilmente estacionarío (d.e.)

Citemos un ejemplo considerando en primer lugar un modelo AR de orden uno, es decir AR (1):

$$x_t = \phi x_{t-1} + u_t$$

Entonces a partir de este modelo AR(I), procedemos a obtener el polinomio característico despejando u_t :

$$x_t - \phi x_{t-1} = u_t$$

y ahora sacando como factor común al operador, obtenemos 1- ϕz , luego igualándolo a cero obtendremos las raíces, y sí ellas están dentro del círculo unidad, podríamos concluir que el proceso AR es lineal .

Ahora supongamos que le aumentamos al mismo modelo **AR(1)** una constante, en este caso vamos a establecer que la constante es δ, entonces:

$$x_t = \delta + \phi x_{t-1} + u_t$$

Luego, sí tomamos la **esperanza** de x_t, obtendríamos que :

$$\mu(1-\phi) = \delta \text{ ,}$$

donde:

$$\mu = \frac{\delta}{(1-\phi)}$$

Ahora, sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\delta = 0$. Esta suposición sirve simplemente para darle más generalidad al modelo.

Dentro del desarrollo de estos modelos, debemos considerar las funciones de autocovarianzas, las mismas que son obtenidas de la siguiente manera:

$$\gamma_h = E(x_t x_{t+h}) - E(x_t)E(x_{t+h}) \text{ ,}$$

razón por la cual, si el problema es centrado, esta fórmula se convierte en:

$$\gamma_h = E(x_t x_{t+h})$$

Supongamos ahora que tenemos el modelo Autoregresivo en forma general, es decir un modelo AR(p), entonces:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots\ldots\ldots + \phi_p x_{t-p} + u_t$$

Pero conociendo que la función de **Autocovarianza** es igual a:

$$\gamma_h = E(x_t x_{t+h}) = E(x_t(\phi_1 x_{t+h-1} + \phi_2 x_{t+h-2} + \ldots\ldots\ldots + \phi_p x_{t+h-p} + u_{t+h}))$$

y realizando las simplificaciones correspondientes, obtenemos que:

$$\gamma_h = \phi_1\gamma_{h-1} + \phi_2\gamma_{h-2} + \ldots\ldots + \phi_p\gamma_{h-p} \qquad h \geq 1$$

Entonces recordando los conceptos que revisamos en la sección 2.15, y aplicándolos a la ecuación (2.3. **1),** obtendremos que:

$$\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \phi_2\rho_{h-2} + \ldots\ldots\ldots + \phi_p\rho_{h-p}$$

Como se considera que todas las raíces del polinomio autoregresivo están fuera del círculo unidad, entonces:

$$\rho_h \to 0$$
$$h \to \infty$$

Cabe recalcar que en la práctica estos coeficientes de autocorrelación son obtenidos mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{j=1}^{T-h} x_j x_{j+h}}{\sum_{j=1}^{T} x^2{}_j} \qquad (2.4.2)$$

donde T es el **tamaño** de fa serie.

Esta aproximación será dada cuando el problema esté centrado, es decir cuando el valor esperado de las observaciones de la serie sea cero (0).

2.4.1. Ecuacion de Yute-Walker

Dentro del desarrollo de los modelos autoregresivos, es también importante considerar la ecuación de Yule-Walker , pues mediante ella podemos estimar los coeficientes del modelo. La ecuación se presenta de la siguiente manera:

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2} + \dots\dots\dots + \phi_p \rho_{h-p}$$
$$h = 1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, p$$

Entonces, reemplazando los valores de *h* obtendremos el siguiente sistema:

$$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1 + \ldots\ldots\ldots + \phi_p\rho_{p-1}$$
$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \ldots\ldots\ldots + \phi_p\rho_{p-2}$$

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \ldots\ldots\ldots + \phi_p\rho_0$$

Ahora representado el sistema matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & & & \rho_{p-2} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \rho_{p-1} & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \rho_p \end{bmatrix} \qquad (2.4.1.1)$$

con $A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & . & . & . & . & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & & . & . & . & . & \rho_{p-2} \\ . & & & . & . & . & . & \\ . & & & . & . & . & . & \\ . & & & . & . & . & . & \\ . & & & . & . & . & . & \\ . & & & . & . & . & . & \\ \rho_{p-1} & & & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$

la cual es una matriz inversible.

Se tiene entonces: $\begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_p \end{vmatrix} = A^{-} \begin{vmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \rho_p \end{vmatrix}$

De esta forma, obteniendo primero las estimaciones de los ρ_i por intermedio de la ecuación **(2.4.2),** obtendremos finalmente las estimaciones del vector de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_p \end{vmatrix}$$

De este modo, se obtendría el modelo Autoregresivo, y a partir de éste y las **observaciones,** se puede empezar a hacer las predicciones.

Capítulo 3

3. IMPORTANCIA DEL CALCULO ACTUARIAL EN LA ECONOMIA

3.1. Introducción

A lo largo del estudio y desarrollo de las ciencias económicas, éstas han ido implementado nuevas técnicas, las cuales han servido en muchos casos para darle una mayor eficiencia a las personas o entidades que hacen de la Economía una herramienta para la correcta y justa distribución de las riquezas de un determinado lugar.

Un ejemplo de las técnicas utilizadas por las ciencias económicas es el Cálculo Actuarial, el mismo que es usado como base fundamental en los negocios de los seguros.

La utilización de esta herramienta siempre ha sido de mucha importancia específicamente en lo que respecta al cálculo de primas y anualidades para determinados contratos, pero ahora le daremos también un enfoque estadístico, para el cálculo de las anualidades que representen el mínimo riesgo tanto para el asegurador y para el asegurado. Revisemos ahora, algunos conceptos relacionados a las Matemáticas Actuariales.

3.2. Distribuciones de Supervivencia.

3.2.1. Función de Supervivencia

Sea x la edad (en años) de un ente (individuo, empresa, máquina, etc.) donde $x = 0,1,2\ 3,\ldots\ldots\ldots\ldots$ Consideremos también un recién nacido (en el caso de una persona), o recién comprada o creada (para el caso de una máquina, empresa vehículo, etc.,) y asociemos la variable aleatoria ξ, como la edad de fallecimiento (quíebra, daño, etc.) del ente considerado. Sea $F(x)$ la distribución acumulada de ξ, es decir :

$$F(x) = P(\xi \leq x), \quad x \geq 0$$

Definimos la función de supervivencia por $S(x) = 1 - F(x)$, es decir que :

$S(x) = P(\xi > x)$

es la probabílídad de que el ente alcance la edad x .

Algunas propiedades de la función de supervivencia, son:

1.- La distribución de ξ queda completamente determinada por $F(x)$ ó $S(x)$

2.- $S(x)$ es monótona decreciente.

3.- $S(0) = 1$

4.- $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$

5.- La probabilidad que un recién nacido fallezca entre x y y sobreviviendo a la edad x es:

$$P\left(x < \xi \leq y \Big/ \xi > x \right) = \frac{P(x < \xi \leq y)}{P(\xi > x)} = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)}$$

En términos de la función de supervivencia, se tiene:

$$P\left(x < \xi \leq y \Big/ \xi > x \right) = \frac{S(x) - S(y)}{S(x)}$$

3.2.2. Tiempo futuro de supervivencia

Representemos con (x) al ente (persona, empresa, máquina, etc.) de edad x y por $T(x)$ el tiempo futuro de supervivencia de (x) , es decir que $T(x) = \xi - x$.

Entonces, se define:

- La probabilidad de que ☎☒◑ fallezca dentro de t años como:

$$ {}_{t}q_{x} = P(T(x) \leq t), \quad x > 0 $$

- La probabilidad de que (x) sobreviva ♦ años más como:

$$ {}_{t}p_{x} = P(T(x) > t), \quad x > 0 $$

Luego, para el caso de recién nacidos, tendremos :

- $T(0) = \xi$, ya que la función $T(x)$ nos muestra el tiempo futuro de supervivencia, y evaluada en cero, no es otra cosa que la edad de fallecimiento .

- ${}_{x}p_{0} = S(x)$,

- La probabilidad de fallecimiento a un año es:

$q_x = P(T(x) \leq 1)$

- ☼ la probabilidad de supervivencia a un año es:

$p_x = P(T(x) > 1)$

- La probabilidad que (x)sobreviva t años más y fallezca en los n años siguientes es:

$$_{t/n}q_x = P(t < T(x) \leq t + n) = {}_{t+n}q_x - {}_tp_x = {}_tp_x - {}_{t+n}p_x$$

3.3. Esperanza de vida abreviada y completa

La esperanza de vida se define de dos formas: en et caso discreto y en el caso continuo.

- En et caso discreto se representa por e_x y 8s igual a:

$$e_x = E[u] = \sum_{k=O}^{w-(x+1)} kP(u=k) = \sum_{k=O}^{w-x-1} k\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$, es decir,

$$e_x = \sum_{k=0}^{W-X-l} {}_{k+1}p_x$$, la cual se denomina esperanza de vida abreviada (años completos)

- En el caso continuo se representa por e_x^0 y es igual a:

$$e_x^0 = E[T] = \int_0^{w-x} t\ {}_tp_x\, u_{x+t}\,dt\ .$$

3.4. Vida Probable

Para definir la vida probable supongamos que la función ${}_tp_x$ es continua, entonces va existir un $t = \tau$ en el cual:

$${}_\tau p_x = {}_\tau q_x = \tfrac{1}{2}$$

A τ se le denomina el tiempo de vida probable, es decir que (x) tiene igual probabilidad de fallecer dentro de τ años o de sobrevivir a la edad $x+\tau$.

3.5. Modelos de Sobrevivencia.

Si l_0 representa el número total de recién nacidos de una población o un grupo y $\lambda(x)$ es el número de sobrevivientes a la edad x, se define el número esperado se sobrevivientes por :

$$l_x = E[\lambda(x)]$$

Y como Atiene **distribución** bínomíal, con **parámetros** $l_0,{}_xp_0$ **,se** tiene entonces que:

$$l_x = l_0 S(x)$$

3.6. Número total esperado de años de sobrevivencia

Consideremos un colectivo (conglomerado de personas), y denotemos con L_x el número de años de sobrevivencia vívidos por el colectivo, entonces:

$$L_x = \int_0^1 t\left[l_{x+t}\right]\left[u_{x+t}\right]dt + l_{x+1}$$

como:

$$dl_x = -l_x u_x d_x$$
$$dl_{x+t} = -l_{x+t} d_{x+t}$$

Entonces, se tiene que:

$$L_x = \int_0^1 t\, dl_{x+t} + l_{x+1}$$

Luego, integrando por partes:

$$u = t$$
$$dv = dl_{x+t}$$
$$L_x = -t * l_{x+t}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t}\, dt + l_{x+1}$$
$$L_x = -l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t}\, dt + l_{x+1}\text{, simplificando obtenemos,}$$
$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt$$

3.7. Tanto Central de fallecimientos

Se define el tanto central de fallecimientos a la edad x como:

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} = \frac{\int_x^{x+1} l_t u_t dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt}$$

3.8. Cálculo de Seguros de vida

Hacer referencia de los modelos de seguros de vida es realmente importante ya que ellos son establecidos para reducir el impacto financiero de una quiebra, en el caso de una empresa o fábrica, y de una muerte, en el caso de una persona y sus dependientes.

Los modelos de seguros dependerán únicamente del momento en que ocurra la quiebra o muerte, es decir el modelo considerado dependerá simplemente de la variable aleatoria $T = T(X)$ (tiempo de vida futura). En -este tipo de contrato, la prestación consiste en un solo pago(el capital asegurado) que se denomina *Operación* de *Tracto Unico.*

En términos generales, hacemos referencia a colectivos de personas, pero, todos los criterios son válidos para sectores empresariales, es decir, empresas comerciales, industriales, instalaciones, etc.

Denotemos con z el valor actual(valor presente) de la prestación, calculado al interés efectivo i .

El valor $E[z]$, se denomina valor actuarial de la prestación o prima única pura de la operación.

Pero la prima única pura no refleja el riesgo que corre el asegurador por emitir esas pólizas, con el fin de evaluar este riesgo se requiere otras características, *tales como la evaluación* de la *Varianza* de *la* variable z .

3.8.1. Notaciones

Antes de realizar un análisis de los cálculos de los seguros, es necesario presentar las notaciones principales que se van a utilizar en este estudio.

Tabla I.

NOTACIONES

Símbolo	Significado
i	Tasa de interés efectivo anual.
$(1+i)=v^{-1}$	Factor de acumulación .
$v = 1/(1+i)$	Factor de descuento.
$\delta = \ln(1+i)$	Fuerza del interés.
$d = 1/1+i$	Tasa de interés anticipado o tasa de descuento.

3.9. Modelos de Seguros de Vida

Tal y como lo habíamos recalcado en secciones anteriores la modelización de seguros de vida es uno de los más importantes usos que se le da al Cálculo Actuarial, ya que estos ayudan a disminuir el impacto financiero que podría surgir al cabo de un accidente de muerte en el caso de una persona o en el caso de quiebra para una empresa.

Para poder establecer los modelos de seguros de vida, consideremos primero un elemento de un colectivo de característica (x) el cual contrata un seguro con determinado asegurador, el que se compromete a pagar una indemnización de 1 unidad monetaria, cuando el ente que contrató el seguro pierde la característica asegurada.

El valor financiero *"Actual"* de dicha indemnización es v^{ξ} , siendo v el factor de descuento, y ξ el tiempo en que un determinado ente va a fallecer (es decir es la variable asociada a la pérdida de la característica (x)).

El valor actuarial se define como la *Esperanza* del valor financiero actual, es decir $E[v^{\xi}]$, que no es otra cosa que el monto de la prima única pura.

Si en algún caso, la distribución de ξ fuera conocida, entonces el valor esperado sería:

$$E[v^{\xi}] = \int_0^1 v^{\xi} f(\xi)d\xi \qquad (3.9.1)$$

3.9.1 Seguros Pagaderos al final del año de la muerte o quiebra

3.9.1.1. Seguro pagadero al final del año de muerte o quiebra cuando esto ocurre después de t años

En este tipo de seguro se considera el pago de 1 u.m. al final del año en que ocurre la muerte o quiebra cuando ésta ocurra luego de t años.

Definamos entonces su valor actual, el cual se representa con ${}_{t/1}\xi_x$ y es igual a:

$$
{}_{t/1}\xi_x = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } {}_t q_x \\ v^{t+1} & \text{con probabilidad } {}_{t/1}q_x = {}_{t/}q_x \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_{t+1}p_x \end{cases}
$$

Ahora calculemos el monto de la prima única pura, la cual representamos con ${}_{t/1}A_x = E[{}_{t/1}\xi_x]$, entonces:

${}_{t/1}A_x = v^{t+1}\,{}_{t/}q_x$ lo que también puede ser expresado como

${}_{t/1}A_x = v^{t+1}\,{}_t p_x q_{x+t}$, luego, sabiendo que ${}_t p_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$, y que $d_x = l_x q_x$:

$$_{t/1}A_x = v^{t+1}\frac{l_{x+t}}{l_x}q_{x+t}$$

$$_{t/1}A_x = v^{t+1}\frac{d_{x+t}}{l_x}$$

$$_{t/1}A_x = \frac{v^{(x+t)+1}d_{x+t}}{v^x l_x}$$

Hay que considerar que dentro del desarrollo de los Cálculos de los Seguros, se han construido ciertos **símbolos** que sirven para dar facilidad a los cálculos, éstos se denominan ***Símbolos*** de ***Conmutación***.

Entre los Símbolos de **Conmutación** más importantes tenemos **los** siguientes:

$$C_x = v^{x+1}d_x$$
$$D_x = v^x l_x$$
$$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$
$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$$

Entonces **en símbolos** de conmutación, **el** monto de ía prima **única** pura del seguro anterior es:

$$_{t/1}A_x = \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

3.9.1.2. Seguros de Vida completa con vigencia a n años

Este tipo de seguro especifica que el capital de 1 unidad monetaria es pagadera siempre y cuando el f/q (fallecimiento o quiebra) ocurra dentro de los n años a partir de fa firma del contrato, es decir que si el incidente ocurre fuera de esos n años no habrá indemnización por parte del asegurador.

El valor financiero de este seguro se nota con $\xi^1{}_{x:\overline{n}|}$ y es igual a:

$$\xi^1{}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{t+1} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_{n}p_x \end{cases}$$

Y el monto de fa prima única pura es:

$$A^1{}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \, {}_{t/}q_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}A_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

Luego, expresando en símbolos de Conmutación :

$$A^1{}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Vale notar que se pueden realizar los mismos cálculos trabajando con fa fuerza de interés obteniendo los resultados:

$$\xi^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} e^{-\delta(t+1)} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_np_x \end{cases} \quad (a)$$

Ahora bien, si calculamos el término que corresponde al riesgo que corre al asegurador por emitir la póliza, es decir la varianza, se tiene:

$$Var(\xi^1_{x:\overline{n}|}) = E(\xi^1_{x:\overline{n}|})^2 - E^2(\xi^1_{x:\overline{n}|}) \qquad 3.9.2.1$$

Ahora basándose en la ecuación (3.9.2.1), podemos observar que:

$$\xi^1_{x:\overline{n}|}{}^2 = \begin{cases} e^{-2\delta(t+1)} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_np_x \end{cases} \quad (b)$$

Notemos que $E(\xi^1_{x:\overline{n}|})^2$ es el monto de la prima única pero calculada al doble de la fuerza de interés original, la cual se representa con ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}$.

Así, la nueva tasa de interés, con la que se debe calcular ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}$, representada por i^* será:

$i^* = (1+i)^2 - 1.$

$$\xi^1{}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} e^{-\delta(t+1)} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_n p_x \end{cases} \quad (a)$$

Ahora bien, si calculamos el término que corresponde al riesgo que corre al asegurador por emitir la **póliza**, es decir la varianza, se tiene:

$$Var(\xi^1{}_{x:\overline{n}|}) = E(\xi^1{}_{x:\overline{n}|})^2 - E^2(\xi^1{}_{x:\overline{n}|}) \qquad 3.9.2.1$$

Ahora basándose en la ecuación **(3.9.2.1),** podemos **observar que**:

$$\xi^1{}_{x:\overline{n}|}{}^2 = \begin{cases} e^{-2\delta(t+1)} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_n p_x \end{cases} \quad (b)$$

Notemos que $E(\xi^1{}_{x:\overline{n}|})^2$ es el monto de la prima única pero calculada al doble de la fuerza de interés original, la cual se representa con ${}^2A^1{}_{x:\overline{n}|}$.

Así, la nueva tasa de interés, con la que se debe calcular ${}^2A^1{}_{x:\overline{n}|}$, representada por i^* será:

$i^* = (1+i)^2 - 1$.

En efecto, $\delta = \ln(1+i)$. $y \quad 25 = \ln(1+i^*)$, entonces podemos expresar que:

$\ln(1+i) = \ln\sqrt{(1+i^*)}$, por lo tanto:

$i^* = (1+i)^2 - 1$

De aquí en adelante cada vez que nos encontremos con un símbolo con un exponente a la izquierda de la misma, se lo tomará como el símbolo calculado al doble de la fuerza de interés original.

3.9.1.3. Seguros de Vida completa

Este tipo de seguro especifica que el asegurador indemnizar6 al asegurado en cualquier momento que ocurra el incidente con 1 unidad monetaria al final del año de fa muerte. Su valor actual se representa:

$$\xi_x = vt^{+1} \textit{ con probabilidad } {}_{t/}q_x \textit{ si } t = 0,1,2,3..,w-(x+1)$$

Y el valor actuarial de la prima única pura es:

$$A_x = E[\xi_x] = \sum_{t=0}^{w-(x+1)} v^{t+1} \, {}_{t/}q_x = \sum_{t=0}^{w-(x+1)} {}_{t/}A_x$$

Basándonos en los **símbolos** de conmutación, podemos expresar el valor actuarial de este seguro como:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-(x+1)} \frac{C_{x+t}}{D_x} = \frac{\left(\sum_{t=0}^{w-(x+1)} C_{x+t}\right)}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Fara calcular el riesgo realizamos lo mismo que en la sección anterior, es decir nos valemos de la **varianza**.

$$Var(\xi_x) = E(\xi_x)^2 - E^2(\xi_x) = {}^2A_x - A_x{}^2$$

3.9.1.4. Valor Actuarial de un capital unitario pagable una vez transcurridos n años si (x) sobrevive.

Este seguro indica que el asegurado recibe una indemnización de **1** unidad monetaria por parte del asegurador si este sobrevive a una determinada edad.

La representación del valor actual del pago a efectuarse por este **seguro es**:

$$\xi_{x:\overline{n}|}^{\;1} = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } {}_nq_x \\ v^n & \text{con probabilidad } {}_np_x \end{cases}$$

Y su valor actuar-ial representado con la notación $A_{x:\overline{n}|}^{\;1}$, será igual a:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;1} = E(\xi_{x:\overline{n}|}^{\;1})$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;1} = v^n \, {}_np_x$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;1} = \frac{v^{n+x}}{v^x} \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

3.9.1.5. Valor Actuarial de un capital unitario "Mixto" temporal por n años.

Este tipo de seguro consiste del pago de 1 unidad monetaria cuando el asegurado sobreviva los próximos **n** años una vez firmado el contrato, o el pago de 1 unidad monetaria al final del año del f/q si éste ocurre antes de los n años.

Su valor actual será:

$$\xi_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{t+1} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \quad t=0,1,2,\ldots\ldots,n-1 \\ v^n & \text{con probabilidad } {}_{n}p_x \end{cases}$$

El valor actuar-ial de este tipo de seguro será:

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_{t/}q_x + v^n {}_{n}p_x$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}{}^{1}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Todos los seguros que se han planteado, poseen la característica que la indemnización que se le paga al asegurado por parte del asegurador es recibida al final del año en que ocurre la muerte o la quiebra, es por eso que podrían ser considerados como seguros discretos.

Analicemos ahora el caso continuo, es decir seguros pagaderos al momento de quiebra, en el caso de una empresa, o la muerte, en el caso de una persona.

3.9.2. Seguros Pagaderos en el momento de la muerte o quiebra

3.9.2.1. Seguros Temporales a n años.

Consideremos el contrato en que la aseguradora indemnizará al asegurado siempre y cuando ta muerte o quiebra ocurra dentro de los próximos n **años después** de la firma del contrato. En este contrato, la indemnización **se** realizará en el momento de la muerte o quiebra.

Su valor actual será:

$$\bar{\xi}^1_{x:n} = \begin{cases} v^t & con\ probabilidad\ {}_tp_x u_{x+t} \\ 0 & sino \end{cases}$$

Y su valor actuarial será:

$$\bar{A}^1_{x:n} = \int_0^n v^t\, {}_tp_x u_{x+t}\, dt$$

3.9.2.2. Seguros Diferidos.

El valor actual del seguro diferido en m años, cuya prestación es de 1 unidad monetaria al momento de la muerte o quiebra si éste acaece luego de m años es:

$$m/\bar{\xi}_x = \begin{cases} v^t & \text{con probabilidad } {}_{t/}p_x \text{ para } t \geq m \\ 0 & \text{con probabilidad } {}_{t/}p_x \text{ para } t < m \end{cases}$$

Y su valor actuarial es:

$$m/\bar{A}_x = \int_m^{\infty} v^t \, {}_t p_x u_{x+t} \, dt$$

3.9.2.3. Seguros Diferidos a m años y temporal por n años

Consiste en el pago de 1 unidad monetaria en el momento de la muerte o quiebra, sí este acaece luego de m años dentro de los n años siguientes.

El valor actual de este seguro es:

$$m/n\bar{\xi}_x = \begin{cases} v^t & \text{con probabilidad } {}_{t/}p_x \text{ para } m \leq t \leq m+n \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Luego, el valor actuaría1 será:

$$m/n\bar{A}_x = \int_m^{m+n} v^t \, {}_{t/}p_x u_{x+t} dt$$

3.10. Rentas de Supewivencía

Recordemos primero algunos conceptos financieros, como son las anualidades ciertas

3.10.1. Anualidades Círtas

Definición.-

Se denomina anualidad cierta al valor actual de pagos periódicos que se realizan durante una determinada cantidad de **tiempo(** conocido **)**.

Las más importantes anualidades ciertas son:

- **Anualidad Anticipada (es decir el primer pago se** *realiza en* ***el*** *insfanfe que se firma el confrafo)*

Constituyen *n* pagos anuales de 1 unidad monetaria, su valor actual es notado con:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots. + v^{n-1} = \sum_{k=O}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v}$$

- **Anualidad vencida *(es decir el* primer *pago se realiza al final del primer año, luego de la firma delcontrato)***

Constituyen ***n*** pagos anuales de 1 unidad monetaria, su valor actual es notado con:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = v(1+v+v^2 + \ldots + v^{n-1}) = \& -$$

$$a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

En estas expresiones se supone que se deben realízar n pagos exactamente. A continuación se analizará la teoría de las rentas de supervivencia.

3.í6.2. Valores Actuariales de Rentas vitalícias constantes con pagos periódicos(Rentas en el campo discreto).

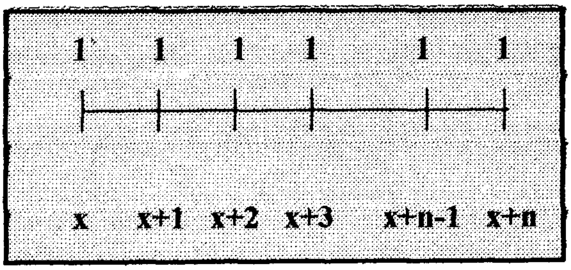
Vale la pena observar que aunque ta finalidad es la misma, fa diferencia básica entre un contrato de seguros y contrato de rentas es que en el primer caso el pago se lo realiza una sola vez, y para el caso de las prestaciones se realizan varios pagos **periódicos,** que pueden hacerse anualmente, semestralmente, mensualmente, etc.

3.10.2.1. Renta Vitalicia, anual, unitaria, inmediata, anticipada y temporal por *n* años.

Observemos gráficamente el flujo de pago de esta renta:

Fígura 3.1

Flujo de pago de una renta temporal



Es decir vamos a suponer que se paga un capital unitario cada **año,** mientras vive o hasta que transcurren n años .

Entonces, el valor actual de los pagos es:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t}|} & con\ probabilidad\ {}_{t-1/}q_x \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & con\ probabilidad\ {}_{n-1/}p_x \end{cases}$$

Y el valor actuarial:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t-1/}q_x \, \ddot{a}_{\overline{t}|} + {}_{n-1}p_x \, \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Ahora bien, en la práctica el valor de $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ se puede expresar fácilmente en términos de los símbolos de conmutación de la siguiente manera:

Recordemos que ${}_t\xi_x$ es el valor actual del pago de 1 unidad monetaria si el individuo de edad x sobrevive a la edad $x+t$.

Luego,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_0\xi_x + {}_1\xi_x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + {}_{n-1}\xi_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t\xi_x$$

Entonces, el valor actuarial será:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = E(\sum_{t=0}^{n-1} {}_t\xi_x) = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Donde:

${}_tE_x = E({}_t\xi_x)$ = Factor de Actuaríalizacíón.

3.10.2.2. Renta Vitalicia, anual, unitaria, inmediata, anticipada de vida completa.

Consideremos la misma figura **(3.1),** pero ahora sin tener una edad límite, entonces:

El valor actual para este tipo de contrato es $\ddot{\alpha}_x$ y es igual a:

$$\ddot{\alpha}_x = {}_0\xi_x + {}_1\xi_x + \ldots\ldots$$

$$\ddot{\alpha}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t\xi_x$$

y su valor actuarial :

$$\ddot{a}_x = E(\ddot{\alpha}) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

3.10.2.3. Renta Anual, unitaria, anticipada, temporal por m años y diferida por n años

El valor actual se nota $_{n/m}\ddot{a}_x$.

El valor actuarial será:

$$_{n/m}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_tE_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} =$$

$$= \frac{1}{D_x}(D_{x+n} + D_{x+n+1} + .. - (D_{x+n+m} + ...))$$

$$_{n/m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

3.10.2.4. Renta anual, unitaria, anticipada, diferida por n años.

El valor actual de esta renta será: $_{n/}\ddot{a}_x$

El valor actuaría1 de este renta será:

$$_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

Cabe recordar que para calcular el riesgo de emitir una póliza es la **varianza** de cada uno de estas operaciones.

Capítulo 4

4. APLICACIÓN DE MODELOS AUTOREGRESIVOS

4.1. Generalidades

Los modelos autoregresivos, como anotamos anteriormente, son muy importantes, no sólo por la importancia matemática que tienen para ajustar observaciones, sino también para las predicciones estadísticas.

Aquí discutíremos la conducta de la tasa de interés, especialmente en lo que se refiere a su impacto en las anualídades de los seguros, lo cual proporcionará una mayor confiabilidad a los negocios de los seguros.

Cabe recalcar que en la práctica se ha trabajado con aproximaciones para los momentos de las funciones de la tasa de interés, pues en muchos casos sus distribuciones son desconocidas, por tal razón y basado en simulaciones, se ha establecido que puede ser usada la distribución lognormal como una excelente aproximación para estas distribuciones, logrando resultados muy positívos.

4.2. Modelo a ser aplicado

Como aplicación se usará un modelo autoregresívo de segundo orden para explicar el comportamiento y la fluctuación de la tasa de interés, por tanto, según la teoría enunciada en el capítulo 2:

$$\delta_t - \delta = 2k(\delta_{t-1} - \delta) - k(\delta_{t-2} - \delta) - e_t \qquad (4.1.1)$$

donde $\delta_t = \ln(1 + i_t)$ es la fuerza del interés experimentada en el año al instante **t** , y $\delta = \ln(1 + i)$ se asume como la fuerza del interés promedio en un periodo largo de tiempo.

Ignorando el factor k y el ruido aleatorio e_t, la ecuación mostrada simplemente extrapola la fuerza del interés, de año a año, de una manera lineal. Si la tasa de interés ha estado subiendo, el modelo asume que ésta tiene una tendencia a continuar con esa dirección . El factor k $(0 \leq k \leq 1)$, tiene el efecto de llevar el valor extrapolado a través del promedio de la fuerza de interés a largo periodo δ .

Las variables aleatorias e_t , denominadas ruidos blancos, las cuales poseen valor esperado cero (0) y varianza σ^2 son mutuamente independientes, y representan las influencias externas que pueden afectar al modelo.

Cabe recalcar que la utilización de este modelo es realmente valedera, puesto que si pensáramos simplemente en utilizar simulaciones, éstas no nos mostrarían la realidad de la fluctuación de la tasa de interés, pues su distribución es desconocida

La ecuación autoregresiva de segundo orden presentada, puede también ser escrita convenientemente en la forma:

$$u_t = 2ku_{t-1} - ku_{t-2} + e_t \qquad (4.2.1)$$

donde $u_t = \delta - \delta_t$

ya que:

$u_{t-1} - u_t = (\delta - \delta_{t-1}) - \delta + \delta_t$, y haciendo las respectivas simplificaciones:

$\delta - \delta_{t-1} = u_{t-1}$, y de igual manera para u_{t-2} , obtenemos la nueva expresión (4.2-l).

Se observa también que si δ es la fuerza de interés, el factor de descuento a largo periodo v = $e^{-\delta}$, y la función de descuento v_t en el año t es:

v, = $\exp(-\delta_t)$, y ya que $\delta_t = u_t - \delta$, entonces

$$v_t = e^{u_t} * e^{-\delta} = e^{u_t} * v \qquad (4.22)$$

y la tasa de interés i correspondiente al promedio de la fuerza del interés a largo periodo δ , está dado por:

$$i = e^{\delta} - 1$$

El modelo autoregresivo mostrado anteriormente permite la derivación de fórmulas exactas para los momentos de varias funciones de interés compuesto, incluyendo a A_n y a_n , las cuales representan los valores de los seguros y las anualidades respectivamente, cuando la tasa de interés fluctúa, y también lo hace para los momentos de las funciones de contingencia de vida A_X y a_x, cuando varían ambas: la edad de muerte y la tasa de interés. Las fórmulas exactas, sin embargo, son un poco tediosas de aplicar , y es por esa razón que posteriormente se propondrán fórmulas simples para los momentos, las cuales, brindan una correcta aproximación a los momentos extraídos directamente del modelo autoregresivo de segundo orden, excepto para duraciones o períodos muy cortos, especialmente en lo que concierne a las anualidades.

En gran proporción, la varianza de cada una de las varias funciones de contingencia de vida es debida a la variación en la edad de muerte(cubierta generalmente en todos los modelos modernos de aseguramiento de vida) . Paradójicamente, sin embargo, la pequeña variabilidad adicional dada por la fluctuación de la tasa de interés podría ocasionar una influencia más grande que la variación que produce la edad de la muerte, debido esencialmente a que esta última puede ser minimizada con la firma de varios contratos de seguros, mientras que la de la tasa de interés no.

4.3. Momentos de las anualidades y los seguros ciertos bajo el modelo original autoregresivo

Vamos a definir dentro de nuestro modelo a la variable S_t, como la suma acumulada de los $\{u_t\}$, entonces :

$$S_t = \sum_{r=1}^{t} u_r \qquad (4.3.1)$$

Asumamos ahora un capital de una unidad monetaria para darle facilidad a los cálculos. De esta manera el valor descontado del capital unitario al cabo de t **años será** como se presenta en el siguiente desarrollo:

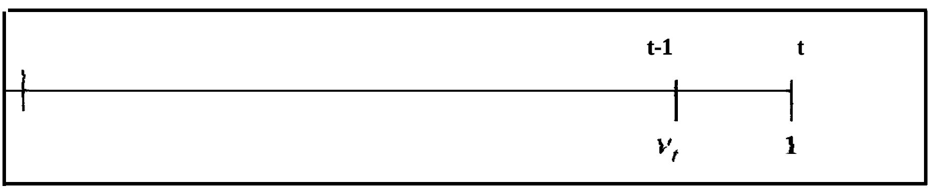
En primera instancia si suponemos que la tasa de interés no fluctúa, el valor descontado en t años, que representamos con $A_{\overline{t}|}$ es:

$$A_{\overline{t}|} = v^t$$

Pero como nuestro objetivo es analizar et caso en el cual la tasa de interés cambia, estableceremos primero el factor de descuento para el primer año, representado a través de un apropiado gráfico como sigue:

Figura 4.1

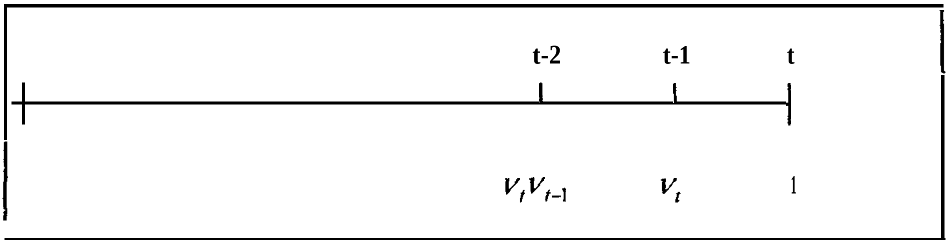
Flujo de Pagos en **t** años



De igual manera se procederá para el **año** siguiente:

Figura 4.2

Flujo de pagos en t años



Así, generalizando el proceso, es decír calculando el factor de descuento para cada año, hasta el año cero, se obtendrá:

$A_{\overline{t|}} = \quad v_t v_{t-1} v_{t-2} \ldots\ldots v_{t-(t-1)}$, pero como v, = $e^{-\delta_t} = ve^{u_t}$,según (4.2.2) entonces:

$$A_{\overline{t|}} = ve^{u_1} . ve^{u_2} \ldots\ldots ve^{u_t} = v^t e^{u_1+u_2+\ldots\ldots+u_t}$$

$$A_{\overline{t|}} = v^t e^{S_t} . \qquad (4.3.2)$$

Como habremos notado, $A_{\overline{t|}}$ es una variable aleatoria, pues depende de la fluctuación de la tasa de interés. Así mismo, basándonos en la ecuación (4.2.1) y (4.3.1) nos damos cuenta que la sumatoria acumulada de los $\{u_t\}$, es decir la variable S, , tiene una distribución multívariada normal, y que el valor descontado (4.3.2), es decir $A_{\overline{n|}}$, tiene una distribución lognormal, esto es debido a que en el desarrollo de $A_{n}\neg$ existe una función exponencial que tiene por exponente una combinación de variables normales, por lo que por definición obtenemos una distribución lognormal.

Con esto, se pueden obtener fórmulas exactas para los momentos de $\{S_t\}$, a partir de su distribución, de igual manera se puede hacer para la función $A_{t}\neg$, pero por facilidad en su aplicación, se pueden obtener aproximaciones de estos momentos, las mismas que trabajan de manera excelente. Desarrollemos a continuación estas aproximaciones, las cuales derivan otras fórmulas muy importantes especialmente en el ámbito de las aseguradoras.

4.4. Matriz de análisis

Por lo que anteriormente expusimos es claro que la variable S_t, es muy importante para todo el análisis de la aplicación actuarial en los modelos autoregresivos que estamos desarrollando. Sin embargo este modelo autoregresívo de orden 2, fue expresado en términos de u_t.

Ahora realizando un cambio de variable apropíado, a partír de la relación:

$$u_t = S_t - S_{t-1}$$

y reemplazando en el modelo originalmente presentado

$$(u_t = 2ku_{t-1} - ku_{t-2} + e_t),$$

Obtendremos lo siguiente:

$$S_t - S_{t-1} = 2k(S_{t-1} - S_{t-2}) - k(S_{t-2} - S_{t-3}) + e_t;$$

$$S_t = 2kS_{t-1} + S_{t-1} - 2kS_{t-2} - kS_{t-2} + kS_{t-3} + e_t$$

Agrupando en **función** de los S_t, la nueva **ecuación** será:

$$S_t = (1+2k)S_{t-1} - 3kS_{t-2} + kS_{t-3} + e_t \qquad (4.4.1)$$

la cual expresada matrícialmente nos queda:

$$\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2k & -3k & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{t-1} \\ S_{t-2} \\ S_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.4.2)$$

Esta matriz será **válida** para todo $t > 0$.

Prevíamente se puede definir, en base a la ecuación (4.3.1) que:

$S_0 = 0$
$S_{-1} = -u_0$
$S_{-2} = -(u_0 + u_{-1})$

que son valores que en los modelos Autoregresìvos se toman por definición para empezar a trabajar.

La ecuación (4.4.1) que definimos anteriormente, que expresaba al modelo en función de S_t, podría ahora ser escrita en forma matrícíal como sigue:

$$w_t = Aw_{t-1} + \varepsilon_t \, , \qquad \textbf{(4.4.3)}$$

donde w, , w_{t-1} y ε_t son vectores de dimensión $r+1$, r es el orden del modelo, y A es una matriz cuadrada de dimensión $(r+1)x(r+1)$, de tal manera que la ecuación es más fácilmente interpretada.

De acuerdo a (4.4.3):

$w_{t-1} = Aw_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$, y reemplazando en la expresión original:

$$w_t = A(Aw_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \, ,$$

Ahora realizamos lo mismo para w_{t-2}

$w_{t-2} = Aw_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$, obteniendo:

$$w_t = A(A(Aw_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \ ,$$

Generalizando el proceso,

$w_{t-(t-1)} = Aw_{t-(t-2)} + \varepsilon_{t-(t-1)}$, con lo que finalmente obtenemos:

$$w_t = A(A(A(A.........(Aw_{t-(t-2)} + \varepsilon_{t-(t-1)}) + \varepsilon_{t-(t-2)} + ...\varepsilon_{t-(t-(t-1))}) + \varepsilon_t \ ,$$

Con lo que :

$$w_t = A^t w_0 + A^{t-1}\varepsilon_1 + A^{t-2}\varepsilon_2 + ... + A^0\varepsilon_t \qquad (4.4.4)$$

Si seguimos un proceso, mediante el cual obtenemos los valores y vectores característicos de esta matriz A, y posteriormente ortonormalízamos los mismos, podemos concluir que para un determinado período largo t;

$$A^t \cong xy^T$$

donde x y y son los vectores propios de A .

Entonces, utilizando esta nueva expresión:

$$w_t \cong xy^T w_0 + xy^T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_t)$$

Considerando que los vectores aleatorios $\{\varepsilon_t\}$son independientes y cada uno de ellos tíene valor esperado 0 y una matriz de covarianza

Σ, procedemos a obtener los valores esperados de la función w_t. Es así que:

$$E(w_t) \cong E(xy^T w_0 + xy^T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots\dots\dots + \varepsilon_t))$$

$$E(w_t) \cong E(xy^T w_0) + E(xy^T \varepsilon_1) + E(xy^T \varepsilon_2) + \dots\dots\dots + E(xy^T \varepsilon_t)$$

Y como los vectores $\{\varepsilon_t\}$, tienen valor esperado 0, concluimos que:

$E(w_t) \cong E(xy^T w_0)$, por lo tanto

$E(w_t) \cong y^T w_0 x$.

Procedemos ahora a calcular la **varianza** de la variable w,

$$Var(w_t) \cong Var(xy^T w_0 + xy^T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots\dots\dots + \varepsilon_t))$$

$$Var(w_t) \cong Var(xy^T w_0 + xy^T \varepsilon_1 + xy^T \varepsilon_2 + \dots\dots\dots + xy^T \varepsilon_t)$$

Pero, basándonos en el siguiente teorema:

" Sea $C^T X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots\dots\dots + C_p X_p$ una combinación lineal entonces $Var(C^T X) = C^T S C$, donde S es la matriz de covarianzas" .

Y llamando a $C_1 = C_2 = \dots\dots\dots C_p = xy^T$. Entonces la fila $C^T = XY^T$.

De tal manera podríamos concluir que:

$Var(w_t) \cong (XY^T)\Sigma(XY^T)^T$, pero sabiendo que :

$(AB)^T = B^T A^T$, donde A y **B** son dos matrices cualesquiera, y que :

$(B^T)^T = B$, y recordando que la variable xy^T se repite t veces, encontramos finalmente que:

$$Var(w_t) \cong txy^T \Sigma yx^T$$

Ahora vamos a proceder a obtener la Covarianza de la variable w, con la variable w_s :

$$Cov(w_t, w_s) \cong Cov(xy^T w_0 + xy^T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_t), xy^T w_0$$

$$+ xy^T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_s))$$

Para obtener esta Covarianza, hacemos referencia al siguiente teorema:

Sean b y c dos vectores cualesquiera de la forma :

$$b^T X = b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_p X_p$$

$$c^T X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_p X_p$$

entonces su Covarianza será igual a:

$$Cov(b^T X, c^T X) = b^T \Sigma c$$

Tomando en referencia dicho teorema, y sabiendo que para nuestro caso en particular los vectores b y c son iguales, tendríamos que:

$$Cov(w_t, w_s) \cong XY^T \Sigma (XY^T)$$

Pero sabiendo que (AB)' = $B^T A^T$, y $(B^T)^T$ = B, *y* que las Covarianzas sólo se realizarán entre las variables existentes, y éstas se repetirán el mismo número de veces, concluimos que:

$$Cov(w_t, w_s) \cong min(t,s) xy^T \Sigma yx^T$$

Con lo que hemos hallado buenas aproximaciones para los momentos de w_t, procederemos a hallar los momentos de S_t.

Para el efecto primero hallemos los valores y vectores característicos de la matriz (4.4.2).

Teniendo en cuenta la matriz identidad de dimensión 3 y la matriz (4.4.2), se obtiene el polínomío característico:

$\det(A - \lambda I) = 0;$

es decir:

$$det\begin{bmatrix} 1+2k-\lambda & -3k & k \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Resultando el polínomío **característico** de grado 3:

$$(1 + 2k - \lambda)(\lambda^2) + 3k(-\lambda) + k(1) = 0$$

Factorizando;

$$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2k\lambda - k) = 0$$

Obtenemos de este modo los **valores** característicos de esta matríz:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_{2,3} = k \pm \sqrt{k^2 - k}$$

Ahora procedemos a hallar los vectores característicos de la misma.

Trabajemos para el primer valor característico, esto es:

$$\lambda_1 = 1$$

Con el valor de uno y la matríz (4.4.2) aumentada:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1+2k-1 & -3k & k & 0 \\ 1 & 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0-1 & 0 \end{array}\right.$$

quedando reducida a la matriz :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y se obtíene el siguiente vector característico:

$$x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Realízando el mísmo **procedímíento** para el valor de $\lambda_2 \; y \lambda_3$, obtenemos el siguiente vector:

$$y = \begin{Bmatrix} 1/(1-k) \\ -2k/(1-k) \\ k/(1-k) \end{Bmatrix}$$

Ahora que tenemos los dos vectores propios, y recordando que ellos son ortonormales es decir su producto $xy^T = 1$, procedemos a hallar los momentos de S_t, a partir de los momentos de w_t .

Sabiendo que:

$E(w_t) \cong y^T w_0 x$, faltaría hallar sólo el vector w_0. Para el efecto utilizaremos el hecho que :

$w_t = Aw_{t-1} + \varepsilon_t$, de tal manera que, $w_0 = Aw_{-1} + \varepsilon_0$, en forma matrícíal:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_{-1} \\ S_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2k & -3k & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{-1} \\ S_{-2} \\ S_{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4.3.1) obtenemos los valores de S_{-1}, S_{-2}, y S_{-3} , por tanto:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_{-1} \\ S_{-2} \end{bmatrix} = w_0 = \begin{bmatrix} -u_0(1+2k) + 3k(u_0 + u_{-1}) - k(u_0 + u_{-1} + u_{-2}) \\ -u_0 \\ -(u_0 + u_{-1}) \end{bmatrix}$$

Así, habiendo hallado los tres vectores que se encuentran implicados dentro de la fórmula correspondiente, multiplicando se tiene:

$$E(w_t) \cong y^T w_0 x$$

$$E(w_t) \cong \begin{bmatrix} \frac{1}{1-k} & \frac{-2k}{1-k} & \frac{k}{1-k} \end{bmatrix} w_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

reemplazando w_0 con el valor que hallamos anteriormente.

Con lo que, finalmente obtenemos que:

$$E(w_t) = E\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix} \cong \begin{vmatrix} \frac{k(u_0 - u_{-1})}{1-k} \\ \frac{k(u_0 - u_{-1})}{1-k} \\ \frac{k(u_0 - u_{-1})}{1-k} \end{vmatrix}$$

Así:

$$E[S_t] \cong k(u_0 - u_{-1})/(1-k) = \ln C;$$

Que es la aproximación buscada del primer momento de S_t.

Calculemos ahora la varianza de la variable S_t a partir de la fórmula

para la variable w_t :

$$Var(w_t) \cong txy^T \Sigma yx^T$$

reemplazando cada uno de los vectores, y recalcando que la matriz Σ representa a la mafríz de varianzas-covarianzas de los errores aleatorios y tomando en cuenta la ecuación (4.4. 1), obtenemos:

$$Var(w_t) \cong t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{1-k} & \frac{-2k}{1-k} & \frac{k}{1-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{1-k}\\ \frac{-2k}{1-k}\\ \frac{k}{1-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones correspondientes, resulta que:

$$Var(w_t) = Var\begin{bmatrix}S_t\\S_{t-1}\\S_{t-2}\end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix}\frac{t\sigma^2}{(1-k)'} & \frac{t\sigma^2}{(1-k)'} & \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2}\\ \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2}\\ \frac{t\sigma^2}{(1-k)'} & \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2}\end{bmatrix}$$

es decir,

$$Var(S_t) \cong \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2}$$

Que es la aproximación buscada del segundo momento de S_t.

La **Covarianza entre** las variables S_t, $y\ S_s$, se la obtiene a partir de la fófmula:

$$Cov(w_t, w_s) \cong min(t,s) xy^T \Sigma yx^T \text{ .}$$

Para el efecto se realizarán los mismos cálculos que para la varianza, sino que en la multiplicación se tomará como escalar al mínimo subíndice entre las variables S,, $y\ S_s$, obteniendo de tal forma que:

$$Cov(w_t, w_s) \cong min(t,s) xy^T \Sigma yx^T$$

Matricialmente,

$$Cov(S_t, S_s) \cong min(t,s) \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} \\ \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} \\ \frac{c\ ?}{(1-k)^2} & \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} & \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} \end{bmatrix}$$

Que es la aproximación de la covarianza buscada.

De este modo hemos hallado las aproximaciones de los momentos de $\{S_t\}$.

Anteriormente habíamos citado que la función $A_{\overline{t}|}$ tiene una distribución lognormal, entonces usando la ecuación (4.3.2) y las aproximaciones encontradas para los momentos de la distribución antes citada, encontramos:

$$E(A_{\overline{t}|}) \cong C v^t e^{t\Delta/2}; \qquad (4.4.5)$$

$$Var(A_{\overline{t}|}) \cong (E(A_{\overline{t}|}))^2 (e^{t\Delta} - 1); \qquad (4.4.6)$$

$$Cov(A_{\overline{t}|}, A_{\overline{r}|}) \cong E(A_{\overline{t}|}) E(A_{\overline{r}|})(e^{min(t,r)\Delta} - 1). \qquad (4.4.7)$$

donde $A = \dfrac{\sigma^2}{(1-k)^2}$

Puesto que $a_{\overline{n}|}$ es simplemente la suma de la función $A_{\overline{t}|}$ evaluada desde el instante 1 hasta el instante *n*, las aproximaciones de los momentos de estas anualidades, $a_{\overline{n}|}$, pueden ser obtenidas mediante la suma de las progresiones geométricas implicadas de insertar las funciones **(4.4.5), (4.5.6),** y (4.4.7) de los momentos de $A_{t\neg}$.

Trabajemos en primera instancia con el valor esperado de $A_{t\neg}$:

E($A_{t\neg}$) $\cong C v^t e^{t\Delta/2}$; ahora reemplazando los valores correspondientes:

$$E(a_{t\neg}) = C \sum_{t=1}^{n} v^t e^{t\Delta/2} = C(v^1 e^{\Delta 1/2} + v^2 e^{\Delta} + \ldots\ldots\ldots v^n e^{\Delta n/2}),$$ que es una serie geométrica, con razón igual a $v\, e^{\Delta/2}$, por lo tanto su suma seré: $\frac{1}{1-v\ e^{\Delta/2}}$, luego, como sabemos que $v = e^{-\delta}$, finalmente obtendremos funciones de **interés** evaluadas en $-\delta + \Delta/2$, es decir la función: $\frac{1}{1-e^{-\delta+\Delta/2}}$.

Como la cantidad A $= \frac{\sigma^2}{(1-k)^2}$ es pequeña, utilizando las aproximaciones de las series de Taylor a las funciones de interés evaluadas en δ, obtenemos el valor esperado de $a_{t\neg}$, resultando:

$$E(a_{t\neg}) \approx C[{}^{\delta}a_{t\neg} + {}^{\delta}(IA)_{t\neg}\Delta/2]; \qquad (4.4.8)$$

Cabe recordar que el **índice** sobre el lado izquierdo de algún parámetro significa el valor en que va a ser **evaluada** la fuerza del **interés.**

Volviendo a nuestra explicación, recalquemos que $d = 1 - v$, es un factor de tasa de descuento, y (IA_t) **no** es mas que un tipo de seguro del cual hablamos en el capitulo anterior.

Ahora, para la **varianza** obtenemos que la **razón** de esta **serie,** será: $v^2 e^{\Delta}(e^{\Delta} + 1)$ y su suma igual a : $\dfrac{1}{1 - v^2 e^{\Delta}(e^{\Delta} + 1)}$, encontrando una función de **interés evaluada** en $-2\delta + 2\mathrm{A}$ y $-2\delta + \Delta$, es decir la función: $\dfrac{1}{1 - C^2(e^{-2\delta + 2\Delta} + e^{-2\delta + \Delta})}$, por último utilizando el mismo criterio que para el valor esperado, se tiene que:

$$\text{Var}(a_{\overline{t|}}) \approx C^2[2v({}^{\delta}a_{\overline{t|}} - {}^{2\delta}a_{\overline{t|}})/d^2 - (1+v)^{2\delta}(IA)_{\overline{t|}}/d]\Delta; \qquad (4.4.9)$$

Igual que antes, los prefijos de los **parámetros** dentro de las ecuaciones de **los** momentos de la **función** $a_{\overline{t|}}$, corresponde a la fuerza de interés en el que cada uno de ellos será evaluado, por ejemplo ${}^{\delta}a_{\overline{t|}}$ es el parámetro **a,** calculado a la fuerza de interés 6, y $^{2\delta}a_{\overline{t}|}$ representa el parámetro $a_{\overline{t}|}$ calculado a la fuerza de interés 2s.

Estas aproximaciones, brindan una muy buena estimación, de los segundos momentos de las funciones $a_{\overline{t}|}$ y $A_{\overline{t}|}$, pero en periodos largos, puesto que para periodos cortos, las estimaciones no son tan satisfactorias.

4.5. Momentos de fas anualidades y los seguros de vida.

Los momentos de las anualidades y de los seguros de vida, como ya lo expresamos anteriormente son muy ímportantes dentro de la economía de los seguros, ya que de ellos dependen tanto la índémnízacíón que pagará la empresa aseguradora al ente asegurado en caso de que se presente algún siníestro de los que se hallan estípulados en el contrato, y tambíén el riesgo con el que trabaja la empresa aseguradora.

Generalmente la mayoría de las teorías que se fian desarrollado hasta el momento, trabajan únicamente con la variable aleatoria que representa a la edad de la muerte de los asegurados, e incluso actualmente las empresas que se dedican a este tipo de negocios utílízan este fundamento teórico para desarrollar sus cálculos de indemnizaciones y de riesgo. El modelo que se presenta aquí está basado no sólo en considerar al año de muerte como variable aleatoria, sino que también toma en consideracídn la fluctuación de la tasa de interés, situación que generalmente acontece en nuestro país muy a menudo. Cabe recalcar que las funciones de aproximación para los momentos que definimos anteriormente, pueden aún ser generalizados para cualquíer otro modelo.

Para obtener las funciones de aproximación para los momentos de las anualidades y los seguros de vída, basta tomar al valor esperado y la varianza condicional de fas aproximaciones previas, pero ahora respecto a la edad de muerte de los asegurados , y asumiendo que ésta y el proceso de la variación de la tasa de interés son variables aleatorias independientes, lo cual parece lógico suponer.

Así se tíene:

$$Var(A_x) \approx C^2\{[{}^{2\delta}(IA)_x]\Delta + [{}^{2\delta}A_x - ({}^{\delta}A_x)^2]\};$$

$$Cov(A_x, a_x) \approx C^2\{[v^{t\,\delta}(Ia)_x]\Delta + [({}^{2\delta}A_x - ({}^{\delta}A_x)^2 / d]\};$$

$$Var(a_x) \approx C^2\{[2v({}^{\delta}a_x - {}^{2\delta}a_x)/d^2 - (1+v)^{2\delta}(Ia)_x / d]\Delta +$$

$$+[({}^{2\delta}A_x - ({}^{\delta}A_x)^2 / d]\};$$

Vale observar que en cada una de estas fórmulas, el primer término pertenece a la componente del segundo momento atribuible a la variación de la tasa de interés, y el segundo término es el atríbuíble, a la variación de fa edad de muerte, lo cual es usado en los modelos clásicos.

4.6. Un modelo autoregresívo más general

Los resultados que se han obtenído anteriormente en el desarrollo de este tema, han sido una particularidad de resultados más generales, pues se consideró la aplicación de un modelo autoregresivo de orden dos.

Por tal motivo procederemos en este momento a examinar la conducta de modelos autoregresívos de orden r-ésímo.

Consideremos entonces el siguiente modelo autoregresivo:

$$\delta_t - \delta = \sum_{j=1}^{r} a_j(\delta_{t-j} - \delta) - e_t \qquad (4.6.1)$$

y definimos k como:

$$0 < k = \sum_{j=1}^{r} a_j < 1 \qquad (2)$$

Esta condición quiere decir que en ausencia de la variable del error aleatorio e_t, el proceso podría aproximar a δ como un valor incrementado de **t**.

Ahora, considerando que:

$$u_t = \delta - \delta_t \text{ , y}$$

$$S_t = \sum_{r=1}^{t} u_r$$

encontramos que:

$$S_t = (1 + a_1)S_{t-1} + \sum_{j=1}^{r-1}(a_{j+1} - a_j)S_{t-j-1} - a_r S_{t-r-1} + e_t \text{ ,} \qquad (4.62)$$

Y en forma matricial, tenemos:

$$\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \\ \\ \\ S_{t-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & . & . & -a_r \\ 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{t-1} \\ S_{t-2} \\ \\ \\ S_{t-r-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.6.3)$$

lo cual es válido para todo $t>0$.

Definimos $S_0 = 0$, $y\ S_{-q} = -\sum_{j=0}^{q-1} u_{-j}$, $(0 < q \le r)$ entonces la matriz A definida anteriormente, tiene la siguiente ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^r - a_1\lambda^{r-1} - a_2\lambda^{r-2} - ....- a_r) = 0.$$

De aqui podemos saber que uno de los valores característicos es igual 1. Este valor también es llamado el valor característico dominante, ya que es el valor máximo de todos estos valores .

Existen dos vectores característicos, y, x que corresponden al valor característico dominante , el un vector es:

$$x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{yelotroes} \quad y = \begin{vmatrix} 1/(1-k) \\ -a_1/(1-k) \\ -a_2/(1-k) \\ \\ \\ -a_r/(1-k) \end{vmatrix}$$

Podemos concluir además , usando los mismos argumentos anteriores que:

$$E(S_t) \cong (\sum_{j=1}^{r} a_j \sum_{i=0}^{j-1} u_{-i})/(1-k) = \ln C$$

$$Var(S_t) \cong t\Delta;$$

$$Cov(S_t, S_u) \cong min(t,u)\Delta;$$

$$con\ \Delta = \sigma^2/(1-k)$$

Todo este análisis es la generalización del modelo de orden dos.

4.7. El proceso del interés

Para modelar de algún modo las variables económicas, generalmente los Modelos Autoregresivos (AR) son los más utilizados, debido a que son precisamente ellos los que se ajustan a estas variables de mejor manera. Además de ésto, también es conocido que aunque los modelos AR son utílízados para los fines anteriormente expresados, el máximo orden recomendable con el cual se trabaja es el tercero, es decir que para el caso concreto del proceso del interés utilizaremos un modelo no mayor al tercer orden.

En este proceso de Interés, la varianza de la variable $u_t = \delta - \delta_t$ será índependíente de t, esto es aseverado por la característica de estacíonariedad del modelo y de igual manera la correlación ρ_1 entre

u_t y u_{t-1}, y la correlación ρ_2 entre las variables u_t y u_{t-2} serán también independientes de t. De este modo, dado que la ecuación (3.6.1) es reemplazada con r = 3, establecemos un modelo AR de tercer orden y con la ayuda de la matriz de análisis (3.6.3) se tiene

$$\rho_1 = (a_1 + a_2 a_3)/[1 - a_2 - a_3(a_1 + a_3)] \quad (4.7.1)$$

$$\rho_2 = a_2 + (a_1 + a_3)\rho_1; \quad (4.7.2)$$

$$Var(\delta_t) \cong \sigma^2 / \left[(1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) - 2(a_1 a_2 + a_2 a_3)\rho_1 - 2a_1 a_3 \rho_2\right] \quad (4.7.3)$$

Basándonos en la ecuación **(3.6.2)**, y desarrollándola para $r = 2$ obtenemos :

$$S_t = (1 + a_1)S_{t-1} + (a_2 - a_1)S_{t-2} - a_2 S_{t-3} + e_t \qquad \textbf{(4.7.4)}$$

Como nuestro modelo AR(3) es: $S_t = (1 + 2k)S_{t-1} - 3kS_{t-2} + kS_{t-3} + \mathbf{e}_t$, igualando el mismo con la ecuación **(4.7.4)**, tendríamos el sistema de ecuaciones:

$$1 + a_1 = 1 + 2k$$
$$a_2 - a_1 = -3k$$
$$-a_2 = k$$

Obteniendo del mismo, los valores buscados, esto es:

$$a_1 = 2k$$
$$a_2 = -k$$

Luego, reemplazando estos valores en las ecuaciones **(4.7.1)**, (4.7.2) y **(4.7.3)**, finalmente obtendremos que:

$$\rho_1 = \frac{2k}{(1+k)}; \qquad (4.7.5)$$

$$\rho_2 = \frac{k(3k-1)}{(1+k)}; \qquad (4.7.6)$$

$$Var(\delta_t) \cong \frac{\sigma^2(1+k)}{\left[(1+3k)(1-k)^2\right]} \qquad (4.7.7)$$

Ahora utilizando las fórmulas **(4.7.5)**, (4.7.6) y **(4.7.7)**, se deduce el valor de la **varianza** de la variación de la fuerza de interés:

$$Var(\delta_t - \delta_{t-1}) \cong \frac{2\sigma^2}{(1+3k)(1-k)}$$

Luego, reemplazando estos valores en las ecuaciones **(4.7.1)**, **(4.7.2)** y **(4.7.3)**, finalmente obtendremos que:

$$\rho_1 = \frac{2k}{(1+k)}; \qquad (4.7.5)$$

$$\rho_2 = \frac{k(3k-1)}{(1+k)}; \qquad (4.7.6)$$

$$Var(\delta_t) \cong \frac{\sigma^2(1+k)}{\left[(1+3k)(1-k)^2\right]} \qquad (4.7.7)$$

Ahora utilizando las fórmulas **(4.7.5),** (4.7.6) y **(4.7.7),** se deduce el valor de la **varianza** del cambio de la fuerza **dl** interés.

$$Var(\delta_t - \delta_{t-1}) \cong \frac{2\sigma^2}{(1+3k)(1-k)}$$

4.8. Un ejemplo numérico

La **utilización** que le podemos dar a esta investigación puede desarrollarse tanto dentro del ámbito financiero como en el actuar-ial. **A** continuación desarrollaremos aplicaciones de cada uno de ellos.

Campo Financiero:

Dentro del ámbito financiero podemos citar el caso en que un determinado ente quisiera realizar un préstamo a una cierta compañía. El beneficiario del préstamo se compromete a pagar al cabo de 20 años y con una tasa de interés promedio en el momento del préstamo del 15%, pero él quisiera saber cuanto realmente va a tener de ese monto al cabo de los 20 años, sabiendo que en realidad la tasa de interés va variando en ese lapso de tiempo, y que dicha variación puede ser explicada con un modelo autoregresivo

Solución:

Una vez que se ha planteado y entendido el problema, procedemos a utilizar un software desarrollado en este trabajo de investigación con los métodos discutidos, que facilita los cálculos, considerando como variables la varianza, los valores de la tasa de interés con la cual arranca el ejercicio, el monto, el valor de k, que es 0.66 (este valor de k fue obtenido utilizando la ecuación de Yule-Walker , con los valores de la variación de la tasa de interés en el Ecuador en los últimos años, como se observa en el Anexo I) y el tiempo del ejercicio, observemos:

Ingresando en el software como tasa de interés inicial 15%, como tasa de interés de arranque del ejercicio 16% y 16.5%, tomando la varianza de 0,8 (valor obtenido con la variación de la tasa de interés en el Ecuador en lo últimos años) e ingresando el capital prestado que en este caso es 10 millones de sucres, obtenemos que el valor del dinero dentro de veinte años será tan solo 612,153.57154 *sucres*.

Este cálculo puede ser observado más fácilmente en el anexo A.

Como hemos podido observar, podemos obtener cálculos con mucha facilidad y rapidez, eso si, se requiere conocer el valor de k, que es el factor que representa las raíces del polinomio característico del Modelo Autoregresivo, que para efectos prácticos, debe ser evaluado, ajustando las tasas de interés observadas en un largo periodo de tiempo, al modelo autoregresivo del orden respectivo.

En lo que respecta a la tasa de arranque, su valor puede ser incluso el mismo que la tasa de interés promedio, en este caso es así como lo hemos considerado.

Aplicación numérica en el Campo Actuarial:

Dentro del campo actuarial, podemos considerar el caso de un individuo que quisiera comprar un seguro, por intermedio del cual el beneficiado recibirá una indemnización de cierta cantidad de dinero en caso de sufrir algún siniestro. Se conoce la tasa de interés en el momento de firmar el contrato, y además la edad del individuo.

La pregunta es: ¿ Cuál es el valor total que debe pagar el beneficiado a la aseguradora para acreditarse esa indemnización en caso de sufrir algún siniestro?.

Por ejemplo:

Asumamos que la edad del individuo en el momento de firmar el contrato es 35 años y que la tasa de interés en ese instante es 18%, además se conoce que la indemnización a recibir por parte del asegurado será 80 millones de sucres.

Solución:

Para resolver este problema, recurrimos a la ayuda del software implementado para el caso, para el efecto consideramos las variables necesarias, es decir , la edad del individuo (35 años), la tasa de interés en el momento de la firma del contrato (18%), y el capital **asegurado o el monto** de **la indemnización (** 89 millones de sucres).

Ingresando los valores en el sistema, obtenemos que el valor requerido es: ***1.387.099,30823*** sucres ***(anexo B), y el*** riesgo de realizar esta operación será: **0,02281799** (anexo C).

La forma en que el software nos muestra los cálculos puede ser vista en el anexo.

Cabe notar que el sistema que se ha estado utilizando también nos da como resultado la varianza de efectuar una operación, la cual como se analizó antes, debemos tomarla como el riesgo de efectuar dicha operación de seguro.

Otro ejemplo del cálculo actuarial es, cuando por ejemplo, una persona desea contratar un seguro y está dispuesta a realizar los pagos por este contrato de manera anual(primas).

Sabiendo que la tasa de interés en el momento de la firma del contrato es 40%, la prima anual es 100000 sucres y que el individuo tiene 55 años en el momento de efectuar el contrato, la pregunta es la siguiente:

¿Cuál será la indemnización que deberá recibir el individuo?

Solución:

Ingresando los valores correspondientes al sistema, procedemos a realizar los cálculos. Las tasas de arranque con las vamos a trabajar son 40% y 42%.

Una vez establecido estos parámetros, la respuesta es: **8.050.660,66 sucres(** anexo **D)**, es decir, ésta será la cantidad que recibirá el asegurado como indemnización.

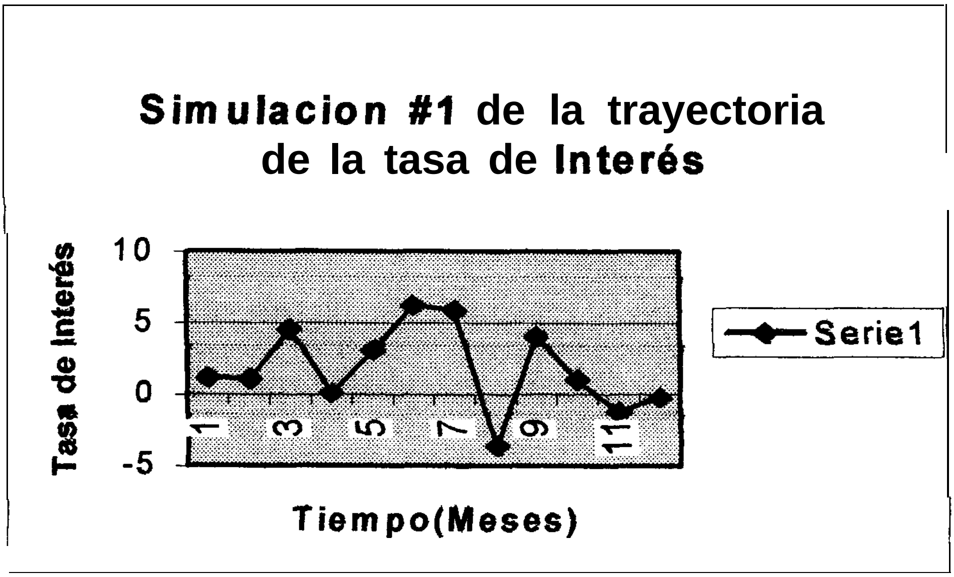
El riesgo de esta transacción será: **000,08105336** (anexo E).

El uso del **software** es importante para facilitar los cálculos, además el mismo contempla todos y cada uno de los criterios estudiados en el desarrollo de esta investigación.

Es importante mostrar también, dos gráficos que explican la simulación de la trayectoria de la tasa de interés observada

Figura 4.3

Simulación # 1

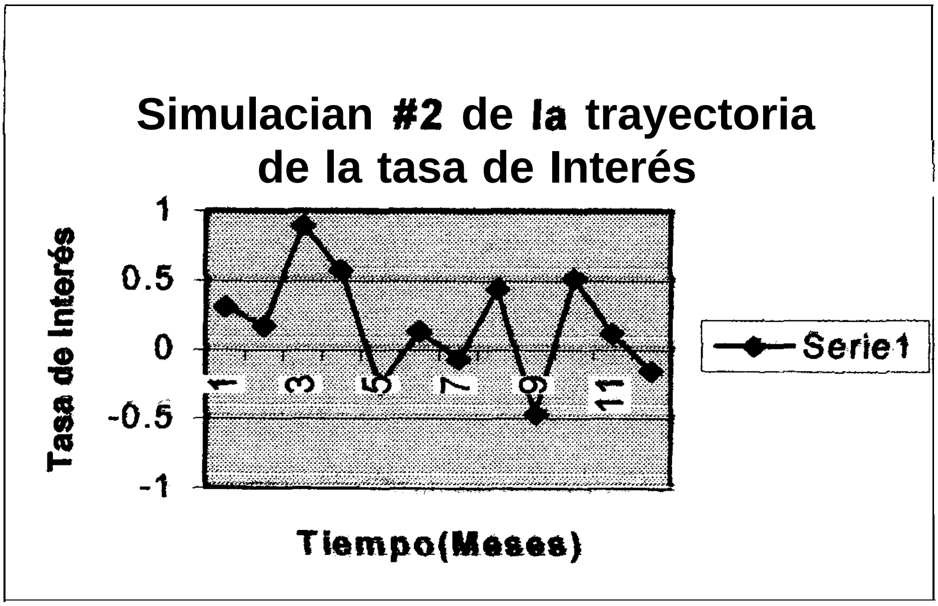


En esta simulación hemos considerado una tasa inicial de 60% y como valores de arranque de interés, 60% y 65%, para la varianza tomamos el valor de 3 y el valor de k es 0.8.

Otra simulación de la trayectoria de la tasa de interés con los mismos datos será:

Figura 4.4

Simulación # 2



Cabe notar que cuando el gráfico nos muestra tasas de interés negativas, éstas son tasas de descuento.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

Una vez concluido este trabajo de investigación, se pueden establecer las conclusiones generales siguientes:

1. - El concepto bajo el cual se ha desarrollado la teoría clásica financiera y actuarial ha estado fundamentada bajo la consideración única de la variación del tiempo de una determinada negociación, en el caso financiero, o de la edad de muerte de un individuo en el caso actuarial, sin considerar en ambos casos la variación de la tasa de interés en el tiempo.

2. - La variable que representa a un seguro cierto $A_{\overline{t}|}$ anteriormente fue tratada como una simple función de interés, en la cual se evaluaba éste de acuerdo al tiempo establecido por el negocio o contrato, en cambio ahora tiene carácter aleatorio, pues depende de la variación de la tasa de interés en el tiempo.

3. - En esta ínvestígacíón el uso prímordíal que se le ha dado al modelo autoregresivo y sus momentos ha sido para descuentos, pero también puede ser utilizado para caso de acumulaciones, como es el caso del establecimiento de los fondos de reserva.

4. - Para el desarrollo de los momentos de anualidades y seguros de vida consideramos la fluctuación de los años de muerte del asegurado, como lo hace la ciencia actuarial convencional, y la variación de la tasa de interés.

5. - Para la realidad ecuatoriana en el ámbito económico y financiero es muy importante el tratamiento de la variación en las tasas de interés, pues contempla el constante problema al que se enfrentan países de economía cambiante como el nuestro.

6. - La ventaja que se obtuvo al trabajar con matrices es que con esta herramienta se puede observar mejor el problema y visualizar los resultados de manera óptima.

7. - Para la realización de los cálculos se ha implementado un software utilizando el programa Visual Basic 5.0 el cual ha facilitado la obtención de la anualidades y seguros ciertas y de vida. Los resultados que este sistema nos brinda son los valores esperados y las varianzas de las anualidades y seguros, con los valores esperados sabremos el monto que tiene que pagar el asegurado para acreditarse la indemnización, y con la varianza sabremos el riesgo que corre el asegurador al firmar ese contrato, esto en lo que refiere al caso actuarial, y para el caso financiero se toma el mismo criterio, pero en función de inversiones de dinero en un tiempo determinado. Se observa aquí, la gran ventaja del uso del recurso informático, para resolver

problemas como este, que de otra manera requeriría de tediosos y largos cálculos manuales.

8. - A partir del modelo autoregresivo podemos también generar simulaciones en la que se muestre la trayectoria de la tasa de interés, con lo que podemos tener una idea del comportamiento de ésta en el tiempo.

9. - El análisis que se ha hecho se puede generalizar para cualquier modelo autoregresivo de orden **r** si el caso lo amerita.

RECOMENDACIONES

Para el correcto y útil aprovechamiento de los resultados obtenidos dentro del desarrollo de este tema de investigación es necesario hacer ciertas recomendaciones y sugerencias que se puntualizan a continuación:

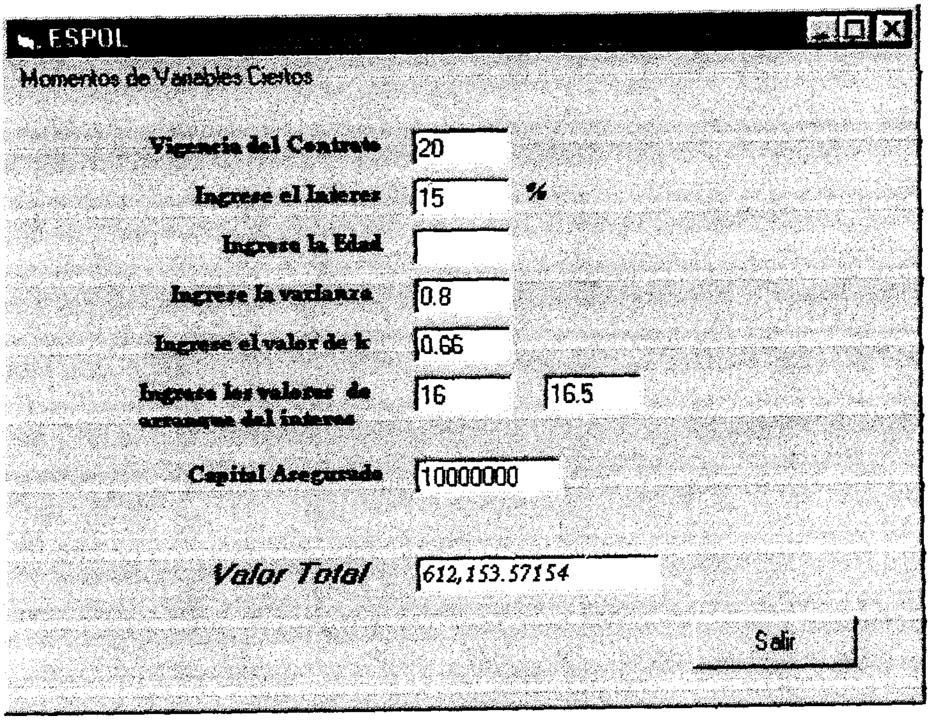
1.- Dentro de esta investigación se ha tratado sobre valores de descuento, en lo posible se sugiere profundizar en temas sobre los valores acumulados, que son de utilidad en lo que respecta a los fondos de reserva.

2.- Si bien es cierto que nuestro país está a un paso de implementar el sistema de la dolarización, por consiguiente vivir en una realidad de seguridad económica y monetaria que a su vez lleve a una variación mínima o nula de la tasa de interés, es importante considerar esta investigación en cualquier economía con características similares a la nuestra.

ANEXOS

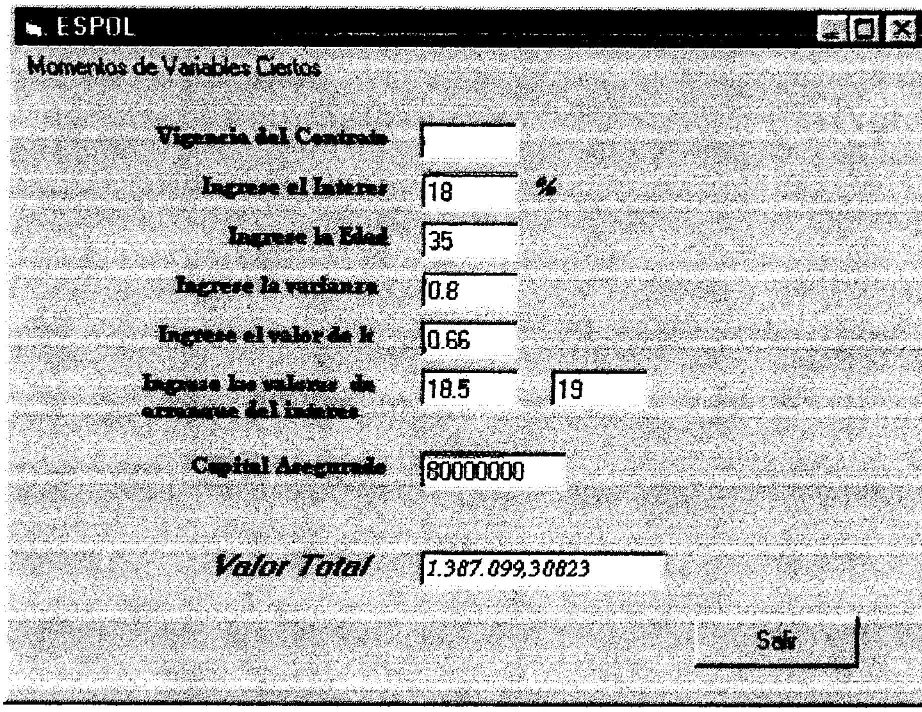
ANEXOS

Anexo A



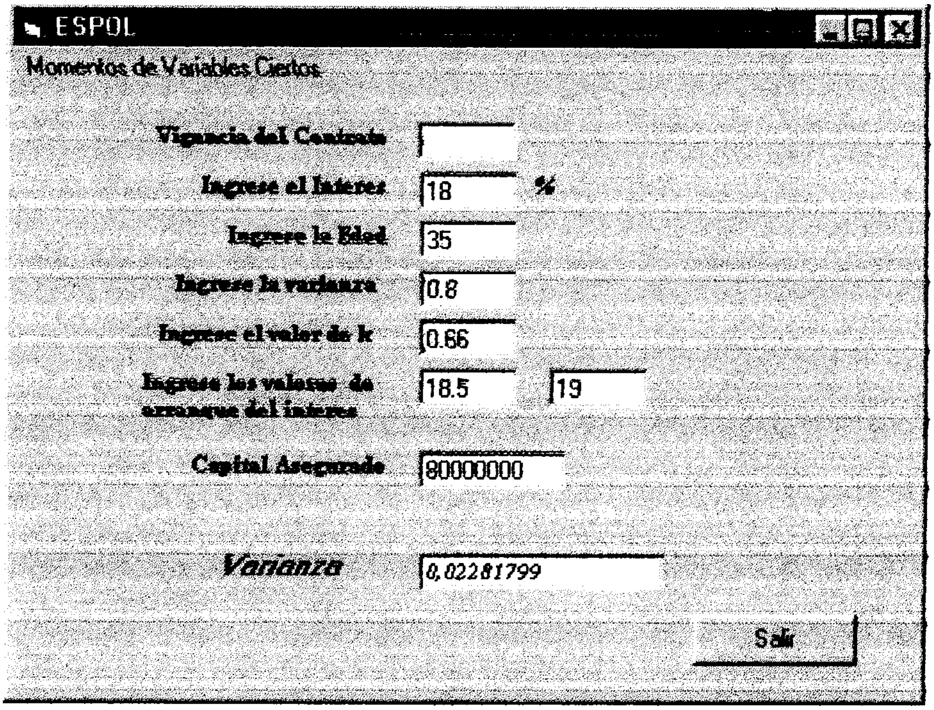
En esta pantalla podemos observar la forma en que el sistema realiza los cálculos para hallar el valor del dinero en el tiempo, es decir la Aplicación Financiera.

Anexo B.



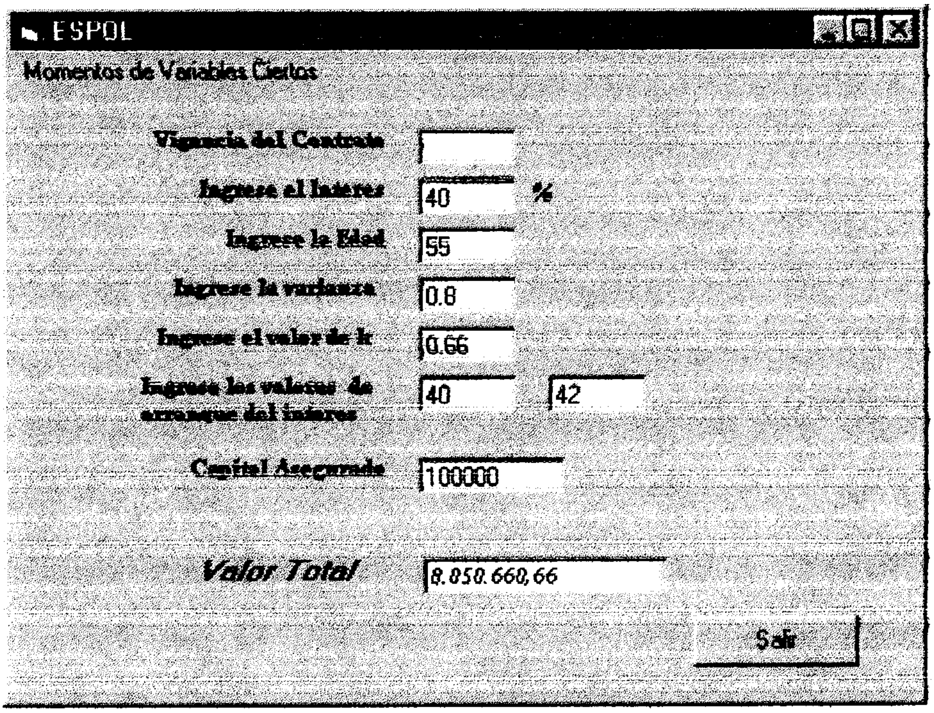
En esta pantalla , apreciamos la forma en que el programa muestra la respuesta de los cálculos solicitados, en este caso, sobre el valor del seguro a contratar, es decir, una Aplicación Actuarial.

Anexo C



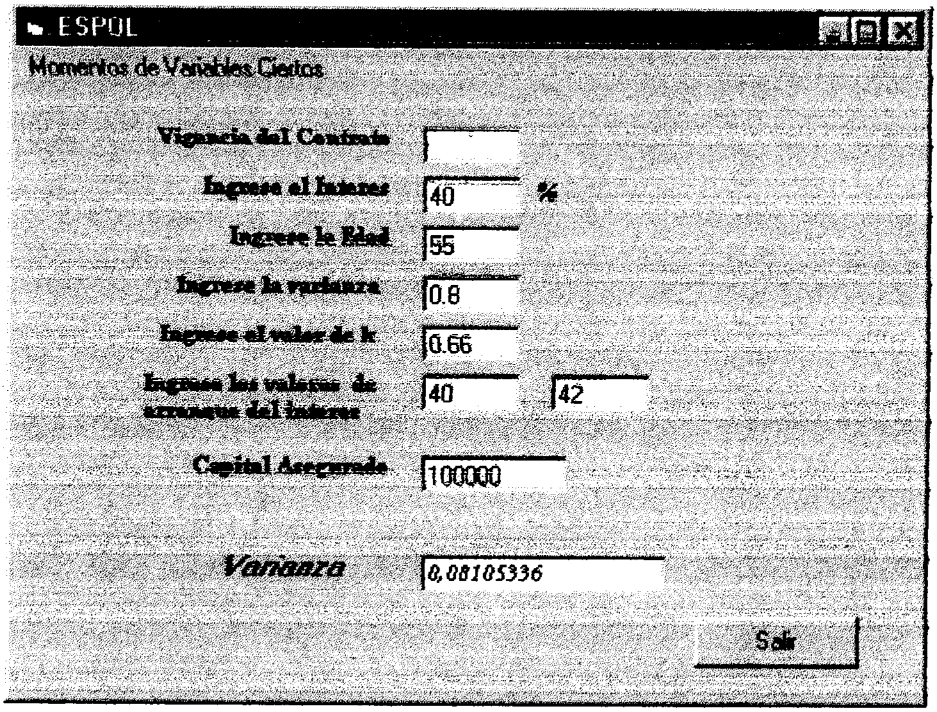
En esta pantalla, observamos fa forma en que el programa nos muestra la varianza de esta operación de seguro, es decir, el riesgo de efectuar dicha operación.

Anexo D.



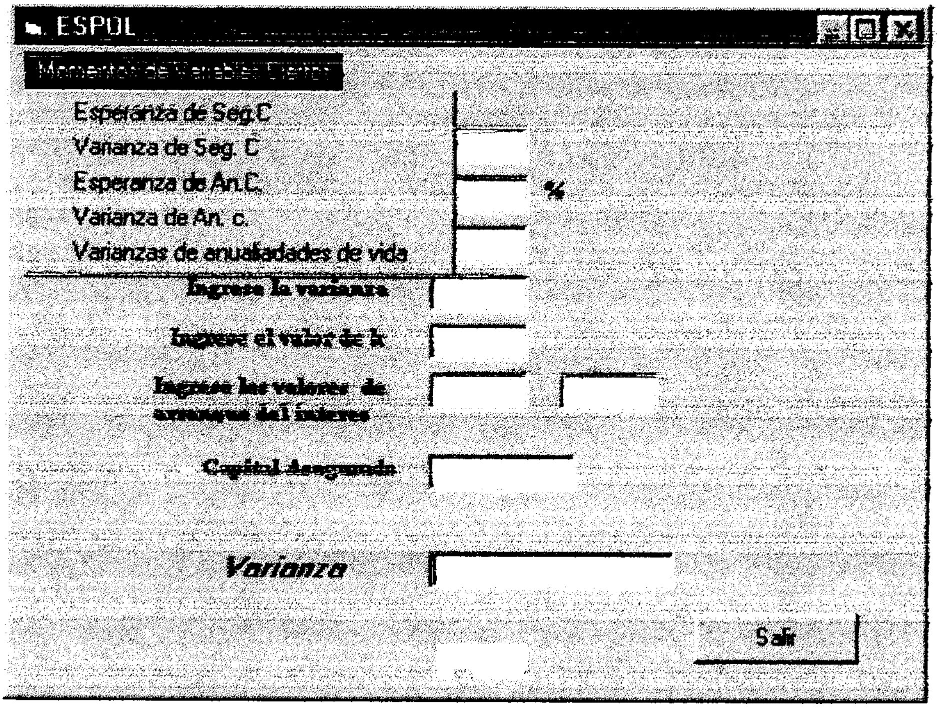
En esta pantalla podemos apreciar la forma en que se calcula el valor de la prima única (Aplicación Actuarial).

Anexo E.



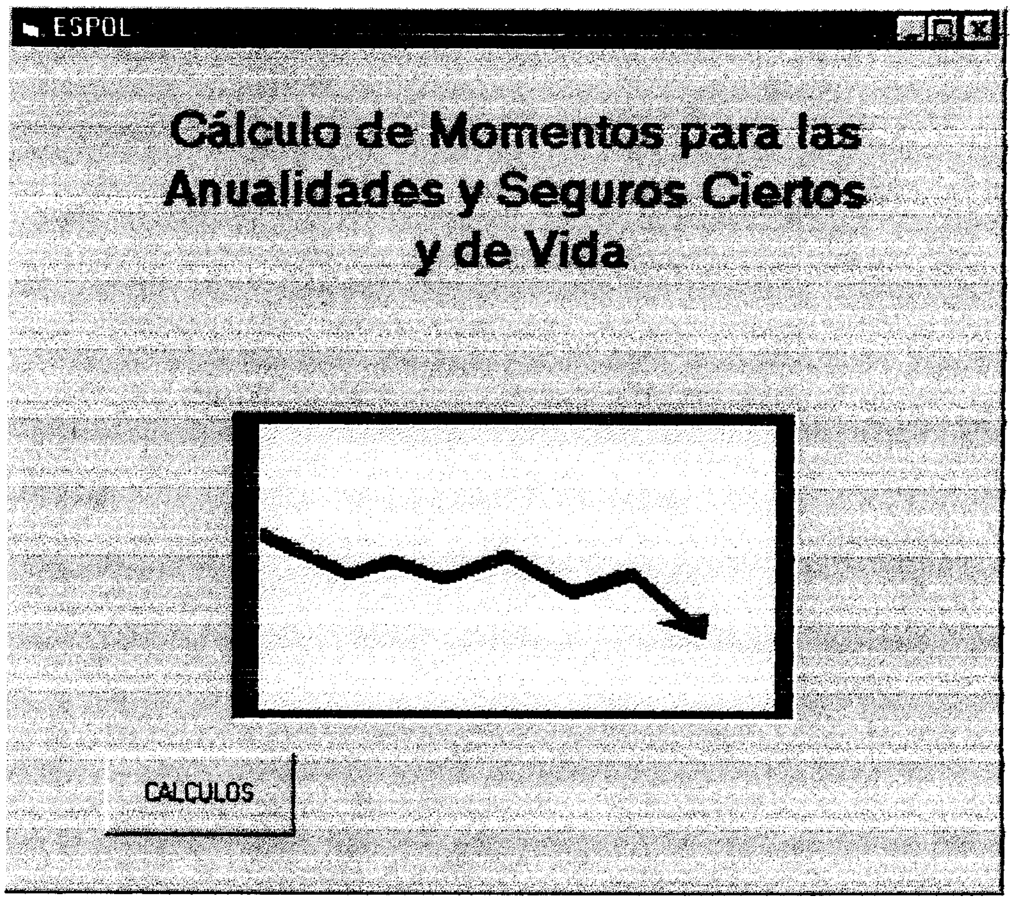
Aquí, se aprecia la pantalla que nos muestra la **varianza** de una determinada operación, es decir el riesgo que involucra el contraer la misma.

Anexo F.



Aquí se muestra la pantalla general de cálculos del sistema .

Anexo G.



En esta parte del anexo, podemos observar la pantalla principal del sistema.

Anexo H.

OBTENCION DEL VALOR DE K

Los datos a partir del cual se halló el valor de k, son los siguientes:

Periodo (Mes) en el año 1999	Tasas de Interés
1	106.8
2	83.4
3	85.7
4	79.6
5	59.8
6	61.1
7	62.5
8	61.4
9	57.6
10	57.5
11	89.6
12	152.4

Estos datos representan la tasa de interés, detallada mensualmente, del último año (1999).

Como se dijo en el desarrollo del capítulo 2, para la obtención del valor de las raíces del polinomio característico, es decir, el valor de k, utilizamos la ecuación Yule-Walker, para este caso el sistema será de 2x2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{Bmatrix}$$

Lo que queremos hallara, son los valores del vector $\hat{\varphi}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{Bmatrix}$$

Para hallar los valores del vector $\hat{\rho}$, utilizamos la siguiente fórmula:

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{j=1}^{T-h} x_j x_{j+h}}{\sum_{j=1}^{T} x^2_j}$$

Entonces, utilizando esta fórmula y usando los valores de las tasas de interés del año 1999, obtenemos que:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.31 \\ 0.63 \end{Bmatrix}$$

Reemplazando estos valores, obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.31 \\ 1.31 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1.31 \\ 0.63 \end{Bmatrix}$$

De esta forma obtenemos los valores del vector $\hat{\varphi}$, obteniendo :

$$\begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0081 \\ 0.66 \end{Bmatrix}$$

Escogiendo entonces como valor de k el valor dominante, es decir, la raíz más positiva.

BIBLIOGRAFIA

1 BOX G., JENKINS G., REINSEL G., " Times Series Analysis, Forecasting and Control ", Third edition, Prentice Hall.

2 BOWERS et aì., "Actuarial Mathematics ", The Society of Actuaries, 1994

3 VILLALON JULIO G., "Operaciones de seguros clásicos y modernos", Ediciones Pirámide S.A., Madrid, 1997.

4 POLLARD JOHN, Actuarial Applications of Autoregressive Models, Research Paper Series, Research Paper No. 009/97, Macquarie University, Sidney Australia, 1997

5 FREUND JOHN, WALPOLE RONALD, " Estadística Matemática con aplicaciones ", Cuarta Edición, Editorial Prentice Hall, 1990.

6 GROSSMAN STANLEY, Algebra lineal, Cuarta Edición, McGRAW-HILL, 1992.

7 HAIR J., ANDERSON R., TATHAM R., BLAAR W., " Multivariate Data Analysis ", Fifth Edition, Prentice Hall