ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"El ESPACIO VECTORIAL DE LOS POLINOMIOS"

MONOGRAFIA

Previa la obtención del Título de:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA APLICADA A NIVEL MEDIO

Presentada por:

GLADYS M. CRIOLLO de CORONEL

Guayaquil - Ecuador

1994

AGRADECIMIENTO

Agradezco a todas las Instituciones que hicieron posible la realización del Curso de Post-grado, y en especial al mentalizador Master Gaudencio Zurita.

DEDICATORIA

A MIS PADRES

A MI ESPOSO

A MIS HIJAS

A MIS HERMANOS

D E C L A R A C I O N   E X P R E S A

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

....

Gladys M. Criollo de C.

Master Gaudencio Zurita

Director de Monografía

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo monográfico, está diseñado para servir en un curso de Algebra Lineal, cuando los estudiantes tengan claro el concepto de espacio vectorial.
Entre las operaciones más importantes de Algebra Lineal están la adición y multiplicación por un escalar.
Las propiedades algebraicas básicas de la adición y la multiplicación por escalar para vectores en R^n son válidas para los espacios vectoriales de los polinomios. Uno de los principales éxitos matemáticos del presente siglo, es llegar al conocimiento de que existen muchos espacios vectoriales además de R^n.
Dentro de los espacios vectoriales diferentes de R_n estan los espacios vectoriales de los polinomios P_n.
En 1965, Solomon W. Golomb, inventor de los "POLIOMIMOS" que había estudiado en Harvard, publicó un libro fundamental sobre el tema, titulado POLYOMINOS.
Los polinomios, nacidos como un pasatiempo matemático más o menos intrascendente, han terninado por convertirse en el curso de los años en una área de investigación importante dentro del análisis combinatorio.
La estructura en sí de este trabajo monográfico está dada de la siguiente manera. En el capítulo I denominado PRELIMINARES se dan las definiciones básicas del Algebra Lineal, tales como: vector, operación binaria, operación no binaria, espacio vectorial, combinacion lineal.espa-

cio generado, dependencia e independencia lineal, base y dimensións del espacio vectorial y subespacio vectorial con sus respectivas propiedades, se hace además de las generalizaciones, sus respectivas ilustraciones en P_2 y P_n.

En el capitulo II, denominado POLINOMIOS Y ORTOGONALIDAD se dan a conocer las definiciones e ilustraciones de producto interno real, norma de polinomios, vectores ortogonales, construcción de conjuntos ortogonales, proceso de ortogonalización de Gram_Schmidt, proyección ortogonal de polinomios y complenemto ortogonal de polinomios, con sus respectivas ilustraciones en P2.

En la espera de que el presente trabajo sirva de guia para el alumno que tenga interés de profundizar sus conocimientos en lo que respecta al espacio vectorial de los polinomios.

CAPITULO I

PRELIMINARES

1.1 OPERACION BINARIA

Definición 1.1.1 Una función Φ de $VxV \longrightarrow V$ es una operación binaria sobre un conjunto V, sí y solamente sí a cada par ordenado $(v_1,v_2) \in VxV$ le asigna uno y un sólo elemento en V; es usual denotar

$\Phi(v_1,v_2) = v_1 * v_2$

Ejemplos

La suma sobre R es binaria

$\Phi:(RxR) \longrightarrow R$

$\Phi(x + y) = (x+y) \in R$

$\Phi(2,3) = 2 + 3 = 5 \in R$

Nota: La definición de Φ significa que toda operación binaria en V es clausurativa.

Existen también operaciones que no son binarias, cuando multiplicamos por ejemplo un número por un "vector".

Sean $v \in R$ y $\alpha \in Z$; aquí los vectores están en

R y los escalares en Z.

$\alpha.V \in R$

$\phi(ZxR) \longrightarrow R$, esta operación no es binaria porque $\alpha \in Z$ y $V \in R$

1.2 <u>EL CONCEPTO DEL ESPACIO VECTORIAL</u>

<u>Definición 1.2.1</u>.- Sea V un conjunto no vacio de elementos denominados vectores, sobre el cual estan definidas dos operaciones; una binaria llamada suma de vectores + y otra no binaria denominada producto de vector por escalar; V junto con las operaciones (+ y .) es un espacio vectorial, si y solamente sí cumple con las siguientes propiedades:

i) $\forall\ v_1, v_2 \in V$ tal que $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
(PROPIEDAD CONMUTATIVA)

ii) $\forall$-- $v_1, v_2, v_3, \in V$ tal que $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
(PROPIEDAD ASOCIATIVA)

iii) $\exists\, 0v \in V\ \forall\ v \in V$ tal que $v + (0_v) = v$
(EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO DE LA SUMA)

iv) $\forall\ v, \in V\ \exists\,(-v)$ tal que $v + (-v) = 0v$
(EXISTENCIA DEL INVERSO ADITIVO)

Las siguientes propiedades se cumplen para la operación no binaria.

v) $\forall\ \alpha \in R\ \forall\ v_1, v_2 \in V$, $\alpha\,(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
(PRIMERA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

vi) $\forall\ \alpha, \beta \in R\ \forall\ v \in V$ tal que $(\alpha+\beta)v_1 = \alpha v + \beta v$
(SEGUNDA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

vii) $\forall\ \alpha, \beta \in R \quad \forall\ v \in V$ tal que $(\alpha.\beta)\ v = \alpha(\beta.v)$

(PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION POR UN ESCALAR)

viii) $\forall\ v \in V \quad 1.V = V$

(PROPIEDAD DE LA IDENTIDAD MULTIPLICATIVA)

Por definición de operación binaria se cumple la cerradura de la suma entre vectores.

$\forall\ v_1, v_2, \in V \quad v_1 + v_2 = v_3 \implies v_3 \in V$ y

La Cerradura de la multiplicación de vector por escalar se cumple también.

$\forall\ \alpha \in R \quad \forall\ v \in V \implies \alpha\ (v) \in V$

<u>ILUSTRACION DEL CONCEPTO DEL ESPACIO VECTORIAL</u>

Sea $V = P_2$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2, con las operaciones; binaria suma entre polinomios y producto de polinomios por escalar.

Sean $p_1(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_o) \in P_2$

$p_2(x) = (b_2x^2 + b_1x + b_o) \in P_2$

Y sea la suma entre polinomios en P_2 definida como

$p_1(x) + p_2(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_o) + (b_2x^2 + b_1x + b_o)$

$= (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_o+b_o)$ y la operación producto por escalar definida como.

$\alpha.p_1(x) = \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_o)$

$\alpha.p_1(x) = \alpha.a_2x^2 + \alpha.a_1x + \alpha.a_o$ es polinomio en P2.

Para probar que P_2 (+,.) es un Espacio Vectorial necesitaremos un tercer polinomio en P_2, sea éste

$p_3(x) = c_2x^2 + c_1x + c_o$

Es importante dar a conocer que de ahora en adelante cuando nos vayamos a referir al vector cero de los polinomios nos referiremos como el $0p$, queriendo expresar con esto que:

$0p = 0x^2 + 0x + 0$

Obviamente no vamos a verificar la cerradura de la suma, pués ésta es una operación binaria.

Verifiquemos la Propiedad Conmutativa de la suma de polinomios en P_2 ; esto es:

i) $\forall\ p_1,\ p_2 \in P_2$ tal que $p_1 + p_2 = p_2 + p_1 \in P_2$

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 &= (a_2x^2+a_1x+a_o)+(b_2x^2 +b_1x + b_o)\\
&= (b_2x^2 +b_1x + b_o) + (a_2x^2+a_1x+a_o)\\
&= (a_2 + b_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_o + a_o)\\
&= (b_2 + a_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_o + b_o)\\
&= (b_2x^2 +b_1x + b_o) + (a_2x^2+a_1x+a_o)\\
&= p_2 + p_1
\end{aligned}$$

Verifiquemos la Propiedad Asociativa de la Suma

ii) $\forall\ p_1, p_2,$ y $p_3 \in P_2$ tal que

$[p_1 + p_2] + p_3 = p_1 + [p_2 + p_3]$

$$\begin{aligned}
[p_1+p_2] + p_3 &= [(a_2x^2+a_1x+a_o)+(b_2x^2+b_1x+b_o)]+(c_2x^2+c_1x+c_o)\\
&= [(a_2+b_2)x^2 +(a_1+b_1)x +(a_o+b_o)] + (c_2x^2 + c_1x + c_o)\\
&= [(a_2+b2+c_2)x^2 + (a_1+b1+c_1)x +(a_o+ b_o +c_o)]\\
&=(a_2x^2+a_1x+a_o)+ [(b_2x^2+b_1x+b_o) + (c_2x^2+c_1x+c_o)]\\
&= p_1+[p_2 + p_3]
\end{aligned}$$

La Existencia del Elemento Neutro de la Suma

iii) $\exists\ 0p \in P_2 \quad \forall\ p \in P_2$ tal que $p + 0p = p$

$$p + 0p = (a_2x^2 + a_1x + a_o) + (0x^2 + 0x + 0)$$
$$= (a_2 + 0)x^2+(a_1 +0)x + (a_o + 0)$$
$$= (a_2\ x^2 + a_1x + a_o)$$
$$= p \in P_2$$

La Propiedad del Inverso Aditivo

iv) $\forall\ p \in P_2 \quad \exists\ -p \in P_2$ tal que $p +[-p]= 0p$

Siendo $-p =-(0x^2 + 0x + 0)$

$$p +[-p] = (a_2x^2+a_1x+a_o) +(-a_2x^2 - a_1x - a_o)$$
$$= (a_2 -a_2\ )\ x^2 + (a_1 - a_1)x +(a_o - a_o)$$
$$= (0x^2 + 0x + 0)$$
$$= 0p$$

Verificaremos la Propiedad Distributiva de la suma de escalares por un vector.

v) $\forall\ p \in P_2 \quad \forall\ \alpha,\beta \in R$ tal que $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$

$$(\alpha + \beta)p =(\alpha+\beta)(a_2x^2 + a_1x + a0)$$
$$= \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_o) + \beta(a_2x^2 + a_1x + a_o)$$
$$= (\alpha.a_2x^2 + \alpha.a_1x +\alpha.a_o) +(\beta.a_2x^2 + \beta.a_1x +\beta.a_o)$$
$$= \alpha.p + \beta.p$$

La Propiedad Distributiva de la Suma de vectores por un escalar

vi) $\forall\ p_1, p_2 \in P_2 \quad \forall\ \alpha \in R$ tal que $\alpha[p_1+p_2]=\alpha p_2+\alpha p_1 \in P_2$

$$\alpha[p_1+p_2] = \alpha[a_2x^2+ a_1x + a_o\ ) + (b_2x^2 + b_1x + b_o)]$$
$$= \alpha(a_2x^2+ a_1x + a_o) + \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_o)$$
$$= \alpha p_1 + \alpha p_2$$

La Propiedad Asociativa del Producto Escalar por un vector

vii) $\forall\ p \in P_2\ \forall\ \alpha,\beta \in R$ tal que $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p \in P_2$

$$\alpha(\beta p) = \alpha[\beta(a_2x^2 + a_1x + a_o)]$$
$$= (\alpha\beta)(a_2x^2 + a_1x + a_o)$$
$$= (\alpha\beta)p$$

La propiedad del Idéntico Multiplicativo

viii) $\forall\ p \in P_2 \quad 1 \in P_2,\ 1p = p \in P_2$

$$1.p = 1(a_2x^2 + a_1x + a_o)$$
$$= a_2x^2 + a_1x + a_o$$
$$= p \in P_2$$

Ahora presentemos un ejemplo del cual P_2 es un caso particular: Los polinomios P_n de grado menor o igual que n.Hemos probado que P_2 con sus correspondientes operaciones binaria de la suma entre polinomios y producto de un escalar por un polinomio en P_2 es un espacio vectorial; de igual manera podemos probar que $P_3, P_4, \ldots$ y así sucesivamente son espacios vectoriales.

Hagámoslo ahora con P_n, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que $n \in Z^+$, con sus correspondientes operaciones; una binaria llamada suma de polinomios en P_n, definida de la siguiente manera:

$$p_1 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o) \in P_n$$

y $p_2 = (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_o) \in P_n$ son polinomios típicos de grado menor o igual que n.

$p_1 + p_2 = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + bx + b_o)$

$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_o + b_o);$

y otra llamada producto de un polinomio vector por escalar real definida como sigue $\alpha . p \in P_n$

$\forall \alpha \in R \qquad \forall p \in P_n$

$$\alpha . p = \alpha (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$$

$$= \alpha . a_n x^n + \alpha . a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha . a_1 x + \alpha . a_o$$

Como vemos $\alpha . p$ también es un polinomio en P_n.

Verificaremos si P_n con sus correspondientes operaciones de $(+, .)$ es un espacio vectorial; para lo cual necesitaremos tres polinomios típicos en P_n, como sigue:

$p_1 = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) \in P_n$

$p_2 = (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_o) \in P_n$

$p_3 = (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_o) \in P_n$

No vamos a probar la cerradura de la suma, pués ésta es una operación binaria .

Verificaremos si se cumplen las siguientes propiedades relacionadas con la suma de vectores

La Propiedad Conmutativa

i) $\forall p_1, p_2 \in P_n$ tal que $p_1 + p_2 = p_2 + p_1 \in P_n$

$p_1 + p_2 = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_o)$

$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_o + b_o)$

$= (b_n + a_n)x^n + (b_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_1 + a_1)x + (b_o + a_o)$

$p_1 + p_2 = (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_o) + (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o)$

$= p_2 + p_1$

La Propiedad Asociativa de la Suma

ii) $\forall\ p_1, p_2, p_3 \in P_n$ tal que $[p_1+p_2] + p_3 = p_1 + [p_2 + p_3]$

$[p_1 + p_2] + p_3 = [(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_o) + (b_nx^n + \ldots + b_1x + b_o)] + (c_nx^n + \ldots + c_1x + c_o)$

$= [(a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_o + b_o)] + (c_nx^n + \ldots + c_1x + c_o)$

$= [(a_n + bn + c_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1 + c_1)x + (a_o + b_o + c_o)]$

$= (a_nx^n + \ldots + a_1x + a_o) + [(b_nx^n + \ldots + b_1x + b_o) + (b_nx^n + \ldots + b_1x + b_o)]$

$= p_1 + [p_2 + p_3]$

La Propiedad del Elemento Idéntico de la suma

iii) $\exists\ 0p \in P_n\ \forall\ p \in Pn$ tal que $p + 0p = p \in P_n$

$p + 0p = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o) + (0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0)$

$= (a_n + 0)x^n + (a_{n-1} + 0)x^{n-1} + \ldots + (a_1 + o)x + (a_o + 0)$

$= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o)$

$= p$

La Propiedad del Inverso Aditivo

iv) $\forall\ p \in P_n\ \ \exists -p \in P_n$ tal que $p + [-p] = 0_p$

$p + [-p] = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o) + (-a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_o)$

$$= [(a_n - a_n)x^n + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} \ldots + (a_1 - a_1)x$$

$$+(a_o - a_o)]$$

$$= (0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0)$$

$$= 0p$$

La Propiedad Distributiva de la multiplicación de escalares por un vector

vi) $\forall \; p \in P_n \;\; \forall \; \alpha, \beta \in R$ tal que $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$

$$(\alpha + \beta)p = (\alpha + \beta)(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a0)$$

$$= \alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) +$$

$$\beta(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$$

$$= (\alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x + \alpha a_o) +$$

$$(\beta a_n x^n + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta a_1 x + \beta a_o)$$

$$= \alpha p + \beta p$$

La Propiedad Distributiva de la suma de vectores por un escalar

vii) $\forall \; p_1, p_2 \in P_n \;\; \forall \; \alpha \in R$ tal que

$\alpha[p_1 + p_2] = (\alpha p_2 + \alpha p_1) \in P_n$

$$\alpha[p_1 + p_2] = \alpha[(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$$

$$+ (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_o)]$$

$$= \alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) +$$

$$\alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$$

$$= (\alpha p_2 + \alpha p_1) \in P_n$$

La Propiedad Asociativa del Producto de escalares por un vector

ix) $\forall \; p \in P_n \;\; \forall \; \alpha, \beta \in R$ tal que $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$

$$\alpha(\beta p) = \alpha[\beta(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)]$$

$= (\alpha\beta)\ (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$

$= (\alpha\beta)p$

La Propiedad del Elemento Idéntico de la Multiplicación

x) $\forall\ p \in P_n \quad 1.p = p$

$1p = 1(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$

$1p = 1(a_n x^n) + 1(a_{n-1} x^{n-1}) + \ldots + 1(a_1 x + a_o)$

$1p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$

$1p = p \in P_n$

Hemos probado que los polinomios de grado menor o igual que n constituyen un espacio vectorial.

1.3 COMBINACION LINEAL Y ESPACIO GENERADO

Definición 1.3.1.-Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de un espacio vectorial V.

Un vector $v \in V$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si y solamente sí, existen escalares reales $c_1, c_2, \ldots c_n$ tales que $v = c_1.v_1 + c_2.v_2 + \ldots c_n.v_n$

Por Ejemplo

$p(x) = (8x^2 + 7x) \in P_2$ es una combinación lineal de $2x^2$ y $3x$ ya que:

$8x^2 + 7x = c_1(2x^2) + c_2(3x)$

$8x^2 = c_1(2x^2) \quad ===> c_1 = 4$

$7x = c_2(3x) \quad ===> c_2 = 7/3$

1.4 ESPACIO GENERADO DE VECTORES

Definición 1.4.1 .- Se dice que los vectores v_1

$,v_2,\ldots,v_n$ en un espacio vectorial V generan V si y solamente sí todo vector de V se puede expresar como una combinación lineal de ellos; de otra forma dicho, $\forall$ $v \in V$ existen escalares a_1, $a_2,\ldots,a_n$ tales que:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$

1.5 <u>DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES</u>

<u>Definición1.5.1</u>.- Sea v_1 $,v_2$ $,\ldots,v_n$ n vectores de un espacio vectorial V, con sus correspondientes operaciones, binaria suma de vectores y producto de un escalar por un vector; además $c_1, c_2,..c_n$ escalares reales; se dice que los vectores v_1, $v_2,\ldots,v_n$ son linealmente independientes en V si y solamente sí la única solución para la igualdad

$c_1.v_1 + c_2.v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$ es $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

<u>Ejemplo de Independencia Lineal</u>

Sea P_2, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, previamente tratado, para lo cual .

$p_1(x)=(x^2 + x + 2) \in P_2$; $p_2(x)=(2x^2 + x) \in P_2$ y $p_3(x)=(3x^2+2x+2) \in P_2$ son polinomios particulares de P_2.

Verificaremos si la única solución para la igualdad

$a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ implica $a_1=a_2=a_3=0$

como única solución

$a_1(x^2 + x + 2) + a_2(2x^2 + x) + a_3(3x^2 + 2x + 2) = 0$

$\Longrightarrow a_1x^2 + a_1x + 2a_1 + 2a_2x^2 + xa_2 + 3a_3x^2 + 2a_3x + 2a_3 = 0$

$\Longrightarrow (a_1x^2 + 2a_2x^2 + 3a_3x^2) + (a_1x + a_2x + 2a_3x) + (2a_1 + 2a_3) = 0$

$\Longrightarrow x^2(a_1 + 2a_2 + 3a_3) + x(a_1 + a_2 + 2a_3) + (2a_1 + 2a_3) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones homogéneo que tiene tres ecuaciones y tres incógnitas a_1, a_2, y a_3; lo que equivale a tener tres predicados t_1, t_2 y t_3 con tres variables a_1, a_2 y a_3.

$t1$: $a_1 + 2a_2 + 3a3 = 0$

t_2: $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$

t_3: $2a_1 + 2a_3 = 0$

Encontremos el Conjunto Solución $At_1(a_1 + 2a_2 + 3a3) \wedge t_2(a_1 + a_2 + 2a_3) \wedge t_3(2a_1 + 2a_3) = At(\underline{a})$ del sistema lineal.

Su matríz aumentada y equivalente son:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De donde obtenemos el siguiente conjunto solución

$At(\underline{a}) = \{(a_1, a_2, a_3)/a_1 = -a_3, a_2 = -a_3; a_3 \in R\}$ R^3

Por lo que se concluye que; $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$ no son linealmente independientes en P_2 ya que la única solución del sistema lineal de ecuaciones **no** es $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

1.6 BASES Y DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición 1.6.1.- Un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ constituye una base para V si y solamente sí cumple con lo siguiente:

i) $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente en V, y

ii) $B \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V

Se puede probar que existe más de una base para un mismo espacio vectorial , pero todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual número de elementos.

$B_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base para P_2 y

$B_2 = \{2, 3x, x^2\}$ es otra base para P_2 ; pero las dos bases tienen el mismo número de elementos, esto es, 3.

Definición de Dimensión .-Un número entero n es la dimensión de un espacio vectorial V si y solamente sí, n es el número de vectores que tiene cualquier base de V.

Si el espacio vectorial V tiene una base finita, V recibe el nombre de Espacio Vectorial de Dimensión finita. En cualquier otro caso se dice que V es un Espacio Vectorial de dimensión infinita. Si $V=\{0\}$, diremos que V es de Dimensión Cero. P_n es un espacio de dimensión $(n + 1)$.

<u>ILUSTRACION DE BASE Y DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL</u> Vamos a verificar que $B= \{ x^2, x, 1 \}$ es una base para el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos.

Para que un conjunto de vectores sea una base para el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 debemos primero probar que cualquier polinomio en P_2 es una combinación lineal de x^2, x y 1, y luego que B es linealmente independiente en P_2.

$\forall\ p(x) \in P_2$, existen constantes c_1, c_2, c_3 tales que

$p(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3(1)$

Tomemos un polinomio típico en P_2, sea este

$ax^2 + bx + c$, luego, $ax^2 + bx + c = c_1x^2 + c_2x + c_3$

$\Longrightarrow \quad ax^2 = c_1x^2 \quad \Longrightarrow \quad a= c_1$

$\Longrightarrow \quad bx = c_2x \quad \Longrightarrow \quad b= c_2$

$\Longrightarrow \quad c = c_3 \quad \Longrightarrow \quad c = c_3$

Lo que quiere decir que cualquier polinomio, $ax^2 + bx + c$ en P_2 es una combinación lineal de los polinomios dados en el conjunto B.

Verifiquemos ahora si B es linealmente

independientes en P_2.

$c_1(x^2) + c_2(x) + c_3(1) = 0x^2 + 0x + 0(1)$ (A)

La solución única para (A) es $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$

Lo que indica que $B = \{ x^2, x.1 \}$ es linealmente independiente en P_2 y unido a lo previamente probado, concluimos que B es una base para P_2

1.7 SUB -ESPACIO VECTORIAL

Sea H un sub-conjunto no vacío de un espacio vectorial V, H es un sub-espacio de V si y solamente sí H es en sí mismo un espacio vectorial, junto con las dos operaciones definidas en el espacio vectorial V.

Para probar que $H \subset V$ es un subespacio de V, junto con las correspondientes operaciones, basta probar que se cumplen para H las propiedades clausurativas de la suma de vectores y la multiplicación de escalares por vectores en H.

P_2 por ejemplo es un subespacio de P_3, pues todos los $p_1(x)$, $p_2(x) \in P_2$, también están en P_3; y $(p_1(x) + p_2(x)) \in P_2$ y $[\alpha.p1(x)] \in P_2$, α real.

CAPITULO 2

POLINOMIOS Y ORTOGONALIDAD

2.1 PRODUCTO INTERNO REAL

Definición2.1.1 .- Sea P_n el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n, decimos que en P_n hemos definido un producto interno, si y solamente sí , existe una función ,$\Phi : P_n \times P_n \longrightarrow R$, que cumple con lo siguiente

(i) $\langle v,v \rangle > 0$ si $\neg(v = 0)$;

ii) $\langle v,v \rangle = 0$ si y solo sí $v = 0v$;

iii) $\langle v_1,v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1,v_2 \rangle + \langle v_1,v_3 \rangle \quad \forall\ v_1,v_2 \in V$

iv) $\langle v_1,v_2 \rangle = \langle v_2,v_1 \rangle \quad \forall \quad v_1,v_2 \in V$

vi) $\langle \alpha v_1,v_2 \rangle = \alpha \langle v_1,v_2 \rangle \quad \forall\ \alpha \in R \quad \forall\ v_1,v_2 \in V$

Es usual denotar a $\Phi(v_1,v_2) = \langle v1,v_2 \rangle \in R$

Se puede probar que para P_n, los Polinomios de grado menor o igual que n en el intervalo [a,b], la siguiente función Φ define un producto interno:

$$\Phi(v_1,v_2) = \int_a^b p_1(x)\ p_2(x)\ dx = \langle p_1,p_2 \rangle, \quad p_1,p_2 \in P_2$$

Por Ejemplo, sean los polinomios $p_1(x) = 2x + 2$ y $p_2(x) = x$, polinomios de grado menor o igual que 1. Calcular el producto interno entre los polinomios p_1 y p_2.

Aplicaremos la definición previa de producto interno para polinomios, esto es

$\Phi(v_1,v_2) = \langle v_1,v_2\rangle = \langle p_1(x),p_2(x)\rangle =$

$\Phi(v_1,v_2) = \int_a^b p_1(x)p_2(x)\,dx =$; haciendo $a=0$ y $b=1$

$$\int_0^1 p_1(x)\,p_2(x)\,dx = \int_0^1 (2x+2)x\,dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \left[(2/3)x^3 + x^2\right]\Big|_0^1$$

$$\Longrightarrow [\,2/3 + 1 - 0\,] = 5/3 = \langle p_1(x),p_2(x)\rangle = \langle 2x + 2,x\rangle$$

2.2 NORMA DE UN VECTOR

Definición 2.2.1.- Dado un espacio vectorial V con sus correspondientes operaciones, sobre el que se ha definido un producto interno, la norma de un vector $v \in V$ está dado por:

$$\|V\| = +\sqrt{\langle v,v\rangle}\ ,\ \forall\, v \in V$$

Por Ejemplo

En caso de polinomios de grado menor o igual que 1 $p(x) = 2x + 2$

Calculemos la norma de $p(x)$; para lo cual tomamos el previamente definido producto interno, entre polinomios y obtenemos que

$\|p(x)\| = +\sqrt{<p(x),p(x)>} =$

$\| p(x)\| = \| 2x + 2\| =$

$+\sqrt{\int_0^1 p(x)\ p(x)\ dx} = +\sqrt{\int_0^1 (2x+2)(2x+2)dx} = +\sqrt{\int_0^1 (2x+2)^2 dx}$

$= +\sqrt{\int_0^1 (4x^2 +8x +4)dx}$

$= +\sqrt{[\ 4/3x^3 +4x^2 + 4x\ ]\ \Big|_0^1}$

$= [\ 4/3 + 4 +4]^{½} =[28/3]^{½}$

2.3 PROPIEDADES DE LA NORMA DE UN VECTOR

Se puede mostrar que $\forall\ v \in V$, se cumple que:

(i) $\|v\| > 0$ Si $\neg(v = 0)$

(ii) $\|v\| = 0$ Si $v = 0$

(iii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\ \|v\|$

(iv) $\|v_1 + v_2\| < o = \|v_1\| + \|v_2\|$

$\forall\ v \in V,\ \|\ v/\|\ v\|\ \| = 1$

2.4 VECTORES ORTOGONALES

Definición2.4.1 .-Sea V un espacio vectorial con sus correspondientes operaciones; sobre el que se ha definido un producto interno; dos vectores $v_1,v_2 \in V$ son ortogonales; si y solamente sí $<v_1,v_2>=0$

2.4.1 TEOREMAS RELATIVOS A LA ORTOGONALIDAD

Teorema 1 En un espacio vectorial V, sobre el que se ha definido un producto interno, todo conjunto de vectores, no vacío, ortogonal en V es linealmente independiente en V. En particular, en un espacio vectorial de dimensión finita n (dim V = n), todo conjunto ortogonal de vectores que conste de n elementos, ninguno de los cuales es el vector cero, es una base para V.

(La demostración de este teorema la encontrará en : El texto, Cálculo de Apostol, Tomo 2 pag. 692 editorial Del Castillo 1980)

Definición2.4.2.- El conjunto de vectores $B=\{u_1,u_2,...u_n\}$ en V es un conjunto ORTONORMAL si y solamente sí

(i) $<u_i.u_j> = 0$, $\forall$ i,j, tal que $\neg(i = j)$ (1) y

(ii) $<u_i.u_i> = 1$ (2)

Si sólo satisface (1), se dice que el conjunto es ortogonal

Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt.

Sea H un sub-espacio de dimensión m de V. Entonces H tiene una base ortonormal.

PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT

El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt es de caracter constructivo, con el cual dada una base B cualquiera para un espacio vectorial V, se puede obtener una base ORTONORMAL.

Dijimos en lineas previas que si un conjunto de vectores B es ortogonal en un espacio vectorial V estos vectores son también linealmente independiente en V, pero que además la Independencia lineal de vectores no garantiza ortogonalidad.

Construyamos a partir del teorema 2.4.2.2 una base ORTONORMAL a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Partiremos de una base cualquiera $B=\{v_1,v_2,...v_n\}$ para el espacio vectorial V; pasaremos por una base ORTOGONAL $B_1=\{v_1',v_2',...v_n'\}$ y finalmente llegaremos a una base ORTONORMAL

$$B_2=\{u_1,u_2,...u_n\}$$

Este proceso denominado de ortogonalización de Gram-Schmidt, se ejecuta en los siguientes pasos

PRIMER PASO

Dado $v_1 \in B$, hagamos

$$v'1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = u_1, \text{ recordemos que } \|v/\|v_1\|\|=1$$

SEGUNDO PASO

Hágamos $v'_2=v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1$

Probaremos que $v`2$ es ortogonal a u_1

$$\begin{aligned}\langle u_1,v'_2\rangle &= \langle v_1,v_2 - \langle v_2,u_1\rangle u_1\rangle \\ &= \langle u_1,v_2\rangle - \langle v_2,u_1\rangle \langle u_1,u1\rangle \\ &= \langle u_1,v_2\rangle - \langle v_2,u_1\rangle \\ &= \langle u_1,v_2\rangle - \langle u_1,v_2\rangle = 0\end{aligned}$$

Entonces u_1 y v_2 son ortogonales

Definimos $u_2 = \dfrac{v`_2}{\|v_2\|}$

TERCER PASO

Sea $v_3' = v_3 - \langle v_3,u_1\rangle u_1 - \langle v_3,u_2\rangle u_2$

$\langle u_1,v_3\rangle = \langle u_1,v_3\rangle - \langle u_1,v_3\rangle\langle u_1,u_1\rangle - \langle v_3,u_2\rangle\langle u_1,u2\rangle$

$= \langle u_1,v_3\rangle - \langle u_1,v_3\rangle = 0$

Entonces $v`_3$ y u_1 son ortogonales

Probaremos que $v`_3$ es ortogonal a u_2

$\langle u_2,v_3\rangle = \langle u_2,v_3\rangle - \langle v3,u_1\rangle\langle u_1,u_2\rangle - \langle v_3,u_2\rangle\langle u_2,u_2\rangle$

$= \langle u_2,v_3\rangle - \langle v_3,u_2\rangle = 0$

Entonces v_3 y u_2 son ortogonales

Hagamos $u_3 = \dfrac{v`_3}{\|v`_3\|}$, con lo cual $\| u_3\| = 1$

Tenemos ya u_1, u_2 , y u_3 mutuamente ortogonales y con norma uno, esto es son ortonormales.

CUARTO PASO

Hagamos

$v'_4 = v_4 - \langle v_4,u_1\rangle u_1 - \langle v_4,u_2\rangle u_2 - \langle v_4,u_3\rangle u_3 - \ldots - \langle v4,u_4\rangle u_4$

.
.
.

$v'_k = v_k - \langle v_k,u_1\rangle u_1 - \langle v_k,u_2\rangle u_2 - \ldots \langle v_k,u_i\rangle u_i - \ldots \langle v_k,u_{k+1}\rangle u_{k-1}$

$$u_k = \frac{v'_k}{\|v'_k\|}, \qquad \|u_k\| = 1$$

Hemos así obtenido $B_2 = \{ u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, que es una base ortonormal para V, pues $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son mutuamente ortogonales y $\|u_1\| = \|u_2\| = \ldots = \|u_k\| = 1$

Nota: Esta prueba para cualquier $n \in Z^+$ se la hace por inducción

Ilustremos el Método de Gram-Schmidt

Construyamos una base ortonormal para $P_2\ [0,1]$

Partiremos de la base estandar para los Polinomios de grado menor o igual a 2, esto es $B=\{1,x,x^2\}$.

Pasaremos por una base $B_1=\{v`_1 ,v`_2 ,v`_3\}$ y finalmente llegaremos a una base ORTONORMAL $B_2=\{u_1,u_2,u_3 \}$.

En lineas previas se definió al producto interno entre polinomios como la integral del producto de los polinomios en un intervalo dado.

Sabemos que $v_1 = 1$, $v_2 = x$ y $v_3 = x^2$

PRIMER PASO

Calculando la norma de v_1 tenemos que

$$\|<v_1,v_1>\|^2 = \int_0^1 (1.1)dx= \int_0^1 1^2\, dx= x \Big|_0^1 = 1$$

De donde $u_1 = 1$

y la Norma de u_1 es = 1

SEGUNDO PASO

Hagamos $v`_2 = v2 - \langle v_2 u_1\rangle u_1$

$\langle v_2,u_1\rangle = \int_0^1 x(1)dx = \int_0^1 xdx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$

$v`2 = x - 1/2$

Probaremos que $v`_2$ y u_1 son ortogonales

Para lo cual debe ocurrir que el producto interno entre $\langle v`_2,u_1\rangle$ debe ser igual a cero.

$\langle v`_2,u_1\rangle = \int_0^1 (x-1/2)(1)dx =$

$\Longrightarrow \int_0^1 (x-1/2)dx = x2/2-1/2 \Big|_0^1 = 1/2 -1/2=0$

Por lo que $v`2$ y u_1 son ortogonales

$\|v`_2\| = +\left[\int_0^1 (x-1/2)_2\ dx\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 (x2-x+1/4)dx\right]^{1/2} = 1/\sqrt{12} = 1/2\sqrt{3}$

De donde $u_2 = v`_2 / \|v`_2\|$

$u_2 = 2\sqrt{3}\ (x-1/2)/1/2\sqrt{3} = \sqrt{3}(2x-1)$

TERCER PASO

Hagamos $v`_3 = v_3 - \langle v_3\ u_1\rangle u_1 - \langle v_3\ u_2\rangle u_2$

Realizaremos los cálculos correspondientes a los productos internos.

$\langle v_3\ ,\ u_1\rangle = \int_0^1 x^2\ dx = x^3\Big|_0^1 = 1/3$

$\langle v_3,u_2\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 x^2\ (2x-1)\ dx = \sqrt{3}\int_0^1 (2x^3 - x^2)\ dx = \sqrt{3}/6$

Luego

$v`_3 = x^2 - 1/3 - \sqrt{3}/6[\sqrt{3}(2x-1)] = x^2 - x + 1/6$

Calculando la Norma de $v`3$, tenemos

$$\|v'_3\| = \left[\int_0^1 (x^2 - x + 1/6)dx\right]^{1/2} =$$

$$\|v`3\| = \left[\int_0^1 (x4 - 2x^3 + 4\backslash 3x^2 - x/3 + 1/36)\right]^{1/2}$$

$$\|v'3\| = 1/\sqrt{180} = 1/6\sqrt{5}$$

De donde $u_3 = \dfrac{v`3}{\|v`3\|}$

$u3 = 6\sqrt{5}\,(x^2 - x + 1/6) = \sqrt{5}\,(x_2 - 6x + 1)$

Obviamente, la norma de u_3 es igual a 1.

Verificaremos que $v`_3$ y u_2 son ortogonales

Entonces el producto interno entre $<v`_3,u_2>$ es 0

$$<v'3,u_2> = \sqrt{3}\int_0^1 (x^2 \_x + 1/6)(2x-1)\,dx=$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2x^3 - 3x2 + 4/3x - 1/6)dx$$

$$<v'_3\ u_2> = \sqrt{3}\left[\,1/2x^4 - x^3 - 2/3x^2 - 1/6x\right]\Big|_0^1$$

$<v\cdot 3u_2> = 7/6-7/6 = 0$

De donde la base ortonormal para P_2 es

$B_1 = \{\, u_1,u_2,u_3\} = \{\, 1,\ \sqrt{3}(2x-1)\ ,\ \sqrt{5}(x_2 - 6x + 1)\}$

C O N C L U S I O N E S

Al llegar al término de este trabajo, una de mis conclusiones a las que he llegado, es que he podido vivir la importancia de conocer el Algebra Lineal, y sus aplicaciones que tiene en el estudio de los CONTENIDOS Programáticos que manda a impartir en los Centros de Educación Media,El Ministerio de Educación.

Lo tratado en este trabajo hace referencia al ESPACIO VECTORIAL DE LOS POLINOMIOS, los mismos que en secundaria se trata a partir del TERCER CURSO del Ciclo Básico, y de CUARTO CURSO en adelante se trata la Función Polinómica, para lo cual es importante que el estudiante sepa como trabajar en el ESPACIO VECTORIAL DE LOS POLINOMIOS.

Lo que se ha hecho en este trabajo es tambien, dar un aporte a toda persona que haga educación, que cuide al realizar una definición de utilizar la siguiente estructura.

PRIMERO._ Describa todos los elementos que intervienen en la definición.

SEGUNDO._ Escriba la expresión matemática a definir, y utilice la expresión SI Y SOLAMENTE SI.

TERCERO._ Diga qué condición debe cumplir, la expresión matemática que se define

INDICE

BIBLIOGRAFIA

- ANTON Howard, (1985). **Introducción al Algebra Lineal,** Editorial Limusa, 8ª Edición, México.
- GEBER Harvey, (1990). **Algebra Lineal**, Grupo Editorial Iberoamericana S.A. México D.F., México.
- GROSSMAN Stanley, (1992), **Algebra Lineal con Aplicaciones,**

  Editorial McGRAW-HILL Interamericana de México, Cuarta Edición, México.
- HOFFMAN Kennet, (1977), **Algebra Lineal,** Ediciones del Castillo, S.A., Madrid, España.
- PERRY William, (1980), **Algebra Lineal**, Editorial McGRAWHILL

  Interamericana de México, México.

A N E X O

α ....Alfa

β...................................Beta

$\in$...................................Pertenece

$\longrightarrow$.................................Implica

$\Longrightarrow$.................................Entonces

O_p.................................El Cero de p

p...................................Polinomio en P_n

$p_1(x)$...............................Polinomio en x

P_n ....Espacio Polinomio de grado menor o igual que n

$\int$ ....Integral

V.................................Espacio Vectorial V

c_1.................................Constante real

P_2.................................Polinomio de Grado menor o igual que 2

$\forall$................................Para todo

$\exists$................................Existe

$\surd$ ....Raíz Cuadrada

$\|v\|$..............................Norma de v

<,>..............................Producto Interno

At................................Predicado

O_v................................El cero de V

. ...Producto

\+ ....Suma

V ....Espacio Vectorial

v ....Elementos de V

R^n..................................Conjunto de todos los n_vectores.

H..................................Subespacio Vectorial

a, b..............................Límites de la Integral

ϕ ....Función

B..................................Base

$\neg$ ....Negación

R..................................El Conjunto de los Números reales