ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES CUADRADAS"

MONOGRAFIA

Previa a la Obtención del Título de:
Magister en Educación Matemática Aplicada al Nivel Medio

Presentada por:

Luisa Yagual Orrala

Guayaquil - Ecuador
1 9 9 4

A G R A D E C I M I E N T O

Deseo expresar mi profundo reconocimiento y gratitud al Mc. Gaudencio Zurita, director de la monografía, quien a pesar de las exigencias apremiantes de su profesión supo encontrar tiempo para guiarme en la preparación de este sencillo trabajo de investigación y por ser el mentalizador de este curso que va en beneficio de la juventud ecuatoriana.

D E D I C A T O R I A

A mi familia que en todo momento demostraron su confianza y apoyo moral en la culminación de una etapa más de superación.

A los profesores del curso de Post Grado del Instituto de matemáticas, pioneros silenciosos que en forma abnegada cumplieron con la misión propuesta de elevar nuestro nivel académico, en busca de un futuro mejor para honra de la sociedad y la Patria.

Luisa.

DECLARACION EXPRESA

" La responsabilidad por los hechos ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de exámenes y títulos profesionales de la ESPOL).

LUISA YAGUAL ORRALA

CONTENIDO

CAPITULO IV.- ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO.

INTRODUCCION

Las ciencias matemáticas como todos los conocimientos humanos son Patrimonio de la Humanidad, representan el trabajo de ésta en el transcurso de los siglos y una parte de las conquistas alcanzadas por el espíritu humano descubriendo la verdad. Imposible es, por tanto escribir algo completamente original y mucho mas si por su carácter solo se fija en verdades fundamentales que forman los elementos de ésta ciencia.

Hay, o debe haber sin embargo, en cada uno de nosotros algo que nos pertenece, y es eso lo que trato de expresar en mi trabajo monográfico y a la vez alcanzar el objetivo que me he propuesto, el de hacer llegar en una forma sencilla y explícita todos los conocimientos relacionados con el tema.

En la actualidad el álgebras lineal es un curso obligado en parte debido a la invención de computadoras de alta velocidad, a la programación lineal, y en parte a la aplicación de las matemáticas en áreas tradicionalmente no técnicas y a aquellas que requieren un conocimiento de la teoría de matrices a fin de poder trabajar en áreas técnicas tales como la estadística con varias variables.

En el desarrollo de éste trabajo no sólo se efectuarán cálculos sino también se demostrarán teoremas, las definiciones se harán partiendo del concepto más importante de las matemáticas que es el de función, considerando a las matrices cuadradas como una función en particular y aplicaciones en cada uno de los subtemas.

Vale indicar aquí que el Algebra de matrices fue desarrollada por el matemático Inglés Arthur Cayley (1821-1895) en 1857.

Cayley estudió en el Trinity College de Cambridge, graduándose en 1842. En ese año él se colocó en primer lugar en la difícil prueba para el premio Smith. Cayley es considerado como el escritor más prolífico de matemáticas, siendo solo superado por Euler y Cauchy. Sus más notables contribuciones fueron en geometría analítica de dimensión n, teoría de los determinantes, transformaciones lineales y teoría de las matrices.

CAPITULO 1

1.- DEFINICIONES PRELIMINARES.-

DEFINICION 1.1.- Sea A un conjunto y F una función, la función F es una **OPERACION BINARIA** en A, si y solo si a cada par $(x , y) \in (A X A)$, le asigna un elemento $F(x,y) = x * y \in A$, la denotaremos así: $F: (A \times A) \to A$. Un ejemplo de operación binaria es la suma o adición de números reales.

Existe también una operación que va a ser tratada en este trabajo llamada **PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR**, que está definida entre dos conjuntos distintos, el conjunto V y el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Dicha operación es el producto de un escalar real por un elemento v del conjunto V, y se define como una función G, tal que a cada par $(a, v) \in (\mathbb{R} \times V)$, le asigna un elemento $a v \in V$, y se denota así: $G: (\mathbb{R} \times V) \to V$.

DEFINICION 1.2.- Una función Ø de $(C \times B)$ a $\mathbb{R}$, donde C y B son subconjuntos de Z^+ es una **MATRIZ mxn REAL** si y solo si a cada par $(i,j) \in (C \times B)$ le corresponde uno y solo un número real $a_{ij} = Ø(i,j)$. En símbolos se tiene que la matriz A es la función Ø tal que:

$$Ø : (C \times B) \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Ø(i,j) = a_{ij}$$

Además $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ se representa como:

$$A = \{a_{ij} : i = 1,2,...,m \text{ , } j = 1,2,...,n\}$$

Nótese que $C = \{i \in Z^{+} / i = 1,2,...,m\}$ y $B = \{j \in Z^{+} / j = 1,2,...,n\}$ m se dice es el número de filas de A y n es el número de columnas de A. y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es igual al conjunto de matrices de m filas y n columnas tal que $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Sin embargo generalmente se representa a A como un arreglo rectangular de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ an1 & an2 & ... & amn \end{pmatrix}$$

donde A se denomina matriz de m filas y n columnas.

De aquí en adelante vamos a convenir en representar a $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ simplemente como $A \in M_{m\times n}$. Sin embargo vale señalar que existen también $M_{m\times n}(C)$, de cuyo estudio no trataremos en este trabajo donde C es igual al conjunto de los números complejos.

De acuerdo a la definición de matriz, si se tiene $A \in M_{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3.5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}$$

Entonces: Ø (1,1) = 1 , Ø (1,2) = 2 , Ø (2,1) = 3.5 , Ø (2,2) = 0 Ø (3,1) = -1 , Ø (3,2) = 4.

DEFINICION 1.3.- Sea $A \in M_{n\times n}$ (IR), se dice que A es una **MATRIZ CUADRADA DE ORDEN n** si y solo si tiene n filas y n columnas; además la "diagonal principal" de $A_{n\times n}$ la constituyen los elementos a_{ij}, donde i = j.

Ejemplo:

Sea la matriz $A_{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde la **diagonal principal** son los elementos a_{11}, a_{22},....,a_{nn} .

DEFINICION 1.4.- Si $A \in M_{m\times n}$, entonces la **MATRIZ TRANSPUESTA** de A, denotada por A^T, es la matriz cuyo i-ésimo renglón o fila es la i-esima columna de A y cuya j-ésima columna es el j-ésimo renglón de A, nótese que $A^T \in M_{n\times m}$.

En símbolos si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$, vemos que: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}$ y $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

DEFINICION 1.5.- Una **MATRIZ $A \in M_{n\times n}$ ES SIMETRICA** si y solo si, $A = A^T$.

Ejemplos: Son matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

No son matrices simétricas:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINICION 1.6.- Si $I \in M_{nxn}$, I es la **MATRIZ IDENTIDAD** nxn, si y solo si, $(a_{ij} = 0,\ i \neq j) \wedge (a_{ij} = 1,\ i = j)$, para $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Ejemplos:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEFINICION 1.7.- Si $A \in M_{nxn}$, A es **TRIANGULAR SUPERIOR** si y solo si $a_{ij} = 0,\ i > j$; y A es **TRIANGULAR INFERIOR** si y solo si $a_{ij} = 0\ j > i$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

A es triangular superior. B es triangular inferior.

DEFINICION 1.8.- Sea $A \in M_{nxn}$,la **TRAZA DE UNA MATRIZ** A es una función de Ø de M_{nxn} a lR, que se denota de la siguiente forma:

$Ø : M_{nxn} \to R$, donde $Ø(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ntonces la traza tr (A) es $Ø(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1+2+9=12$

Si $A \in M_{nxn} = I_n$, entonces $Ø(I_n) = n$.

DEFINICION 1.9.-GENERALIZACION.- Decimos que un **CONJUNTO NO VACIO V** es un **ESPACIO VECTORIAL** sobre lR conjunto de los números reales, cuando y solamente cuando:

I.- Existe una operación **BINARIA** definida sobre V a la que denominamos **SUMA O ADICION** de vectores, que a cada par ordenado $(v_1, v_2) \in (V \times V)$, le asigna un elemento $(V_1 + v_2) \in V$ tal que las siguientes propiedades se cumplen:

i) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$, $\forall v_1, v_2 \in V$

ii) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$.

iii) $\exists \underline{0}v \in V$, que es el neutro de la adición, tal que :

$$\underline{0}v + v_1 = v_1 \quad , \quad \forall v_1 \in V$$

iv) $\forall v_1 \in V \; \exists (-v_1)$ que es el opuesto de v_1, tal que:

$v_1 + (-v_1) = 0_V$; y,

II.- Está definida una operación denominada **MULTIPLICACION POR ESCALAR** que a cada par $(a,v) \in (R \times V)$, le asigna un elemento $av \in V$: tal que las siguientes propiedades se cumplen:

v) $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$, $\forall a, b \in R \wedge \forall v \in V$.

vi) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$, $\forall a, b \in R \wedge \forall v \in V$

vii) $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$, $\forall a \in R \wedge \forall v1, v2 \in V$

viii) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V \wedge 1 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Vamos a probar que el conjunto $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, junto con las operaciones ; de suma entre matrices y multiplicación por escalar real, $(+ , \cdot)$, constituyen un espacio vectorial.

I.- Sean A_1, A_2, A_3, M_{2X2}, obviamente $(A_1 + A_2) \in M_{2x2}$, entonces las siguientes propiedades se cumplen.

i) $\forall A_1, A_2 \in M_{2x2} \Rightarrow A_1 + A_2 = A_2 + A_1$

$$A1 + A2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$a_{11}+b_{11} \quad a_{12}+b_{12}$

$b_{11}+a_{11} \quad b_{12}+a_{12}$

$=A_1+A_2=$

A_2+A_1

$a_{21}+b_{21} \quad a_{22}+b_{22} \qquad b_{21}+a_{21} \quad b_{22}+a_{22} \;|$

ii) $\forall A_1, A_2, A_3 \in M_{2\times 2} \Rightarrow (A_1+A_2)+A_3 = A_1+(A_2+A_3)$

$$(A_1+A_2)+A_3 = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{12}+b_{12}+c_{12} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$$

iii) $\exists\, \underline{0} \in M_{2\times2} : A_1 + 0 = A_1 , \quad \forall\, A_1 \in M_{2\times2}$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 + 0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 + 0 = A_1$$

iv) $\forall\, A_1 \ \exists\, (-A_1) \in M_{2X2} : A_1 + (-A_1) = 0$

$$(-A_1) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \quad A_1 + (-A_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 + (-A_1) = 0$$

II.- $\forall\, a \in \mathbb{R} \wedge A_1 \in M_{2\times2} \Rightarrow a \,.\, A_1 \in M_{2\times2}$.

v) $\forall\, a \,.\, \beta\, R,\ A_1 \in M_{2\times2} \Rightarrow a \,.\, (\beta \,.\, A_1) = (a \,.\, \beta) \,.\, A_1$

$$a.(\beta.A_1) = a.\left(\beta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = a.\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a\beta a_{11} & a\beta a_{12} \\ a\beta a_{21} & a\beta a_{22} \end{pmatrix} = (a.\beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow (a\beta.).\ A_1$$

vi) $\forall\ a.\ \beta \in \mathbb{R},\ A_1 \in M_{2\times 2} \Rightarrow (a+\beta)\ .\ A_1 = a A_1 + \beta A_1$

$$(a+\beta)\ .\ A_1 = a+\beta).\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_{11}+\beta a_{11} & aa_{12}+\beta a_{12} \\ aa_{21}+\beta a_{21} & aa_{22}+\beta a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ aa_{21} & aa_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow a A_1 + \beta A_1$$

vii) $\forall\ a \in \mathbb{R},\ A_1\ A_2 \in M_{2\times 2} \Rightarrow a.\ (A_1 + A_2) \Rightarrow a A_1 + a A_2$

$$a.(A_1+A_2) = a.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa_{11}+ab_{11} & aa_{12}+ab_{12} \\ aa_{21}+ab_{22} & aa_{22}+ab_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ aa_{21} & aa_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} \\ ab_{21} & ab_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 A + a_2 A$$

viii) $\forall A_1 \in M_{2\times 2}$, $1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \,.\, A_1 = A_1$

$$1.A_1 = 1.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.a_{11} & 1.a_{12} \\ 1.a_{21} & 1.a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A_1$$

Por lo tanto $M_{2\times 2}$ (+ , .) es un espacio vectorial.

DEFINICION 1.10.- Un subconjunto W de un espacio Vectorial V, es un **SUBESPACIO DE V**, si y solo si W es por sí solo un espacio vectorial bajo las operaciones de adición de vectores y de multiplicación por un escalar definidas en V.

Se puede probar además el siguiente **Criterio de subespacio vectorial** que dice así:

W (+ , .) es un subespacio del espacio vectorial V

(+ , .)

si y solamente si :

i) $\forall W_1 , W_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

II) $\forall$ $a \in \mathbb{R}$, $w \in W \Rightarrow a \,.\, w \in W$.

EJEMPLO.- Vamos a probar usando el criterio de subespacio que:

El conjunto W (+ , .) de todas las matrices diagonales 2x2 es un subespacio del espacio de M_{2X2} (+ , .).

Sean $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_2 \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$ M_{2X2} diagonales E W

i) $\forall A_1 , A_2$ E W => $A_1 + A_2$ E W

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \text{ E W}$$

ii) $\forall A_1$ E W ,a E lR => a . A_1 E W

$$a \, . \, A_1 = a \, . \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_{11} & 0 \\ 0 & aa_{22} \end{pmatrix} \text{ E W}$$

Por lo tanto como: $A_1 + A_2$ ^ a. A_1 E M_{2x2} diagonales E W es un subespacio de M_{2x2} .

1.10.2 TEOREMA I.- Si $H1$ ^ H_2 son subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $(H_1 \cap H_2)$ es un subespacio de V.

DEMOSTRACION:

$(H_1 \cap H_2)$ es no vacío, ya que contiene por lo menos al Ov. pues todo espacio vectorial para serlo debe tener como elemento a Ov.

Sean

$X_1 \in (H_1 \cap H_2)$ y $X_2 \in (H_1 \cap H_2)$

Como H_1 y H_2 son subespacios; $(X_1 + X_2) \in H_1$ ^ $(X_1 + X_2) \in H_2$

Esto significa que $X_1 + X_2 \in (H_1 H_2)$

Con un similar argumento,

$$a X_1 \in (H_1 \cap H_2)$$

Por lo tanto se satisfacen ambos axiomas de cerraduras, lo cual

significa que:

$(H_1 \cap H_2)$ es un subespacio de V.

Además como $0 \in H_1$ ^ $0 \in H_2$, => $0 \in (H_1 \cap H_2)$

DEFINICION 1.11.- Decimos que el **CONJUNTO DE M_{nxn}** (+

, .) **ES UN ESPACIO VECTORIAL REAL** si se cumple lo siguiente:

I.- $\forall A , B \in M_{nxn} \Rightarrow (A + B) \in M_{nxn}$.

i) $\forall A , B \in M_{nxn} \Rightarrow A + B = B + A$

Prueba:

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$

ii) $\forall A , B , C \in M_{nxn} \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

Prueba:

$(A + B) + C = [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) +$

$(c_{ij})] = A + (B + C)$

iii) $\exists \underset{\sim}{O} \in M_{nxn} : A + O = A , \forall A \in M_{nxn}$

Prueba:

$A + O = (a_{ij}) + O = (a_{ij} + O) = a_{ij}$

iv) $\forall A \in M_{nxn} , \exists (-A) : A + (-A) = O$

Prueba:

$A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (O) = O$

II.- $\forall a \in IR , A \in M_{nxn} \Rightarrow a . A \in M_{nxn}$

v) $\forall a , \beta \in IR , A \in M_{nxn} \quad a . (\beta . A) = (a . \beta) . A$

Prueba:

$$a \cdot (\beta . A) = a . (\beta . a_{ij}) = (a\, \beta . a_{ij}) = (a\, \beta).(a_{ij}) = (a\, \beta) . A$$

vi) $\forall\ a\ \beta \in IR\ ,\ A \in M_{nxn} \Rightarrow (a + \beta) . A = a . A + \beta . A$

Prueba:

$$(a + \beta) . A = (a + \beta) . (a_{ij}) = (a + \beta) . a_{ij} = a\, a_{ij} + \beta\, a_{ij} = a\, a + \beta . A$$

vii) $\forall\ a\ IR \wedge A\ ,\ B \in M_{nxn} \Rightarrow a . (A + B) = a\, A + a . B$

Prueba:

$$a . (A + B) = a . (a_{ij} + b_{ij}) = (a\, aij + a\, b_{ij}) = a\, (a_{ij}) + a\, (b_{ij}) = a\, A + a . B$$

viii) $\forall\ A \in M_{nxn}\ ,\ 1 \in IR \rightarrow 1 . A = A$

Prueba:

$$1 . A = 1 . (a_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

Una vez que hemos probado los axiomas correspondientes a un espacio vectorial, con matrices cuadrada podemos concluir que el conjunto de todas las matrices cuadradas

$M_{n\times n}$ es un espacio vectorial sobre R.

El siguiente ejemplo ilustrará lo anteriormente expuesto.

Vamos a probar que el conjunto $M_{2\times 2}$ simétricas es un subespacio de las matrices cuadradas y por lo tanto es un espacio vectorial.

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \text{ Simétrica}$$

I.- $\forall$ A, B $\in$ $M_{2\times 2}$ simétricas $\Rightarrow$ A + B $\in$ $M_{2\times 2}$ Simétricas

i) $\forall$ A, B $\in$ $M_{2\times 2}$ Simétricas $\Rightarrow$ A + B = B + A

Prueba:

$$A+B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ 2+5 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+2 \\ 5+2 & 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) $\forall$ A , B, C $\in$ $M_{2\times 2}$ simétricas (A + B) + C = A + (b + C)

Prueba:

$$(A + B + C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ 2+5 & 3+7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2+3 & 2+5+4 \\ 2+5+4 & 3+7+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+3 & 5+4 \\ 5+4 & 7+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow A+(B+C)$$

iii) $\exists\ \underset{\sim}{0} \in M_{2\times 2}$ Simétricas, $A + 0 = A$, $\forall A \in M_{2X2}$ simétricas

Prueba:

$$A + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 2+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

iv) $\forall A\ M_{2\times 2}$ simétricas, $\exists(-A)$: $A + (-A) = 0$

$$\text{Prueba:} A+(-A)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-2 \\ 2-2 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

II $\forall \alpha$, $\beta\ A \in M_{2\times 2}$ simétricas $\alpha . A \in M_{2\times 2}$ simétricas

v) $\forall a$, $\beta \in \mathbb{R}$, $A \in M_{2\times 2}$ simétricas $a.\ (\beta.A)=(a.\beta).A$

$$\text{prueba: } a.(\beta.A)=2 \left(3. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) =2 \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(2. \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} \right) =(2.3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =(2.3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (a.\beta).A$$

vi) $\forall$ ax.β $\mathbb{R}$, $A \in M_{2\times 2}$ simétricas $\Rightarrow (a+\beta) . A=a.A+\beta.A$

$$\text{Prueba:} (a+\beta) . A= (2+3) . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+3).1 & (2+3).2 \\ (2+3).2 & (2+3).3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.1+3.1 & 2.2+3.2 \\ 2.2+3.2 & 2.3+3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.2 & 2.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} = x.A+\beta.A$$

vii) $\forall$ a E, A,B E M_{2x2} simétricas a.(A+B) = a.A+β.B

$$\text{Prueba: } a.(A+B)=2.\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ 2+5 & 3+7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.(1+2) & 2.(2+5) \\ 2.(2+5) & 2.(3+7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+2.2 & 2.2+2.5 \\ 2.2+2.5 & 2.3+2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.2 & 2.5 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 2.2 & 2.5 \\ 2.5 & 2.7 \end{pmatrix} = a.\ A + a\ .\ B$$

viii) $\forall$ A E M_{2x2} simétricas 1 E $\mathbb{R}$ => 1 . A = A

$$\text{Prueba: } 1.A = 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Podemos concluir entonces que se puede probar que las matrices simétricas son subespacio de M_{nxn}, usando el criterio de subespacio.

CAPITULO II

2.- COMBINACION LINEAL Y ESPACIO GENERADO.-

DEFINICION 2.1.- Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, vectores en un espacio vectorial V, entonces cualquier expresión de la forma:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \qquad (1)$$

donde $c_1, c_2, \ldots c_n$, son escalares reales, es una **COMBINACION LINEAL** de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

En el siguiente ejemplo vamos a verificar que $A \in M_{2\times2}$, es una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4, donde:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, vamos a expresar A en la forma (1),

entonces: $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$, $c_4 = 0$

Esto es: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que verifica que A es una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4.

Análogamente si $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, vamos a verificar que A es una combinación lineal de:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

si $c_1 = 3$ y $c_2 = 2$

Vamos a expresar A en la forma (1):

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 3 & 3 & 15 \\ -15 & 3 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & 6 & -12 \\ 10 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

DEFINICION 2.2.- Se dice que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, en un espacio vectorial V, **GENERAN V**, si y solo si todo vector de $v \in V$, se puede expresar como una combinación lineal de ellos.

V es el **ESPACIO GENERADO** por $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dicho de otra manera, $\forall v \in V$, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$, tales que:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n .$$

En el siguiente ejemplo veremos que **CUATRO** vectores pueden generar M_{2x2}.

Como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}$, vamos a escribir A en la forma (1),

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se ve entonces que: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

generan a M_{2x2}

En este otro ejemplo vamos a determinar que **cinco** matrices pueden generar $M_{2\times 2}$.

Sean: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2X2}$

veamos si generan a $M_{2\times 2}$.

En primer lugar escogemos una matriz arbitraria 2x2, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

nuestra meta consiste en hallar escalares c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5 tales que:

$$C_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\, c_5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lo que equivale a

$$c_1 + c_5 = a$$
$$c_2 + c_5 = b$$
$$c_3 + c_5 = c$$
$$c_4 + c_5 = d$$

vamos a encontrar el conjunto solución del sistema aplicando el método de Gauss de la siguiente manera.

Escribiendo en forma matricial tenemos; la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = a - c_5 \\ c_2 = b - c_5 \\ c_3 = c - c_5 \\ c_4 = d \\ c_5 = \text{variable libre} \end{array}$$

$Cs=\{(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)/\ c_1 = a-c_5 \wedge c_2 = b-c_5 \wedge c_3 = c-c_5 \wedge c_4 = d, c_5 \in \mathbb{R}\}$

Esto quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones. Una solución para obtener los escalares que cumplen (1), es que $c_5 = 0$. Entonces: $c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c, c_4 = d, c_5 = 0$

Esto implica que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En consecuencia las matrices A,B,C,D,E, generan M_{2X2}.

2.2.1.- TEOREMA 2.- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ son vectores en V, el conjunto generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un subespacio de V.

DEMOSTRACION:

Si conocemos que el conjunto generador:

gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ no es vacio, ya que v_i, para i = 1,2,...k, pertenece a gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ $\forall$ I.

Probaremos que las dos propiedades de cerradura se cumplen en el espacio generado por los vectores dados.

Si V, W, E Gen $\{v_1\ v_2, \ldots, v_k\}$, entonces V+WEgen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ Supongamos que V y W Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ existen escalares a_1, $a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tales que:

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

$$W = b_{1v1} + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$$

Entonces:

$V + W = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \ldots + (a_n + b_n) v_n$ Vemos que V + W es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, por consiguiente V + W E Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

Si V Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, entonces cv E gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ V c escalar real, entonces:

$V = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, para ciertos escalares $c_1 ç_2, \ldots, c_n$ real y $c.v = c. (a_1v_1 + a_2v_2 = \ldots a_nv_n) = ca_1v_1 + ca_2v_2v_2 + \ldots + ca_nv_n$.

Puesto que cv es una combinación lineal de $v_1 v_2, \ldots, v_n$; entonces cv Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Por lo tanto gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un subespacio de V.

2.3.-DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.- Los conceptos de dependencia e independencia lineal, bases y dimensión son muy importantes para el trabajo con espacios vectoriales en general y para matrices reales en particular.

DEFINICION 2.3.1.- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ de un espacio vectorial V es **LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN V** si la ecuación: $c_1v_1 + c_2v_2 \ldots c_nv_n = 0$, es decir tiene como **SOLUCION UNICA** $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Un conjunto de vectores es **LINEALMENTE DEPENDIENTE EN V** sino es linealmente independiente en V.En el siguiente ejemplo vamos a considerar el conjunto:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

de matrices pertenecientes al espacio vectorial de M_{2x2} diagonales D y determinaremos si S es linealmente dependiente o independiente en D.

Vamos a suponer que $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

y que $c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 + c_3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - c_3 & 0 \\ 0 & c_1 c_3 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$c_1 - 2c_2 - c_3 = 0$

$c_1 \qquad - c_3 = 0$

Obviamente una solución del sistema sería:

$c_1 = 3,\ c_2 = 2,\ c_3 = -1$

Siendo este un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, donde $n > m$, entonces se deduce que el sistema tiene soluciones no triviales. En consecuencia S es linealmente dependiente en D.

2.4.- BASES Y DIMENSION.- Uno de los conceptos esenciales del álgebra es el de **BASE** de un espacio vectorial.

DEFINICION 2.4.1.- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, es una **BASE DEL ESPACIO VECTORIAL V** si y solo si.

i) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente

ii) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V.

Consideremos las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$$

Vamos a determinar sí $\beta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ forma una base del espacio de las $M_{2\times 2}$.

Demostraremos primeramente que S es linealmente independiente en $M_{2\times 2}$. Suponemos que: $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 + c_4A_4 = 0$

$$\text{Entonces:}\quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí se tiene que $c_1=c_2=c_3=c_4=0$, Por lo tanto S es linealmente independiente en M_{2X2},

Ahora demostraremos que β genera M_{2X2}, para lograrlo considerarémos un elemento arbitrario A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2x2}$$

Podemos notar que: $a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{21}A_3 + a_{22}A_4$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

De esta manera A se expresa como una combinación lineal de A_1, A_2, A_3, A_4. Puesto que A se tomo arbitrariamente, S genera M_{2x2}.

por lo tanto $\beta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es una BASE de M_{2x2}.

COMENTARIO .- Un conjunto puede generar un espacio vectorial y ese conjunto no ser linealmente independiente en ése espacio, o un conjunto de vectores puede ser linealmente dependiente en un espacio V y no generar V sino otro espacio vectorial, que es subespacio de V. Por ejemplo los vectores (1,0,0) , (0,1,0) no generan $\mathbb{R}^3$ pero si son linealmente independientes en R^3.

Los vectores (1,0), (0,1), (2,0) generan $\mathbb{R}^2$. Pero no son linealmente independientes en lR.

2.4.2.- TEOREMA 3.- Si $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es una base de V, entonces existe un conjunto único de escalares $\{c_1 c_2,...,c_n\}$, tales que:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 +...+ c_nv_n .$$

DEMOSTRACION:

Existe por lo menos uno de tales conjuntos de escalares, ya que $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ genera V. Supóngase que v puede expresarse en dos formas distintas como una combinación lineal de los vectores base. Es decir, supóngase que:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 +...+ c_nv_n = d_1v_1 + d_2v_2 +...+ d_nv_n ,$$

si restamos obtenemos la ecuación: $(c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 + \ldots + (c_n - d_n)v_n = 0$ pero como los v_i son linealmente independientes, ésta ecuación sólo puede cumplirse si:

$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \ldots = c_n - d_n = 0$ Por lo tanto: $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, ..., $c_n = d_n$.

De acuerdo al teorema dad una base B existe una sola forma de escribir v como combinación lineal de los v_i.

2.4.3.- TEOREMA 4.-

Si $B_1 = \{ u_1, u_2, \ldots u_m \}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son bases del espacio vectorial V, entonces $m = n$; es decir dos bases cualquiera de un espacio vectorial, contiene el mismo número de vectores, este número se denomina **Dimensión**

DEMOSTRACION:

Sean $B_1 = \{u_i, u_2, \ldots u_m\}$ y $B_2 = \{v_i, v_2, \ldots v_n\}$ dos bases de V. Debe demostrarse que m=n.

Esto se demuestra haciendo ver que si $m > n$, entonces B_i es un conjunto linealmente dependiente, lo que contradice la hipótesis de que B_1 es una base. Con eso se mostrará que $m \leq n$. El mismo procedimiento servirá para mostrar que $n \leq m$ y de esa manera quedará demostrado el teorema.

Así todo lo que hay que mostrar es que si $m > n$, entonces B_1 es dependiente. como constituye una base, cada u_i se puede escribir como una combinación lineal de los Vi.

Se tiene => $u_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \ldots + a_{1n} v_n$

$$u_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots + a_{2n} v_n \qquad (I)$$

$$\vdots$$

$$u_m = a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + \ldots + a_{mn} v_n$$

A fin de mostrar que B_1 es dependiente, es necesario hallar escalares $C_1, C_2, \ldots, C_n$, no todos cero, tales que:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_m u_m = 0 \quad (2)$$

Al insertar (1) en (2) se obtiene:

$$c_1 (a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots a1_n v_n) + c_2 (a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2n} v_n) + \dots + c_m (am_1 v_1 + am_2 v_2 + \dots + a_{mn} v_n) = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) se puede escribir como:

$$(a_{11} c_1 + a_{21} c_2 + \dots + a_{m1} c_m) v_1 + (a_{12} c_1 + a_{22} c_2 + \dots + a_{m2} c_m) v_2 + \dots + (a_{1n} c_1 + a_{2n} c_2 + \dots + a_{mn} c_m) vn = 0 \quad (4)$$

Pero como v1, v2, ..., vn son linealmente independientes, debe tenerse: $a_{11} c_1 + a_{21} c_2 + \dots + a_{m1} c_m = 0$

$$a_{12} c_1 + a_{22} C_2 + \dots + a_{m2} c_m = 0 \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{1n} C_1 + a_{2n} c_2 + \dots + a_{MN} c_m = 0$$

El sistema (5) es un sistema homogéneo de n ecuaciones con las m incógnitas $c_1 c_2, \dots, c_{me}$, y como m > n, el sistema tiene infinitas soluciones. Por lo tanto existen escalares $c_1, c_2 .., c_m$, no todos cero, que satisfacen (2) y en consecuencia B_1 es un conjunto linealmente dependiente.

Esta contradicción demuestra que $m \leq n$; intercambiando los papeles de B_1 y B_2 se muestra que $n \leq m$ y la demostración queda completa.

Este teorema permite definir otro concepto central del álgebra lineal.

DEFINICION 2.4.2.- Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la dimensión de V es el número de vectores que tiene cualquiera de las bases V, y éste último recibe el nombre de **ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSION FINITA.** En cualquier otro caso se dice que V es un **espacio vectorial de dimensión infinita:**. Si V = {O}, se dice que V es de **dimensión cero.**

Notación.- La dimensión de V. Se denota por **dimensión V.**

Ejemplo:

- Si $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Es una base de

2x2, la dimensión del espacio vectorial generado por éstas matrices 2x2 es : Dim = 4

- Dimensión del espacio de las matrices diagonales = 2 $\Rightarrow$ $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

2.4.6.-TEOREMA 5.-

Supóngase que dim V = n. si $\{u_{11}\ u_{21} \ldots u_{2n}\}$ es un conjunto de m vectores linealmente independientes en V, entonces $m \leq n$.

DEMOSTRACION:

Sea $\{v_1, , v_2 \ldots, v_n\}$ una base de V.si $m > n$,entonces,

como en la demostración del teorema anterior, se pueden hallar constantes C_1, $C_{21} \ldots C_m$, no todas cero, que satisfagan la ecuación (2). Esto entraría en contradicción con la independencia lineal de los u_i por tanto $m \leq n$.

2.4.7.TEOREMA 6.-

Sea H un subespacio del espacio vectorial V, de dimensión finita. Entonces H es de dimensión finita y dim H $\leq$ dim V

DEMOSTRACION:

Sea dim $V = n$. Todo conjunto de vectores linealmente independientes en H, también es linealmente independiente en V.

Por el teorema 5, cualquier conjunto linealmente independiente en H, puede contener a lo más, n vectores. Por tanto H es de dimensión finita. Además como cualquier base de H es un conjunto linealmente independiente, se ve que dim $H \leq n$.

CAPITULO III

3. RANGO, NULIDAD, ESPACIO DE RENGLONES Y ESPACIO DE LAS COLUMNAS DE UNA MATRIZ.-

DEFINICION 3.1.- Sea $A \in M_{m\times n}$ y sea $N_a = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$ (1)

Se puede probar que N_a es un subespacio de R^n.

N_a recibe el nombre de **núcleo** de A y $\nu(A) = \dim N_a$ se la llama **nulidad** de A. Si N_a contiene solamente el vector $\underline{o}$, entonces $\nu(A) = 0$.

EJEMPLO: Núcleo y nulidad de una matriz de 3x3. - Sea A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 6 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{Obviamente una base de A es B: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Pues los vectores columnas (1,2,0) y (0,3,1) son linealmente independientes y generan. Entonces B es una base de N_a y $\nu(A) = 2$

3.1.2.- TEOREMA 7.- Sea $A \in M_{n\times n}$, entonces A es invertible sí y solo sí $\nu(A) = 0$.

DEMOSTRACION:

Según el " teorema creciente " , que se encuentra a continuación, se tiene que A es invertible si y solo si el sistema homogéneo $AX = 0$, tiene solo la solución trivial $X = 0$, Pero por la expresión (1), ésto significa que A es invertible si y solo si $N_a = \{0\}$. Por lo tanto A es invertible si y solo si $(A)=\dim N_A=0$

3.1.3.- TEOREMA 8.- Teorema creciente Sea $A \in M_{nxn}$. entonces los nueve enunciados que siguen son equivalentes; es decir cada uno de ellos implica los otros ocho (de tal modo que si uno de ellos es válido, todos son válidos).

i) A es invertible.

ii) La única solución del sistema homogéneo $AX = 0$ es la solución trivial. $(X = 0)$

iii) El sistema $Ax=b$ tiene una solución que es única para cada n = vector b.

iv) A es equivalentes por renglones a la matriz identidad I_n de nxn.

v) A se puede escribir como un producto de matrices elementales.

vi) Los renglones y las columnas de A son linealmente independientes.

vii) Determinante de A = O

viii) Nulidad de A, $\mathcal{V}(A) = 0$

ix Rango de A, $\rho(A) = n$.

DEFINICION 3.2.- Sea A E Mnxn, entonces el **RECORRIDO DE A** denotado por recorrido A, esta dado por:

Recorrido A = $\{y \in \mathbb{R}^m : AX = Y$ para algún $\in \mathbb{R}^n\}$

3.2.1.- TEOREMA 9.- Sea $A \in M_{mxn}$. Entonces Recorrido A es un subespacio de $\mathbb{R}_m$.

DEMOSTRACION: Supóngase que y_1 y_2 estan en Recorrido A, entonces existen vectores x_1, x_2 en $\mathbb{R}^n$ tales que $y_1 = Ax_1$ y $y_2 = Ax_2$, por tanto:

$A(\phi x_1) = \phi Ax_1 = \phi y_1$ y $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$ de tal modo que ϕy_1 y $y_1 + y_2$ estan en Recorrido A, entonces A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

DEFINICION 3.3.- Sea $A \in M_{mxn}$. Entonces el **RANGO DE A** denotado por $\rho(A)$, esta dado por:

$$\rho(A) = \dim \text{Recorrido } A.$$

NOTA: Esta definición es previa al teorema que sigue.

DEFINICION 3.4.- Una matriz es de forma **ESCALONADA REDUCIDA POR RENGLONES** si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) La componente guía de cualquier renglón que contiene por lo menos un elemento distinto de 0 es igual a 1.

ii) Todas las componentes que se encuentren debajo de la componente guía de un renglón son iguales a 0.

iii) La componente guía de cada renglón se encuentra a la derecha de la componente guía de cada renglón precedente.

iv) Todos los renglones que contienen solamente el elemento 0 se encuentra en la parte inferior de la matriz.

v) Cada columna que incluye una componente guía contiene ceros en las demás posiciones.

3.4.1 TEOREMA 10.- El rango de una matriz A es igual al número de renglones no nulos de cualquier forma escalonada por renglones correspondientes a A.

EJEMPLO: Determine el rango de A donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Mediante la reducción por renglones se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/21 \end{pmatrix}$$

Entonces hay en total tres renglones no nulos. Por consiguiente rango $(A) = 3$ ò $\rho(A) = 3$.

DEFINICION 3.5.- Si $A \in M_{m\times n}$ y $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ son renglones de A y $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ las columnas de A entonces se definen:

R_A = **ESPACIO DE LOS RENGLONES DE A** = gen $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

C_A = **ESPACIO DE LAS COLUMNAS DE A** = gen $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$

NOTA: R_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y C_A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

3.4.1.- Ejemplo ilustrativo.- Determine el rango y el espacio de renglones de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Reducimos por renglones A.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Como B tiene dos renglones independientes, se tiene que:

$$\rho(B) = \rho(A) = 2 \quad y \quad R_A = \text{Gen}\{(1,-1,3),(0,1,-1)\}$$

3.4.2.- Teorema 11.- Sea A E M_{nxn}. Entonces A es invertible, sí y solo sí $\rho(A) = n$

Demostración: A es invertible sí y solo sí:

$U(A) = 0$

Pero $\rho(A) + U(A) = n \Rightarrow \rho(A) = n - U(A)$

Por lo tanto A es invertible, sí y solo sí:

$\rho(A) = n - 0 = n$

$\Rightarrow \rho(A) = n.$

3.5.-CAMBIO DE BASE.

3.5.1.- Definición de matriz de transición.- Sea $A \in M_{nxn}$ cuyas columnas estan dadas por:

$$u_j = a_{ij} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{nj} v_n \quad a_{ij}$$

$$\Rightarrow (u_j)B_2 = \begin{bmatrix} a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de **matriz de transición** de la base B_1 a la base B_2. Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_1)_{B_2} & (u_2)_{B_2} & (U_n)_{B_2} \end{matrix}$$

3.5.2.- Ejemplo ilustrativo.-

Sean $u_1 = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ y $u_2 = \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, entonces

$B_1 = u_1, u_2$ que es la base standar en $\mathbb{R}^2$.

Sean $v_1 = \begin{matrix}1\\3\end{matrix}$ y $v_2 = \begin{matrix}-1\\2\end{matrix}$, como v_1 y v_2 son linealmente independientes, ya que v_1 no es múltiplo de v_2, entonces:

$B_2 = v_1, v_2$ es una segunda base de $\mathbb{R}^2$.

Sea $X = \begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}$, un vector en R^2. Esta notación significa que:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

Es decir X está escrito en términos de la base B_1 y se escribe: $(x)_{B_1} = x_1$. Como B_2 es otra base en $\mathbb{R}^2$, existen escalares c_1 x_2 y c_2 tales que: $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$ (1).

$$X = c_1 v_1 + c_2 v_2 \qquad (1)$$

una vez que se han determinado éstos escalares, se escribe:

$$(X)_{B_2} = c_1 \; c_2$$

esto indica que ahora X está expresado en términos de los vectores de B_2.

Para hallar los números c_1 y c_2, los vectores de la base original (u_1 y u_2), se escriben en términos de los vectores de la nueva base (v_1 y v_2). Es fácil verificar que:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} v1 - \frac{3}{5} v2 \quad (2)$$

y

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} v1 + \frac{1}{5} v2 \quad (3)$$

es decir: $(u_1)_{B_2} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$ y $(u_2)_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$

➤ A partir de (2) y (3)

$$X = X_1 u_1 + X_2 u_2$$

$$\Rightarrow X = X_1 \left(\frac{2}{5} v_1 - \frac{3}{5} v_2 \right) + X_2 \left(\frac{1}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 \right)$$

$$\Rightarrow X = \left(\frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \right) v_1 + \left(- \frac{3}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \right) v_2$$

$\Rightarrow$ Así de (1) :

$$C_1 = \frac{2}{5} X_1 + \frac{1}{5} X_2$$

$$C_2 = \frac{3}{5} X_1 + \frac{1}{5} X_2$$

o bien :

$$(X)B_2 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 2/5X_1 + 1/5X_2 \\ 3/5x_1 + 1/5x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} X_1 \\ x_2 \end{matrix} \right)$$

La matriz $A = \begin{matrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{matrix}$ recibe el nombre de **Matriz de transición** de B_1 A B_2 y en consecuencia:

$$(X)B_2 = A (X)B_1$$

3.6.3 TEOREMA 11

Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A es la matriz de transición de B_2 A B_1.

DEMOSTRACION: Sea C la matríz de transición de B_2 A B_1.

Entonces de : $(X)B_2 = A\ (X)B_1$, se tiene:

$$(X)B_1 = C\ (X)B_2 \quad (1)$$

Pero: $$(X)B_2 = A\ (X)B_1$$

y al sustituir ésto en (1), se obtiene:

$$(X)B_1 = C_A\ (X)B_1$$

Ahora bien si : $C\ .\ A = I \qquad C = A^{-1}$

COMENTARIO:

EL Teorema anterior hace que sea particularmente fácil

hallar la matriz de transición de la base stándar que es la siguiente:

$B_{1n} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ en lR^n, a cualquier otra base en lR^n. Sea $B_2 = \{v, v_2 ..., v_n\}$ otra base cualquiera. Sea C la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$.

Entonces C es la matriz de transición de B_2 a B_1, porque cada vector v_i ya está escrito en términos de la base stándar.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\3\\-2\\4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz de transición de B_1 a B_2 es C.

De esto se desprende un **procedimiento para hallar la matriz de transición de la base estándar a la base B_2.**

$B_2 = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$

i) Escriba la matriz C cuyas columnas son $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

ii) Calcule C^{-1}. Esta matriz es la matriz de transición requerida.

Ejemplo: Sean $b_1 = \{i, j, k\}$ y $B_2 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

Si $X = \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \in \mathbb{R}_3$, escriba X en términos de los vectores de B_2. z

Siendo V_1 vectores base estándares para R^3. En primer lugar hay que verificar que B_2 es una base.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0 \text{ , sí es una base.}$$

Luego, como :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ La matriz de transición C de B_2 a B_1 está dada por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, según el teorema 16, la matriz de transición A de B_1 A B_2 es:

$$A = C^{-1} = 1/8 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

3.6.4.- COORDENADAS.

Si $S = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es una base ordenada de un espacio vectorial V , entonces todo vector v en V se puede expresar en la forma:

$$v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots + C_n v_n,.$$

de una sola manera.

Si B = {v1,v2,...,vn} es una base ordenada de un espacio vectorial V de dimensión finita, y $V = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots + C_n v_N$ es la expresión de V en términos de la base B, entonces los escalares $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se denominan las **coordenadas** de V, relativas a la base B.

El **vector de coordenadas** de v relativo a B, se denota mediante $(v)_b$ y es el vector definido como:

$$(v)_b = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

La **matriz de coordenadas de V** , relativa a S se denota mediante $(V)_b$ y es la matriz n x 1 , definida con: $(V)s = C_1$

C_2

.

.

.

C

3.6.5.- UNICIDAD DE COORDENADAS.-

Dado un espacio vectorial V y una base S pero el mismo, las coordenadas de un vector V en V son únicas.

Prueba.- Sea $s = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Todo vector V en V, puede escribirse como una combinación lineal de los vectores en S, porque S genera a V.

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

$$V = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$$

debemos demostrar; que $a_i = b_i =$ para $i = 1,2,\ldots,n$. entonces vamos a suponer que no se da la unicidad:

$$\Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_3$$

$$\Rightarrow (a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \ldots + (a_n - b_n) v_n = \underline{o}\ v$$

$$\Rightarrow (a_1 - b_1) = (a_2 - b_2) = \ldots = (a_n - b_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$$

Con lo que probamos que $a_i = b_i$ y que las coordenadas de v son únicas.

3.6.6.- EJEMPLOS ILUSTRATIVOS:

- Sean: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

y considere la base $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, para el espacio vectorial de las matrices 2 x 2.

Si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es cualquier matriz 2 x 2 donde:

$$M = a M_1 + b M_2 + c M_3 + d M_4.$$

Por lo tanto si vector y matriz de coordenadas con respecto a S son:

$$(M)_b = (a, b, c, d) \text{ y } M_b = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

En el siguiente ejemplo vamos a determinar las coordenadas de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, en la base: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Escribimos A en forma de combinación lineal de c_1, c_2, c_3, c_4, entonces:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Se obtiene entonces: $\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ 2c_3+c_4 & c_1+2c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

Da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$c1=1$ Encontramos el conjunto solución del

$c2=-1$ sistema dado, aplicando el método de

$2c3+c4=2$ eliminación de Gauss, de la siguien-

$c1+2c4=0$ te forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \\ c4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow (vs) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

CAPITULO IV

4.- Espacios con Producto Interno.- Los conceptos de magnitud de un vector y de ángulo entre vectores son usuales en espacios vectoriales. Para definir estos conceptos en cualquier espacio vectorial, se empieza por considerar una función denominada producto interno. se denominan **ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR.**

4.1.- Definición de producto interno real.- Sea V un espacio vectorial sobre los números reales. Un producto interno real en V es una función ϕ de (V X V) en $\mathbb{R}$, tal que a cada par de vectores $(u,v) \in (V \times V)$, le asocia un número real$\langle u, v \rangle$, entonces $\phi(u,v) = \langle u,v \rangle \in \mathbb{R}$, además deben cumplirse los siguientes axiomas: $\forall$ $u,v,w \in V$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

i) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

ii) $\langle u+v,w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle v,w \rangle$

iii) $\langle cu,v \rangle = c \langle u,v \rangle$

iv) $\langle u,v \rangle \geq 0$ $\langle u,u \rangle = 0$, sí y solo sí $u = 0$

Las siguientes propiedades adicionales son una consecuencia inmediata de los cuatro axiomas del producto interior:

i) $\forall_v \in V$; $\langle \underline{o}\, v,v \rangle = \langle v,\underline{o}v \rangle = 0 \in \mathbb{R}$

Prueba: Sea $u, v \in V$

$$\langle \underline{0}u, u \rangle = \langle \underline{0}\, v, u \rangle, \Rightarrow 0 \langle u, v \rangle = 0 \in \mathbb{R}$$

ii) $\forall\, u, v, w \in V ; \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

Prueba:

$$\langle u, v + w \rangle = \langle v + w, u \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

iii) $\forall\, u, v \in V,\ c \in \mathbb{R};\ \langle u, cv \rangle = c \langle u, v \rangle$

Prueba:

$$\langle u, cv \rangle = \langle cv, u \rangle \Rightarrow c \langle v, u \rangle = c \langle u, v \rangle$$

4.2.- Definición.- Sean u y v dos vectores en un espacio vectorial V de dimensión finita, y sean:

$$(u)_{\beta} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$(v)_{\beta} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

los vectores de coordenadas de u y v con respecto a una base fija B, entonces:

$$\langle u, v \rangle = (u)_s , (v)_s = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

define un producto interior en V y se le denomina el **producto interior determinado por la base B.**

Sea $\beta = \Rightarrow \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, la base ordinaria de M_{2x2}

Si: $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$, $\in M$

$(u)_B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $(v)_B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ por lo tanto el producto interior determinado por S queda definido como: $\langle u,v \rangle =$ $(u)_B . (v)_B = u_1 v_1 + u_2 v_2 + uu_3 v_3 + u_4 v_4$

Por ejemplo si: $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\langle u,v \rangle = 1.(-1) + 2.0 + 3 . 3 + 4.2 = 16$$

4.3.- Definición de norma de un vector en un espacio con producto interno.- Sea V un espacio con producto interior. La norma $\| v \|$ de un vector v está definida por:

$$\| v \| = + \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

4.4.-Teorema 12.- Desigualdad de Cauchy - Schwarz.-

Si u y v son vectores en un espacio con producto interno, entonces:

$$| \langle u,v \rangle | \leq \| u \| \; \| v \|$$

Demostración: Si u = 0 entonces $\langle u,v \rangle = \langle u, u \rangle = 0$ En este caso la desigualdad se convierte en $0 \leq 0$. Se puede suponer entonces que $u \neq 0$.

Sea c un escalar arbitrario, por definición se tiene que: $0 \leq \langle cu + v, cu + v\rangle = c\langle u, cu + v\rangle + \langle v, cu + v\rangle = c\{c\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle\} + c\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$

$= c^2\langle u,u\rangle + c\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$

Puesto que $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, por definición se tiene que:

$0 \leq c^2\langle u,u\rangle + 2c\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$ (1)

Si hacemos $\langle u,u\rangle$, $= a$, $\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = b$ y $\langle v,v\rangle = c$ entonces (1) se convierte en : $0 \leq ac^2 + 2bc + c$

Puesto que el polinomio $ac^2 + 2bc + c$ nunca es negativo, por lo tanto su discriminante no puede ser mayor que 0. Esto es.$(2bc) - 4ac \leq 0$ o bien$(2\langle u,v\rangle)^2 - 4\langle u,v\rangle\langle v,v\rangle \leq 0$ y $4(\langle u,v\rangle)^2 \leq 4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$ (2).

La desigualdad de Cauchy - Schwarz se deduce dividiendo primeramente (2) entre 4, y luego extraemos la raiz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad resultante:

$$|\langle u,v\rangle| = +\sqrt{\langle u,u\rangle^2} \leq \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \|u\| \, \|u\|$$

Ejemplo: Si consideramos a M_{2x2} con el producto interior de $< U,V > = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$, vamos a determinar la ? A ?,

cuando $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

entonces $||A|| = < A,A >$

$$||A|| = + \sqrt{(-1)(-1)+(7)(7)+(6)(6)+(2)(2)}$$

$$||A|| = + \sqrt{1 + 49 + 36 + 4}$$

$$||A|| = + \sqrt{90}$$

De la misma manera el producto interno de A,B E M_{2X2}, si:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Entonces $< A, B > = (-2)(3) + (7)(-9) + (5)(-4)+(8)(8)$

$< A,B > = -15$

DEFINICION 4.5.- En un espacio con producto interior, dos vectores u y v son **ortogonales**, si y solo si:

$$< u,v > = 0$$

Además si u es ortogonal a cada uno de los vectores que pertenecen a W, se dice que u es ortogonal a W.

Un conjunto S es **ortonormal**, si es ortogonal y si todo vector de S tiene norma igual a 1.

COMENTARIO.- Vale señalar que la ortogonalidad depende de la selección del producto interior. Es posible que dos vectores sean ortogonales con respecto a un producto interior y que al mismo tiempo no sean con respecto a otro producto interior.

EJEMPLO:

Sean A y B $\in M_{2\times2}$, vamos a determinar si A es ortogonal a B, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces $\langle B, A\rangle = 0$

$$\langle B, A\rangle = -3\ (2) + 0\ (1) + 0\ (-1) + 2\ (3) =$$

$$\langle B, A\rangle = -6 + 6 = 0 \Rightarrow A \text{ es ortogonal a } B.$$

4.6.- Teorema 13.- Desigualdad triangular.- Si u y v son vectores ortogonales en un espacio con producto interior, entonces: $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|,\ \forall\ v \in V$

Demostración:

$$\|u + v\|^2 \le \langle (u + v), (u + v)\rangle$$

$$\le \|u\|^2 + 2\ \langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Esto implica que: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

En el siguiente ejemplo probaremos que la desigualdad triangular con las matrices A y B y el producto interno dado en la definición 4.2, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\text{Si } A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A + B\| = +\sqrt{(1)(1) + (2)(2) + (1)(1) + (1)(1)} = \sqrt{7}$$

$$\|A\| = +\sqrt{(1)(1) + (0)(0) + (1)(1) + (1)(1)} = \sqrt{3}$$

$$\|B\| = +\sqrt{(0)(0) + (2)(2) + (0)(0) + (0)(0)} = \sqrt{4} = 2$$

Por lo tanto:

$\sqrt{7} \leq \sqrt{3} + 2$

$2.646 \leq 1.732 + 2$

$2.646 \leq 3.732$

Lo cual nos ilustra una aplicación de la desigualdad triangular en el espacio de las matrices cuadradas.

CONCLUSIONES

Todo en la naturaleza está sujeto a incesantes cambios, la educación es un proceso dinámico de permanente superación. La vigencia de nuevos planes y programas oficiales implica la necesidad de nuevas fuentes de consulta para el estudiantado de nivel medio. Este fue mi objetivo al iniciar mi trabajo monográfico que en forma sencilla y clara he tratado de realizarla y espero que este trabajo dedicado a la juventud retribuya en parte los múltiples beneficios que he recibido como estudiante en este centro superior.

Una de las características de las matemáticas es conseguir que el alumno razone claramente, a esto he puesto mucho énfasis en cada uno de los capítulos. El estudiante debe aprender a manejar definiciones desde el punto de vista de función, demostrar teoremas utilizando correctamente la notación lógica y aplicar los conocimientos en ejemplos ilustrativos no extensos como lo exige la pedagogía moderna.

Por último reo que es muy importante antes de entrar a conocimientos profundos del Algebra Lineal, conocer concepto básico de espacio vectorial en general y de matrices en particular, siendo las matrices muy útiles en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, así como también los conceptos elementales de bases y dimensión, producto interno aplicado a matrices, que es el contenido de este trabajo.

Al concluir este trabajo del cual he obtenido buenos resultados, espero que de ésta misma manera resulte para el estudiante que llegue a tener en sus manos este modesto trabajo.

BIBLIOGRAFIA

Anton, H. (1982). Introducción al Algebra Lineal Editorial Limusa, S.A. México.

Gerber, H. (1988). Algebra Lineal, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. México

Grossman, S. (1992). Algebra Lineal, Mc Graw-Hill, Interaméricana, S.A. México.

Equipo Cultural, (1987) Autodidacta 2000, Cultural de Ediciones, S.A. Madrid-España.

Ross,K - Wright, Ch,(1988) Matemáticas discretas. Prentice-Hall, Hispanoamericana, S.A. México.

Serie de compendios Schaum, (1982) Teoría y problema de Algebra Lineal, Libros Mc Graw-Hill Interamericana, S.A. México

APENDICE I

INDICE DE SIMBOLOS.-

E	Pertenece o en a
*	operación binaria
a , β	escalar real
lR	el conjunto de los números reales
V	espacio vectorial
v	vector
Z^+	el conjunto de los enteros positivos
M_{mxn}	conjunto de matrices cuadradas
M_{nxn}	conjunto de matrices mxn
C	el conjunto de los números complejos
AT	matriz transpuesta
I	matriz identidad
r	traza de una matriz
+	suma entre matrices
.	multiplicación de un escalar por una
$c_1, c_2, ...c_n$ M_{mxn}	escalares reales
C_s	conjunto solución
gen	conjunto generador
Dim	dimensión de V
N_A	núcleo de una matriz
√(A)	nulidad de una matriz

$\rho(A)$	rango dela matriz
$(v)_B$	matriz de coordenadas de v
$\langle \; \rangle$	producto interno
$\lVert v \rVert$	normas de un vector
(AXA)	producto cartesiano entre elementos del conjunto A.