ESCUELA SUPERIOR

POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

POSTGRADO EN EDUCACION MATEMATICA

"GRUPOS DE PERMUTACIONES CON APLICACION A GRUPOS DE SIMETRIA"

MONOGRAFIA DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

Presentada por:

NANCY HIPATIA VACA CEVALLOS

GUAYAQUIL - ECUADOR

1994

ING. MARGARITA MARTINEZ

Directora de Monografía

DECLARACION EXPRESA

La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL.

(Reglamento de Exámenes y Títulos Profesionales).

AGRADECIMIENTO

Aprovecho de esta oportunidad para expresar mi eterna gratitud al Ministerio de Educación Pública, al Personal Directivo, Docente y Administrativo de la Escuela Superior Politécnica del Litoral y, de manera especial al Ex-Ministro de Educación, Dr. Eduardo Peña Triviño, al Director del Programa de Educación Matemática, Ms. Gaudencio Zurita, a la Sra. Directora de la Monografía, Ing. Margarita Martínez, al FILANBANCO y a todos mis compañeros; con la seguridad de que los conocimientos recibidos serán en lo posterior un invalorable instrumento de cultura matemática para el país.

DEDICATORIA

Este modestísimo trabajo dedico a mi única hija Angela, que con doloroso sacrificio y estoicismo soportó la ausencia de su madre.

INDICE

CAPITULO III

CAPITULO IV

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es dar a conocer al estudiante el Tema de SIMETRIA en forma fácil y sencilla, entendiéndose por Simetría de una figura a las posibilidades de hacerla coincidir consigo mismo moviéndola sin deformarle por medio de rotación y reflexión. Comenzaremos estudiando la operación binaria y sus características, analizaremos las funciones: Identidad, Inyectiva, Sobreyectiva, Composición de Funciones y la Función Inversa. Luego pasaremos a revisar Grupos y sus axiomas, analizar el ejemplo del grupo de simetrías, nos daremos cuenta que dentro de un grupo es posible encontrar un grupo más pequeño, así por ejemplo el grupo de rotaciones del triángulo es parte del grupo de las simetrías del triángulo. Con este ejemplo nos sugiere el concepto de Subgrupo y estaremos en capacidad de entender un grupo cuyos elementos son permutaciones. Avanzando con nuestro análisis veremos el Isomorfismo con lo que entenderemos que dos grupos son Isomorfos si tienen la misma estructura algebraica y únicamente difieren en sus elementos. Habiendo entendido el tema anterior, pasaremos a demostrar el Teorema de Cayley que nos dice "que todo grupo es Isomorfo a un grupo de permutaciones".

Por último analizaremos Isometrías que es una aplicación más amplia de este singular movimiento de las diferentes figuras geométricas.

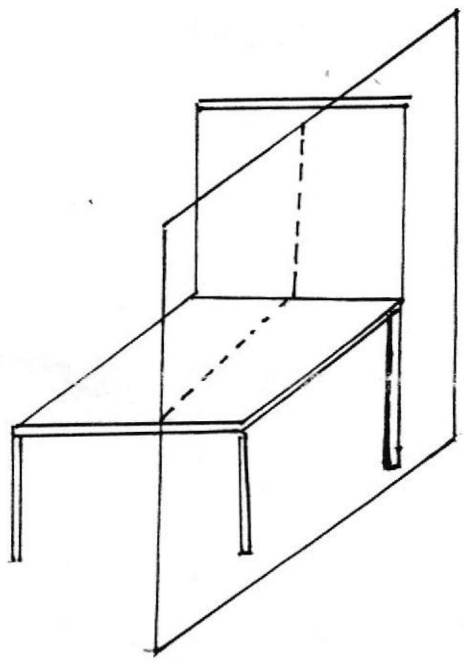
CAPITULO I

1. INTRODUCCION A LA SIMETRIA.-

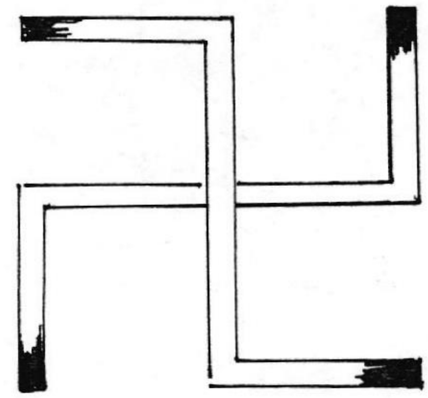
La palabra simetría proviene del griego symmetros que significa mensurado, adecuado. La simetría en esencia es la manera de mover las figuras de modo que sigan pareciendo las mismas. Por el momento damos esta definición y luego con las herramientas del Capítulo II estaremos en capacidad de profundizar en el Capítulo IV.

1.1. <u>Clases de Simetría</u>.-

1.1.1. Simetría Bilateral.- La figura humana es aproximadamente simétrica respecto de una recta vertical. La silla de la figura es simétrica respecto a un plano bisector que pasa por el asiento y el espaldar.



1.1.2. Simetría Rotacional.- La rotación es el giro del cuerpo alrededor de un eje, el eje de rotación. Ejemplos: el símbolo de la Isla de Mann, tres piernas corriendo, o la evástica, poseen simetría rotacional.



1.1.3. Simetría de traslación.- La traslación es un corrimiento simple y en línea recta. Como por ejemplo, la traslación de un tramo de vía de fecrrocarril en uno o más durmientes a lo largo de un eje longitudinal denominado eje de traslación o de deslizamiento.

T

————>————————>————————>————————>————————

T´

————<————————<————————<————————<————————

T traslación a la derecha una distancia igual. T´ una traslación a la izquierda igual distancia.

1.2.2. Simetría identidad.- Es la representación invariada del objeto sobre sí mismo. Toda figura de forma constante posee esta clase de simetría.

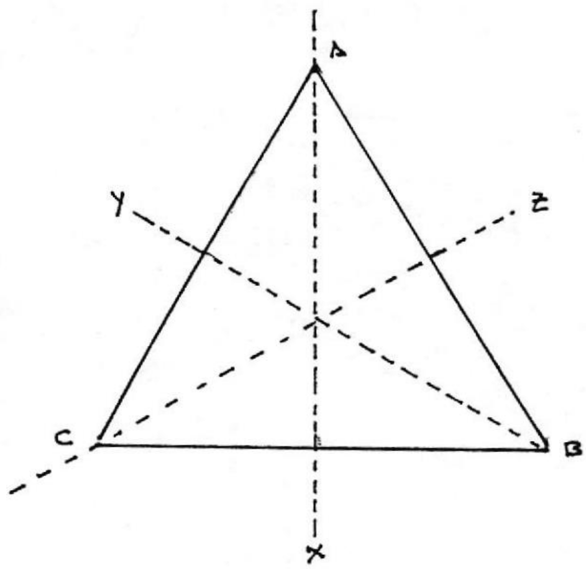
Una figura puede ser simétrica respecto de varias rectas simultáneamente o combinar las simetrías bilateral y rotacional. Por ejemplo, un cuadrado es bilateralmente simétrico respecto de sus diagonales y respecto de las rectas que, pasando por el centro, son paralelas a los lados, también puede ser rotado 90° con respecto a un eje que pasa por la intersección de sus diagonales.

El conjunto de simetrías de una figura con su multiplicación es un ejemplo de una estructura algebraica a la que se denomina grupo, para esto necesitamos formular los conceptos de grupo, operación binaria, etc.

Cada figura tiene un grupo de simetrías, por ejemplo la figura humana tiene dos simetrías: La identidad (I) y la reflexión (r) respecto de una recta universal. La tabla de multiplicar es

*	I	r
I	I	r
r	r	I

El triángulo equilátero posee seis operaciones de simetría. (Este gráfico está en la siguiente página).



- La identidad (I), que dejan los puntos de la figura en el mismo lugar.

- Rotaciones: w rota con respecto al eje que pasa por la intersección de sus alturas en sentido de agujas del reloj 120°

  v rota con respecto al eje que pasa por la intersección de sus alturas en sentido de agujas del reloj 240°

- Reflexiones: x respecto a la recta X $\begin{array}{ccc} & A & \\ C & & B \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & A & \\ B & & C \end{array}$

  y respecto a la recta Y $\begin{array}{ccc} & A & \\ C & & B \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & C & \\ A & & B \end{array}$

  z respecto a la recta Z $\begin{array}{ccc} & A & \\ C & & B \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & B & \\ C & & A \end{array}$

El conjunto de simetrías de este triángulo K = I, W, V, X, Y, Z es cerrado conservando la operación (composición de funciones).

Ud. se preguntará ¿qué es cerrado?. Para aclarar ésta y todas las demás preguntas, procigamos con el Capítulo II que nos dará los conceptos básicos que manejaremos luego en el Capítulo IV.

CAPITULO II

2. <u>FUNCION</u>, <u>GRUPO</u>, <u>SUBGRUPO</u> y <u>PERMUTACION</u>

2.1. <u>Operación binaria como función</u>

2.1.1. Definición.- Una operación binaria es una función que asigna a cada par ordenado de elementos de conjunto, algún elemento del conjunto.

f: SxS -> S

S = {a,b}

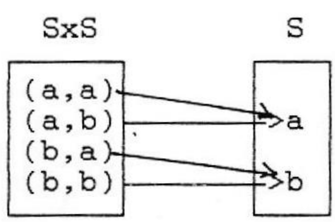


Tabla de multiplicar

f	a	b
a	a	b
b	a	b

Este ejemplo es una de las tantas operaciones binarias que podemos definir.

Una operación binaria de un conjunto S puede cumplir con las siguientes características:

1) Conmutativa: Si y solo si $a*b = b*a$ $\forall a,b \in S$
2) Asociativa: Si y solo si $a*(b*c)=(a*b)*c$ $\forall a,b,c \in S$
3) Existe el Neutro: $a*e = e*a = a$ $\exists e \in S; \forall a \in S$
4) Existe el Inverso: $a*a' = a'*a = e$ $\forall a \in S$ $\exists a' \in S$

Necesitaremos también la siguiente definición

Definición

Si S es un grupo finito, entonces el **orden |S|** de S es el número de elementos en S.

Ahora, para entender mejor desarrollaremos algunos ejemplos:

Problema 1

Sea S un conjunto con un elemento 2, 3 y n elementos. Cuántas operaciones diferentes se puede definir en S?

Solución:

a) S = {a}

   a*a = a   Una sola operación binaria

b) S = {a,b} n=2, el número de operaciones es: hay 4 elementos en SxS, |SxS| = 2 x 2 = 4, y para cada elemento (a,b) de SxS tiene 2 posibilidades, entonces $2^4 = 16$

c) S = {a,b,c} n=3, el número de operaciones es: hay 9 elementos en SxS, |SxS| = 3 x 3 = 9, entonces $3^9 = 19683$

d) S = (a,b,...,n}, |SxS| = nxn = n^2

$$\overbrace{nxnxn \ldots n}^{n^2} \quad \text{entonces } n^{(n^2)}$$

Problema 2

Sea Q el conjunto de los número racionales diferentes de cero, explicar por qué la división (denotada por ÷) es una operación binaria en Q

$Q^* = Q - \{o\}$ donde $\neg(x=o \lor z=o)$

Si $w/x \in Q$ y $y/z \in Q$ $\neg(W=0 \lor y=0)$ w, x, y, z son enteros

Ahora $w/x \div y/z = wz/xy \in Q^*$ $\neg(W \cdot Z=0)$

Por lo tanto, la división es una aplicación de $Q \times Q \to Q$

2.2. <u>**Función**</u>.- Si a cada elemento de un conjunto A de partida se le hace corresponder un único elemento del conjunto B de llegada, se dice que el conjunto de estos pares ordenados así construidos es una función (o aplicación) de A en B y se denota por

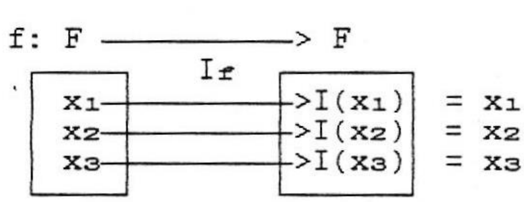
$$f: A \to B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{f} B$$

2.2.1. Clases de funciones.-

2.2.1.1. Función Identidad.-

Definición: $f: F \to F$ $\forall x \in F$; $I_f(x) = x$

Una aplicación de $F \to F$ que hace corresponder a todo x de F el mismo elemento x y se designa I_f



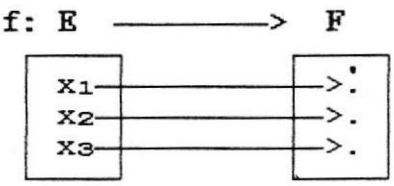
2.2.1.2. Función Inyectiva.-

Definición: $f: E \to F$ $\forall x_1, x_2 \in Dmf$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

$$ó \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Una aplicación es inyectiva si dos elementos diferentes del conjunto de partida, tienen siempre imágenes distintas en el conjunto de llegada.



EJEMPLO

Probar que f es inyectiva

f: $x \rightarrow y = 2x-1$

$f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$

$2x_1 = 2x_2$

y llega $x_1 = x_2$

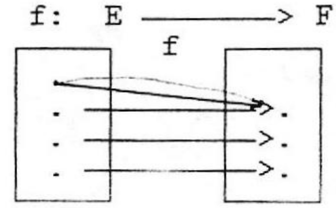
por lo tanto f es Inyectiva

2.2.1.3. Función Sobreyectiva.-

Definición: f: $E \rightarrow F$

Es una aplicación de un conjunto E sobre un conjunto F, cuando todo elemento de F es imagen de por lo menos un elemento x de E.

También se llama aplicación sobre $\forall y \in F \ \exists x \in E$, tal que $f(x) = y$ es decir Rang F = E



EJEMPLO:

$F = \{1,-1\}$, $f: R-\{o\} \to F$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

x es positivo implica $|x| = x$ entonces $y = x/x = 1$. Si x es negativo $|x| = -x \Rightarrow y = x/-x = -1$. f es sobreyectiva del conjunto de los reales no nulos sobre $F = \{1,-1\}$

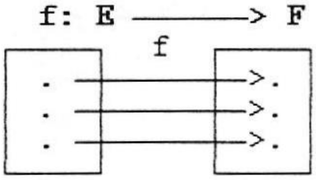
2.2.1.4. Función Biyectiva.-

Definición: Se dice que una aplicación $f:E \to F$ es biyectiva si a la vez es inyectiva y sobreyectiva.

Si f es una biyección de E en F, cada elemento y de F es la imagen de un elemento único x de E.

$\forall y \in F$, $!x \in E$, tal que $y = f(x)$

f: E ——> F



EJEMPLO:

La aplicación $f: N \to N^*=N-\{o\}$ es una biyección

$x \to x+1$

$\forall x_1 x_2 \in N$

$f(x_1) = x_1+1 = f(x_2) = x_2+1$

$x_1 + 1 = x_2 + 1$

$x_1 = x_2$, f es inyectiva

$\forall y \in N-\{o\}$

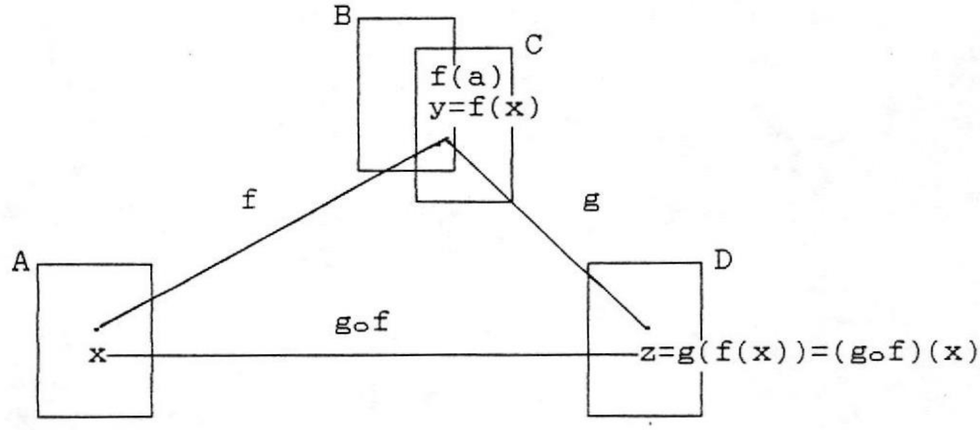
$\equiv x=y-1$

$f(x)=f(y-1)$

$f(x)=(y-1)+1$

$f(x)=y$ f es sobreyectiva

2.2.1.5. Composición de funciones



Definición. Dadas las aplicaciones

$$f: A \to B \quad y \quad g: C \to D$$

tales que $f(A) \subseteq C$, el conjunto de parejas ordenadas

$\{(x,z):/x \in A \text{ y } z= g(f(x))\}$

es una función, llamada compuesta de g con f, y se designa por $g \circ f: A \to D$. Una condición necesaria para que la composición de funciones $g \circ f(x)$ exista es que el

$Rgf \subseteq Dmg$

EJEMPLO:

Si $A=B=C=D=R$ $f(x)=A \to B$; $g(x) = C \to D$

$f(x) = x^2$

$g(x)= \text{Cos } x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \text{Cos } (x^2)$

$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(\text{Cos } x) = (\text{Cos } x)^2$

Como podemos notar la operación no es en general conmutativa, es decir que

$$f \circ g \neq g \circ f$$

2.2.1.6. Función Inversa.-

Dada una función f: A->B = {(x,y)∈AxB/y=f(x)}

Definiremos f^{-1}: B->A = {(y,x)∈BxA/(x,y)∈f},

f^{-1} es una relación de B->A, ya que es un Subconjunto del producto cartesiano BxA, esto es, $f^{-1} \subseteq BxA$ pero no es necesariamente una función. Sin embargo, si la función es biyectiva, entonces f^{-1} es una función de B sobre A y recibe el nombre de función inversa. Con la característica de que

$f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$

2.3. <u>Grupo</u>.-

Definiremos grupo como una estructura que consta de un conjunto G, con una operación que posee elemento neutro y donde todo elemento tiene inverso.

2.3.1. Definición.- Un grupo (G,*) es un conjunto no vacío de elementos G, junto con una operación binaria * en G que satisface los siguientes axiomas:

1) La operación binaria * es asociativa

2) ∃e∈G ∀x∈G, tal que e*x = x*e = x
   (Este elemento es elemento identidad para * en G).

3) ∀a∈G, ∃a´∈G tal que a´*a = a*a´ = e
   (el elemento a´ es el inverso de a). Bajo la operación *.

Para entender mejor la definición y los axiomas analizaremos algunos ejemplos de Grupos que serán de utilidad para el estudio que estamos efectuando.

Ejemplo 1

El conjunto de todos los Enteros no negativos (incluyendo el 0) con la operación +

Tiene el elemento identidad 0, pero no tiene el inverso para 2, luego podemos decir que no es un grupo.

Con esto podemos concluir que todos conjuntos no siempre son grupos; para que sea grupo es necesario que la operación defina y cumpla con los axiomas enunciados.

Problema 2

Sea S el conjunto de los enteros pares. Demostrar que S con la adición de enteros es un Grupo.

Sea $a = 2a_1$, $b = 2b_1$ dos elementos cualesquiera de S

1) Operación binaria

$a+b = 2(a_1+b_1)$ es un elemento único de S.

2) Existe el elemento neutro

$a*e = e*a = 0$; $0 \in S$ $\exists e \in S$

$e = 2*0$

$e=0$ ya que

$0 = 2*0$ y

$0+a = a+0 = a$ $\forall a \in S$

$0 = 2*a_1$

$2a_1+2*0 = 2a_1 = a$

$2*0+2a_1 = 2a_1 = a$

3) Existe el elemento inverso

$\forall a=2a \; \exists a'=-2a^1 \in S$ tal que

$2a_1+(-2a_1) = 2*0 = 0$

Problema 3

Dados el conjunto {0,1,2} construir la tabla de multiplicar (denotaremos así a una operación binaria correspondiente al grupo).

Sea m un entero positivo fijo. Cuando m = 3

Si m = 3 la tabla de multiplicar es

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Existe el elemento neutro que es el 0.

Existe el inverso de cada elemento, por ejemplo, el inverso de 1 es el 2, y del 2 es el 1, y es asociativa (verifique el lector).

Con el conjunto {0,1,2,3} construir la tabla de multiplicar

Si m = 4 la tabla de multiplicar es

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Existe el elemento neutro que es el 0.

Existe el inverso de cada elemento, por ejemplo, el inverso de 1 es el 3, el inverso de 2 es 2 y de 3 es 1, además es asociativa (verifique el lector).

Como observará las datos de las tablas definen una operación binaria sobre un conjunto que satisface la definición de grupo.

2.3.2. Grupos Cíclicos.-

2.3.2.1. Definición: Los Grupos que se generan a partir de un solo elemento se llaman <u>cíclicos</u>; entonces G es cíclico si podemos encontrar un elemento $a \in G$ tal que

$$G = \langle a \rangle = \{a^n / n \in Z\} \text{ en donde } a^n = \overbrace{a*a*\ldots*a}^{n \text{ veces}}$$

Por lo tanto a es un generador de G; y el grupo $G = \langle a \rangle$ es cíclico.

Por convexión adoptaremos $a^o = e$

$$a^{-1} = a'$$

2.3.3. Grupo Abeliano.-

2.3.3.1. Definición: Un grupo G es abeliano si su operación binaria es conmutativa.

Propiedad elemental de los Grupos Cíclicos:

"Todo Grupo cíclico es abeliano"

Demostración:

Sea G un Grupo Cíclico y sea a un generador de G, tal que

$$G = \langle a \rangle = \{a^n / n \in Z\}$$

Si g_1 y g_2 son dos elementos cualesquiera de G, existen enteros r y s tales que $g_1 = a^r$ y $g_2 = a^s$

$\Rightarrow g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1$

de modo que G es abeliano.

Ejemplos

G = (z,+) es un Grupo Cíclico?. Si es así obtenga los generadores (z,+) = <1> = {...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

<-1> = {...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

a = generador de los Enteros

n = números enteros

a = 1

$a^n = 1^0 = 0$

$1^1 = 1$

$1^2 = 1+1 = 2$

$(1)^{-1} = -1$

$(1)^{-2} = ((1)^{-1})^2 = -1 + -1 = -2$

Entonces (Z,+) es un Grupo Cíclico con dos generadores, 1 y -1.

2.4. Subgrupos.-

Si encontramos que un subconjunto de G forma un grupo más pequeño dentro de otro G, esto es un ejemplo de subgrupo. Además es importante anotar que todo subconjunto de un grupo no es un subgrupo.

2.4.1. Definición: Si H es un subconjunto de un grupo G cerrado bajo la operación de grupo de G y si H es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces H es un subgrupo de G. Denotaremos por $H \leq G$ o $G \geq H$ el hecho de que H es un subgrupo de G, y $H<G$ o $G>H$ significará que $H \leq G$, pero $H \neq G$.

Criterio de subgrupo que debemos tomar encuenta para verificar que es un subgrupo:

Un conjunto H de un grupo G es subgrupo de G si y sólo si

1 H es cerrado bajo la operación binaria de G.

2 la identidad e de G está en H;

3 para todos los $a \in H$ es cierto que $a^{-1} \in H$ también.

Más adelante daremos un criterio más compacto.

Ejemplos:

Determinar si el subconjunto de números reales es subgrupo bajo la suma del Grupo C de los números complejos bajo la suma

1) Cerrada bajo la operación binaria de R

$\forall a,b \in R \quad a+b = c \quad c \in R$

$z_1 = a+i0$

$z_2 = b+i0$

$z_1+z_2 = (a+b)+i(0)$ por lo que $Z_1+Z_2 \in R$

2) La identidad e de G está en R

$e \in R \quad \forall a \in R$ tal que $\equiv e \in R$

$e = 0+i0$ tal que $\forall z=a+i0$

$e+a = a+e = a$

3) $\forall z \in R \quad \exists z' \in R$

$z = a+i0 \quad \exists z'=-a+i0$

$z+z' = z'+z = e = 0+i0$

Problema 1

Muéstrese que si H y K son subgrupos de un grupo abeliano G, entonces $J = \{h \cdot k \ / h \in H \text{ y } k \in K\}$ es subgrupo de G

Sean $J = \{h \cdot k \ / h \in H \text{ y } k \in K\}$, entonces se sabe que $h*k = k*h$ porque es abeliano y como G es un Grupo, la operación es asociativa, esto es

Asociativa: $h_1*(h_2*k_1*k_2) = (h_1*h_2*k_1)*k_2$

$\forall \ h_1, h_2, k_1, k_2 \in G$

El neutro está en J, esto es $e \in \{(h \cdot k) \ / h*k \in J\}$ ya que e es el elemento neutro del Grupo G

=> $e \in H$ porque H es subgrupo de G

=> $e \in K$ porque K es subgrupo de G

por lo que

$e*e = e \in J$

$\forall e \in J$, el inverso está en J porque

$$
\begin{aligned}
& a \in J \\
& a = h * k \\
& h \in H \text{ y } k \in K \\
& \exists h^{-1} \in H \text{ porque H es subgrupo} \\
& \exists k^{-1} \in K \text{ porque K es subgrupo} \\
& \text{esto es } h^{-1} * k^{-1} \in J \\
& (h*k) * (h^{-1}*k^{-1}) = e \\
& h * [k*(h^{-1}*k^{-1})] = e \\
& h * (h^{-1}*k^{-1}) * k = e \\
& (h*h^{-1}) * (k^{-1}*k) = e \\
& \qquad e * e = e \\
& \qquad\quad e = e
\end{aligned}
$$

Por lo tanto J es subgrupo de G.

Nos dedicaremos al estudio de grupos cuyos elementos son permutaciones.

2.5. Permutación

f es una permutación de A <=> f: A -> A, f es biyectiva.

Ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$
\sigma: A \longrightarrow A
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \hline\end{array}
\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}
\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ \hline\end{array}
$$

Lo que observamos en el gráfico podemos denotar de la siguiente manera:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ otro ejemplo } \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema.- La composición de permutaciones es otra permutación, ésto es, probaremos que la composición de permutaciones es una operación binaria en el conjunto de permutaciones, y la denominamos como la multiplicación de permutaciones.

Demostración

$a,b \in G \Rightarrow a*b \in G$

W,V son permutaciones de Ω => W*V es una permutación

$W: A \to A$	$V: A \to A$	=>	$W*V: A \to A$
W es biyectiva	V es biyectiva		W*V es biyectiva

W*V es inyectiva

queremos demostrar que $(a_1)WV = a_2WV \Rightarrow a_1 = a_2$

partiendo de $(a_1W)V = (a_2W)V$ V es inyectiva

$\Rightarrow a_1W = a_2W$ W es inyectiva

y finalmente

$\Rightarrow a_1 = a_2$

W*V es sobreyectiva

$\forall a \in A$, ya que V sobre, $\exists a' \in A$ tal que $(a')V = a$

como W es sobre A, $a'' \in A$ tal que $a' = a''W$

$a = a'v = (a''W)V = (a'')WV$ ahora $\forall a \in A \; \exists a'' \in A$

$a(a'')WV = a$

=> W*V es una permutación

Teorema

Sea $A \neq \Phi$

$S_A = \{ \bigcup_{i=1}^{n} G/G_i$ es una permutación $A\} \Rightarrow (S_a, \cdot)$ es un Grupo

Demostración

Sean σ, τ, U permutaciones, por lo tanto son funciones uno a uno y sobre de A en A.

1) Demostraremos que la multiplicación (composición) es asociativa $\forall a \in A$

   $a[(\sigma\tau)u] = [a(\sigma\tau)]u = [(a\sigma)\tau]u = (a\sigma)(\tau u) = a[\sigma(\tau u)]$

   $\Rightarrow (\sigma\tau)u$ y $\sigma(\tau u)$ llevan toda $a \in A$ al mismo elemento $[(a\sigma)\tau]u$.

   Por tanto son la misma permutación y la composición es asociativa

   Con esto probamos que la composición de funciones es ASOCIATIVA.

2) Demostraremos que existe en neutro para la operación. La permutación I tal que $aI=a$ $\forall a \in a$; I es una permutación y actúa como elemento neutro ya que $\forall$ permutación $\sigma I = I\sigma = \sigma$

3) Demostraremos que existe el elemento inverso. Para una permutación σ existe σ^{-1}; ya que si σ esta última es una permutación, entonces es un función biyectiva, y por lo tanto existe su inversa σ^{-1} tal que $\sigma^{-1} \cdot \sigma = \sigma \cdot \sigma^{-1} = I$

Con esto hemos demostrado que es un Grupo de Permutaciones.

Si $A = \{1,2,3,..,n\}$ denominaremos $S_n = \{\sigma/\sigma$ es una permutación de A en A.

Existe un tipo particular de las permutaciones que es llamada ciclo.

2.5.1. Ciclo.-

Definición: Una permutación σ de un conjunto A es un ciclo de longitud n si existen $a_1, a_2, ... a_n \in A$ tales que

$a_1\sigma = a_2 \quad a_2\sigma = a_3, \ ... \ a_{n-1}\sigma = a_n \quad a_n\sigma = a_1$

y $x\sigma = x \quad \forall x \in A$ tal que $\neg(x \in \{a_1, a_2, \ ... \ a_n\})$

Escribimos $\sigma = (a_1, a_2, \ ... \ a_n)$

Ejemplos

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Un ciclo es $(1, 3, 5, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

da lo mismo denotar como

$(1, 3, 5, 4) = (3, 5, 4, 1)$ ó $(5, 4, 1, 3)$ ó $(4, 1, 3, 5)$

Los ciclos son tipos particulares de permutaciones.

Problema 1

Expresar $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

como producto de ciclos disjuntos.

Solución:

$1\alpha=2$, $2\alpha=4$, $4\alpha=8$, $8\alpha=1$. $3\alpha=6$, $6\alpha=12$, $12\alpha=9$, $9\alpha=3$, $5\alpha=10$, $10\alpha=5$, $7\alpha=14$, $14\alpha=13$, $13\alpha=11$, $11\alpha=7$. Luego

$$\alpha = (1,2,4,8)(3,6,12,9)(7,14,13,11)$$

2.5.2. Transposición

Definición: Un Ciclo de longitud 2 es una transposición

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2)\ (a_1, a_3)\ \ldots\ (a_1, a_n)$

Nótese que:

1) Las transposiciones tiene la particularidad son ciclos de longitud 2. Dado un elemento de un grupo A,
2) Los ciclos se pueden descomponer en transposiciones.
3) La composición de un ciclo consigo mismo da la identidad.
4) Si $a^r = e$ r es el número que me indica las veces que se debe operar el elemento consigo mismo hasta lograr la identidad.
5) Las permutaciones de un conjunto finito es par, si puedo expresar como el producto de un número par de transposiciones y de lo contrario es impar.

2.5.3. Permutaciones Pares e Impares

Definición: Una permutación de un conjunto finito es par o impar si se pueda expresar como el producto de un número par de transposiciones o como el producto de un número impar de transposiciones respectivamente.

2.5.4. Grupos Alternantes

Para $n \geq 2$ el número de permutaciones pares en Sn es igual al número de permutaciones impares: es decir, Sn se descompone en el conjunto de permutaciones pares e impares constituye tener un orden de $(n!)/2$. Para mostrar, sea An el conjunto de permutaciones pares en Sn y sea Bn el conjunto de permutaciones impares para $n \geq 2$.

Para demostrar que An y Bn tienen el mismo número de elementos es necesario definir una función uno a uno de An sobre Bn.

Sea τ cualquier transposición fija en Sn que existe porque $n \geq 2$, podemos suponer que $\tau=(1,2)$ definiremos la función h_τ

$$h\tau : An \to Bn$$

$$\sigma h\tau = \tau\sigma = (1,2)\sigma$$

esto es, $\sigma \in An$ va a dar a $(1,2)\sigma$ bajo $h\tau$. σ es par, la permutación $(1,2)\sigma$ aparece como el producto de (1 + número par) es decir un número impar de transposiciones, así que, $(1,2)\sigma$ está en Bn. Si para σ y $u \in An$ sucede que $\sigma h\tau = uh\tau$ orden $(1,2)\sigma = (1,2)u$, y como Sn es grupo, podemos cancelar, tenemos $\sigma = u$. Así $h\tau$ es una función uno a uno.

Por último $\tau = (1,2) = \tau^{-1}$

δ es una permutación impar $\tau^{-1}\delta$ es par

Así que si $\delta \in Bn$ entonces

$$\tau^{-1}\delta \in An$$

$$(\tau^{-1}\delta)h\tau = \tau(\tau^{-1}\delta) = \delta$$

$$\forall \delta \in Bn \ \exists \tau^{-1}\delta \in An - \tau^{-1}\delta \ h_{\tau} = \delta$$

Por consiguiente, $h\tau$ es sobre Bn, y se concluye que el número de elementos en An es el mismo que el número de elementos de Bn puesto que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos.

Teorema.- Si $n \geq 2$, la colección de todas las permutaciones pares de {1, 2, 3, ..., n} forman un subgrupo de orden $n!/2$ del grupo simétrico Sn.

Definición.- El subgrupo de Sn que consta de las permutaciones pares de n letras es el grupo alternante An de n letras.
Tanto Sn como An son grupos muy importantes.

Ejemplos:

Problema 1
Demostrar que An = Sn implica que n=1, la demostración es por contradicción ya que $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$, es decir vamos a suponer que $n \neq 1$ y llegar a que $A_n \neq S_n$, como $n \neq 1$ tenemos que $n>1$, A tiene al menos otro número que llamaremos 2, Sn debe contener una permutación que intercambie el 1 con

el 2 y deje intactos los otros elementos $\tau=(1,2)$ $\tau \notin An$, puesto que τ es una permutación impar y, por consiguiente $n \neq 1 \Rightarrow An \neq Sn$.

Problema 2

Calcular $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^{-1}, si

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Para encontrar α^{-1} nótese que $x(\alpha\alpha^{-1}) = x$, que por consiguiente α^{-1} debe mandar $x\alpha$ a x. Ahora determinaremos cuál es el elemento x que es enviado a 1. $6\alpha = 1$, y por tanto tenemos que $1\alpha^{-1}=6$, después $1\alpha=2$, $2\alpha^{-1}=1$.

Procediendo de esta manera obtenemos:

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPITULO III

3. ISOMORFISMO y TEOREMA DE CAYLEY

3.1. Isomorfismo.-

3.1.1. Definición.- Un isomorfismo entre un grupo G y un grupo G´ es una función f uno a uno, que lleva G sobre G´ y tal que para todas las x y y en G

$$(xy)f = (x)f \cdot (y)f$$

Los grupos G y G´ son isomorfos. La notación usual es $G \approx G'$.

Teorema.- Si F: G->G´ es un isomorfismo entre G y G´ y e es la identidad de G, entonces ef es la identidad en G´. Además

$$a^{-1}f = (af)^{-1} \qquad \forall a \in G$$

Para abreviar, un isomorfismo lleva la identidad a la identidad y los inversos a los inversos.

Demostración:

Sea $x' \in G'$. Como f es sobre, existe $x \in G$ tal que $xf = x'$ =>

$$x' = xf = (ex)f = (ef)(xf) = (ef)x'$$

de manera análoga

$$x' = xf = (xe)f = (xf)(ef) = x'(ef)$$

Así, para cada $x' \in G'$ tenemos

$$(ef)x' = x' = x'(ef)$$

ef es la identidad de G´

además que para $a \in G$

$$ef = (a^{-1}a)f = (a^{-1}f)(af)$$

$$ef = (a \cdot a^{-1})f = (af)(a^{-1}f)$$

$$a^{-1}f = (af)^{-1}$$

¿Como mostrar que dos grupos son isomorfos?

La demostración se ha dividido en los siguientes pasos:

<u>Paso 1</u> Definir la función f què da el isomorfismo de G y G´. Esto es indicar cual sería xf en G´ $\forall x \in G$

<u>Paso 2</u> Mostrar que f es sobre G´

<u>Paso 3</u> Mostrar que f es una función uno a uno

<u>Paso 4</u> Mostrar que $(xy)f = (xf)(yf)$ para todas las $x, y \in G$

Se calculan ambos lados de la ecuación y se observa si son iguales.

Ejemplos:

Problema 1

Sea F: G->G´ un isomorfismo entre el grupo G y un grupo G´. Muéstrese que la transformación f^{-1}: G´->G definida para $x'f^{-1}=x$ por $xf=x'$ donde $x' \in G'$, es una función bien definida y es un isomorfismo entre G y G´.

Si G es isomorfo a G´; f:G´->G

La función f^{-1}: G´->G está definida por $x'f^{-1}=x$ si $xf=x'$

a) Si f: G->G es una isometría sabemos que f es biyectiva y por lo tanto f^{-1} también es biyectiva.

b) Probaremos que f^{-1} conservan las operaciones, esto es $(x'y')f^{-1} = x'f^{-1} \cdot y'f^{-1}$ sabemos

$x'f^{-1} = x$ ya que $xf = x'$

$y'f^{-1} = y$ ya que $yf = y'$

por lo tanto $x'f^{-1} \cdot y'f^{-1} = xy$ (1)

además $(xy)f = xf \cdot yf$

$(xy)f = x'y'$

$(xy)f \cdot f^{-1} = (x'y')f^{-1}$

$x \cdot y = (x'y')f^{-1}$ (2)

De (1) y (2) tenemos

$(x'y')f^{-1} = xy = x'f^{-1}y'f^{-1}$

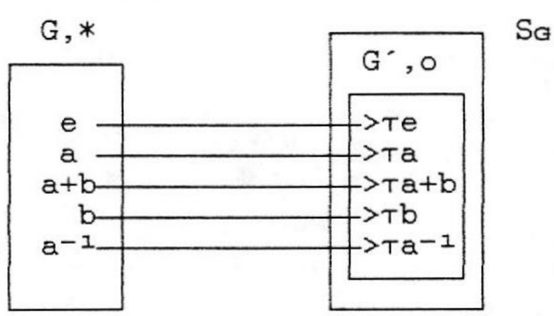
que es lo que queriamos demostrar.

Teniendo ya conocimientos sobre ISOMORFISMO, estamos en capacidad de hacer la demostración del Teorema de Cayley.

3.2. <u>Teorema de Cayley</u>.-

Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones

S_G: {de permutaciones de G en G}



Demostración:

Para la demostración hemos dividido en tres pasos:

<u>Primer Paso</u>

Nuestra primera tarea es encontrar un conjunto G´ de permutaciones que sea candidato a formar un grupo isomorfo a G. Piénsese en G simplemente como conjunto y sea S_G el grupo de todas las permutaciones de G. (Nótese que en el caso finito si G tiene n elementos, S_G tiene n! elementos. Así, en general, es claro que S_G es demasiado grande para ser isomorfo a G.) Definamos cierto subconjunto de S_G. Para $a \in G$ sea f_a la transformación de G en G dada por

$$xf_a = xa$$

para $x \in G$. (Podemos pensar en f_a como multiplicación derecha por a.) Si $xf_a = yf_a$ entonces $xa = ya$ y por ser operación binaria y con las leyes de cancelación obtenemos $x=y$. Así f_a es una función uno a uno. Además, si $y \in G$, entonces

$$(ya^{-1})f_a = (ya^{-1})a = y,$$

así, f_a lleva a G sobre G. Entonces como f_a: G->G es uno a uno y sobre G, f_a es una permutación de G, esto es, $f_a \in S_G$. Sea

$$G' = \{f_a | a \in G\}.$$

<u>Segundo Paso</u>

Afirmamos que G' es un subgrupo de S_G. Debemos mostrar que G' es cerrado bajo la multiplicación de permutaciones, que contiene la permutación identidad y que contiene el inverso de cada uno de sus elementos. En primer lugar afirmamos que

$$f_af_b = f_{ab}.$$

Para mostrar que estas funciones son iguales, debemos mostrar que actúan igual sobre toda $x \in G$. Ahora

$$x(f_a f_b) = (xf_a)f_b = (xa)f_b = (xa)b = x(ab) = xf_{ab}.$$

Así, $f_a f_b = f_{ab}$ y por tanto, G´ es cerrado bajo la multiplicacion. Es claro que para toda $x \in G$,

$$xf_e = xe = x,$$

donde e es el elemento identidad de G, de modo que f_e es la permutación identidad I de S_G y está en G´. Como $f_a f_b = f_{ab}$ tenemos

$$f_a f_{a^{-1}} = f_{aa^{-1}} = f_e.$$

De aquí que

$$(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}},$$

de modo que $(f_a)^{-1} \in G'$. Entonces, G´ es un subgrupo de S_G.

Tercer paso

Falta probar que G es isomorfo al grupo G´ descrito. Defínase $\phi: G \to G'$ por

$$a\phi = f_a$$

para $a \in G$. Si $a\phi = b\phi$ entonces f_a y f_b deben ser la misma permutación de G. En particular,

$$ef_a = ef_b,$$

así que ea = eb y a = b. Por tanto, ϕ es uno a uno. Es inmediato que ϕ es sobre G´ por la definición de G´. Finalmente, $(ab)\phi = f_{ab}$ mientras que

$$(a\phi)(b\phi) = f_a f_b.$$

Pero ya se dijo que f_{ab} y $f_a f_b$ son la misma permutación de G. Así,

$$(ab)\phi = (a\phi)(b\phi).$$

CAPITULO IV

4. GRUPOS DE ISOMETRIA

4.1. Isometría de la recta.-

Sea S_R: {Es el conjunto de todas las biyecciones de R en R}.

Sea I_R el conjunto de todos los elementos de S_R que preservan las distancias. Los elementos de este conjunto se llamarán isometrías de R. Más explícitamente

$\sigma \in S_R$ Se denomina isometría si y solo si

$$d(a,b) = d(a\sigma,b\sigma)$$

Para todo par de elementos $a,b \in R$

Para las demostraciones que vamos a hacer a continuación utilizaremos el siguiente lema:

Lema 4.1.

Sea $(G,\cdot)$ un grupo. Entonces un subconjunto H de G es un subgrupo de G sii

(1) $H \neq \Phi$ y

(2) si $a,b \in H$, entonces $ab^{-1} \in H$

Demostración: Si H verifica estas condiciones, entonces H es un grupo respecto a la operación binaria. En efecto, si $H \neq \Phi$, entonces existe un $\alpha \in H$. Luego $aa^{-1} = 1 \in H$. Además, si $b \in H$, entonces $1b^{-1} \in H$. Por consiguiente $a,b \in H$ implica que $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$. La asociatividd se verifica en H porque se verifica en general para todos los elementos de G. Así, pues, $\cdot$ es una operación binaria asociativa en H, $1 \in H$, y el inverso de cada elemento de H es un elemento de H. Por tanto $(H, \cdot)$ es un subgrupo.

Utilizaremos el lema para demostrar $(I_R, \cdot)$ es un subgrupo.

1) $I_R \neq \Phi$ porque existe I_a para I que es una isometría.
2) Supongamos $\sigma \in I_R$ ENTONCES $\sigma^{-1} \in I(R)$ hay que partir que I_R es un subgrupo.

Nosotros podemos asegurar que el punto 3 se cumple por lo siguiente I, σ^{-1} es cerrado $a\sigma^{-1} \in R$.

Sea $a, b \in R$ $d(a\sigma^{-1}, b\sigma^{-1}) = d((a\sigma^{-1})\sigma, (b\sigma^{-1})\sigma = d(a,b)$ por ser σ isometría entonces se cumple que:

$$d(a,b) = d(a\sigma^{-1}, b\sigma^{-1})$$

Con esto demostramos que $\sigma^{-1} \in I_R$ (grupo de Isometrías)

Por todo esto podemos decir que I(R) es subgrupo de S_R.

Ejemplos de algunas Isometrías

Problema 1

σ: R->R

$x\sigma = x+2$ y $d(a,b) = |a-b|$

Demostrar que σ es una Isometría

$$d(\sigma x, \sigma y) = d(x,y)$$

$$d(x+2,y+2) = |x+2-(y+2)|$$
$$= |x+2-y-2|$$
$$d(\sigma x,\sigma y) = |x-y|$$
$$d(\sigma x,\sigma y) = d(x,y)$$

$\Rightarrow$ σ es una Isometría

Problema 2 $\sigma: R \to R$

$x\sigma = x$

Demostrar que σ es una Isometría

$$d(\sigma x,\sigma y) = d(x,y)$$
$$d(-x,-y) = |-x-(-y)|$$
$$= |-x+y| = |x-y|$$
$$= d(x,y)$$

$\Rightarrow$ σ es una Isometría

Problema 3

Demostrar que el siguiente conjunto de aplicación dotado de la composición con operación binaria es un grupo

$\tau_a: R^2 \to R^2$ tal que

$(xy)\tau a = (x+a,\ y+a)$ donde $(x,y) \in R^2$, $a \in R$

Demostración τ_a es una permutación de R^2

τ_a es una biyección de $R^2 \to R^2$

Si $(x,y)\tau_a = (x_1,y_1)\tau_a$ entonces $(x,y) = (x_1,y_1)$. Si $(x,y) \in R^2$ Existe $(x-a,y-a) \in R^2$ y $(x-a,y-a)\tau_a = (x,y)$

Donde τ_a es una aplicación inyectiva y sobreyectiva y por tanto, τ_a es una permutación de R^2 $\tau^{-a} = \tau_a^{-1}$

El conjunto de todas las τ_a no es vacío y $\tau_a \tau_b^{-1} = \tau_a \tau_{-b} = \tau$

porque $(x,y)\tau_a\tau^{-1}_b = (x,y)\tau_a\tau_{-b} = (x+a,y+a)\tau_{-b} = (x+a-b,y+a-b) = (x,y)\tau_{a-b}$

Así, el conjunto de todas las τa es un subgrupo de S_{R^2} y por consiguiente es un grupo

4.2. <u>Isometría del Plano</u>.-

Sea E el conjunto $R^2 = R*R$, si:

$$A = (x_A,y_A)$$

$$B = (x_B,y_B)$$

Son dos elementos de E. Se define la distancia entre A y B.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2}$$

$\delta\in S_E$, se denomina <u>Isometría</u>

$$\text{Si } \forall a,b\in E;\ d(a,b) = d(\sigma(a),\sigma(b))$$

Teorema.- El conjunto I de todas las isometrías de E forman un subgrupo de S_E.

Demostración

$I\neq\Phi$ porque las aplicaciones identidad es una Isometría. Solamente necesitamos demostrar que $\sigma\tau^{-1}\in I$ siempre $\sigma,\tau\in I$. Tome en cuenta el efecto de τ^{-1} como $\tau\in S_E$, existen para cada par de puntos $A,B\in E$, $A',B'\in E$ tales que $A'\tau=A$, $B'\tau=B$ entonces $d(A',B') = d(A'\tau,B'\tau) = d(A,B)$
ya que τ es una isometría. Ahora bien $A\tau^{-1}=A'$, $B\tau^{-1}=B'$ de donde: $d(A\tau^{-1},B\tau^{-1}) = d(A,B)$

y τ^{-1} es una isometría. En consecuencia

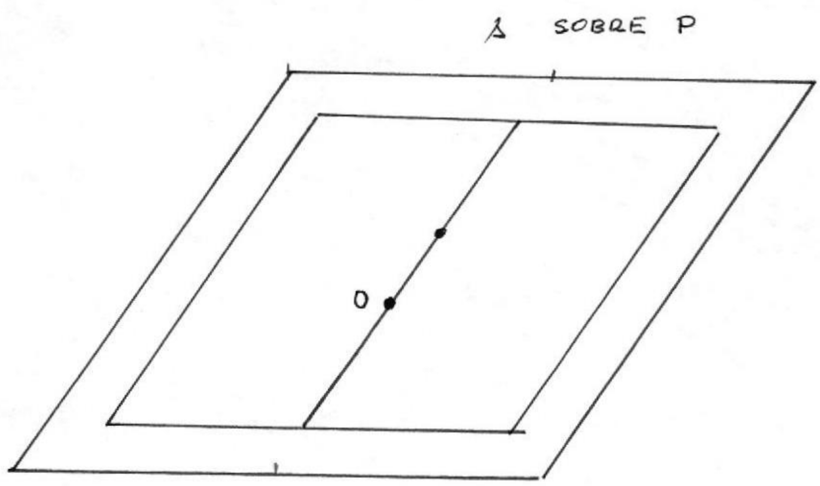
$$d(A\sigma\tau^{-1},B\sigma\tau^{-1}) = d(A\sigma,B\sigma) = d(A,B)$$

y así $\sigma\tau^{-1}\in I$.

Por tanto I es un subgrupo de S_E.

Refiriéndonos a las Isometrías del Plano, encontramos tres isometrías del Plano.

4.2.1. Rotación alrededor de un punto.- Sea O un punto cualquiera de S. Rótese S un ángulo α alrededor de O. Entonces la isometría inducida por este movimiento de S se denomina rotación de un ángulo α alrededor de O.

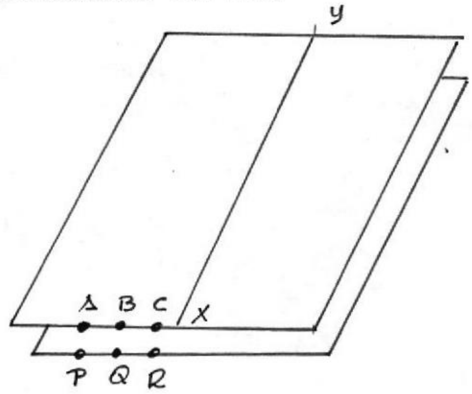


Una rotación de un ángulo α alrededor del origen en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj es la aplicación δ_α definida por

$$(x,y)\delta_\alpha = (x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha,\ x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha)$$

Para cada α, δ_α es una isometría y $(\delta_\alpha)^{-1} = \delta_{-\alpha}$.

4.2.2. Reflexión en una recta.- Escójase una recta de E y hágase girar S sobre esta recta hasta que caiga nuevamente sobre E. La isometría que se obtiene se denomina reflexión en XY.



Se define una reflexión en OX como la aplicación σ_y donde

$$(x,y)\sigma_y = (x,-y)$$

Se ve de inmediato que esto es una isometría y es fácil demostrar que $(\sigma_y)^{-1} = \sigma_y$.

Puesto que I es el producto de dos reflexiones, la llamaremos reflexión.

4.2.3. Traslación.- Escójase una recta XY, sea α una isometría correspondiente a un movimiento de S tal que $X\alpha Y\alpha$, la recta que pasa por $X\alpha$ y $Y\alpha$, sea paralela a XY. Entonces, α es una traslación.

Una traslación $\tau_{a,b}$ es la aplicación definida por

$$(x,y)\tau_{a,b} = (x+a,y+b)$$

Se puede demostrar que para cada a, b, $\tau_{a,b}$ es una isometría y que $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{-a,-b}$.

Problema 1

Usaremos el lema 4.1.

Demostrar que $\tau_{a,b}$ es una isometría y que $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{-a,-b}$.

Solución:

Primero debemos demostrar que $\tau_{a,b} \in S_E$, de modo que tenemos que demostrar que es una aplicación inyectiva y sobreyectiva. $(x,y)\tau_{a,b} = (x',y')\tau_{a,b}$ claramente implica que $(x,y) = (x',y')$. Si $(x,y) \in E$, entonces $(x-a,y-b)\tau_{a,b} = (x,y)$ y, por tanto, $\tau_{a,b}$ es sobreyectiva. Luego $\tau_{a,b} \in S_E$. ¿Es $\tau_{a,b}$ una isometría? Si $A=(x_A,y_A)$ y $B=(x_B,y_B)$ entonces

$$d(A,B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = d(A\tau_{a,b},B\tau_{a,b})$$

y $\tau_{a,b}$ es una isometría. $(x,y)\tau_{a,b}\tau_{-a,-b}=(x+a,y+b)\tau_{-a,-b} = (x,y)$. De donde, $\tau_{a,b}\tau_{-a,-b}=i$. Análogamente, $\tau_{-a,-b}\tau_{a,b} = i$ y, por tanto, $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{-a,-b}$.

Ejemplo 1

Demostrar que $\tau_{a,b}$ es una isometría y que $(\tau_{a,b})^{-1}=\tau_{-a,-b}$

Solución:

Primero debemos demostrar que $\tau_{a,b} \in S_E$, de modo que tenemos que demostrar que es una aplicación inyectiva y sobreyectiva. $(x,y)\tau_{a,b} = (x',y')\tau_{a,b}$ claramente implica que $(x,y) = (x',y')$. Si $(x,y) \in E$, entonces $(x-a, y-b)\tau_{a,b} = (x,y)$ y, por tanto, $\tau_{a,b}$ es sobreyectiva. Luego $\tau_{a,b} \in S_E$. ¿Es $\tau_{a,b}$ una isometría? Si $A=(x_A,y_A)$ y $B=(x_B,y_B)$ entonces

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2} = d(A\tau_{a,b},B\tau_{a,b})$$

y $\tau_{a,b}$ es una isometría. $(x,y)\tau_{a,b}\tau_{-a,-b}=(x+a,y+b)\tau_{-a,-b}=(x,y)$. De donde, $\tau_{a,b}\tau_{-a,-b}=i$. Análogamente, $\tau_{-a,-b}\tau_{a,b}=i$ y, por tanto, $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{-a,-b}$.

Ejemplo 2

Demostrar que σ_y es un isometría y que $\sigma_y^2=i$.

Solución:

Si $A=(x_A,y_A)$ y $B = (x_B,y_B)$,

$$d(A\sigma_y,B\sigma_y) = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (-y_A-(-y_B))_2} = d(A,B)$$

y, por tanto, σ_y preserva las distancias. Es obvio que $(x,y)\sigma_y = (x',y')\sigma_y$ implica que $(x,y)=(x',y')$. Además, es claro que σ_y es sobreyectiva porque $(x,-y)\sigma_y=(x,y)$. Por tanto σ_y es una isometría. $(x,y)\sigma_y\sigma_y = (x,-y)\sigma_y = (x,y)$. Así, pues, $\sigma_y^2=i$.

4.3. <u>Grupos de simetría</u>

Simetría de una figura geométrica S es una función biyectiva de uno a uno de sus puntos tal que S es subconjunto de R^2 entonces es:

$\forall\ S \subset R^2$

f es simetría $\iff$ $f: R^2 \to R^2$

f es biyección

$\forall\ x\in S\ ;\ f(x)\in S$

es decir la imagen de S mediante f es S

$\approx f(S) = S$

Teorema:

Sea S un subconjunto cualquiera del plano euclidiano. El conjunto, denominado por I_S, de todas las $\sigma \in I$ tales que, (i) $s \in S$ implica que $s_\sigma \in S$, y (ii) $t_\sigma \in S$ implica que $t \in S$, forma un subgrupo de I, llamado grupo de simetrías de S. (Un elemento de I_S, por consiguiente, se caracteriza por aplicar elementos de S, y solamente elementos de S, en S).

Demostración:

Usaremos el lema 4.1.

$I_S \neq \Phi$, ya que la aplicación idéntica del plano euclidiano en sí mismo pertenece a I_S. Si σ, $\tau \in I_S$, ¿es $\sigma\tau^{-1} \in I_S$? Primero demostraremos que $\tau^{-1} \in I_S$. Si $s \in S$, $(s_{\tau^{-1}})_\tau = s \in S$. Puesto que $\tau \in I_S$, (ii) implica que $s_{\tau^{-1}} \in S$. Así, τ^{-1} verifica (i), i.e. $s \in S$ implica que $s_{\tau^{-1}} \in S$.

Para demostrar que τ^{-1} también verifica (ii), sea $t_{\tau^{-1}} \in S$. Entonces $(t_{\tau^{-1}})_\tau = t \in S$, puesto que τ verifica (i). Por tanto τ^{-1} verifica (ii), y $\tau^{-1} \in I_S$.

Ahora demostraremos que $\sigma\tau^{-1} \in I_S$. Sea $s \in S$. Entonces $s_\sigma \in S$ y $s\sigma\tau^{-1} \in S$, ya que σ y τ^{-1} son elementos de I_S. Por consiguiente $\sigma\tau^{-1}$ verifica (i). Si $t\sigma\tau^{-1} \in S$, puesto que τ^{-1} verifica (ii), tenemos que $t_\sigma \in S$. Más aún, como $\sigma \in I_S$, (ii) implica que $t \in S$ y, consecuentemente, $\sigma\tau^{-1}$ también verifica (ii). Por tanto $\sigma\tau^{-1} \in I_S$ y I_S forma un subgrupo de I.

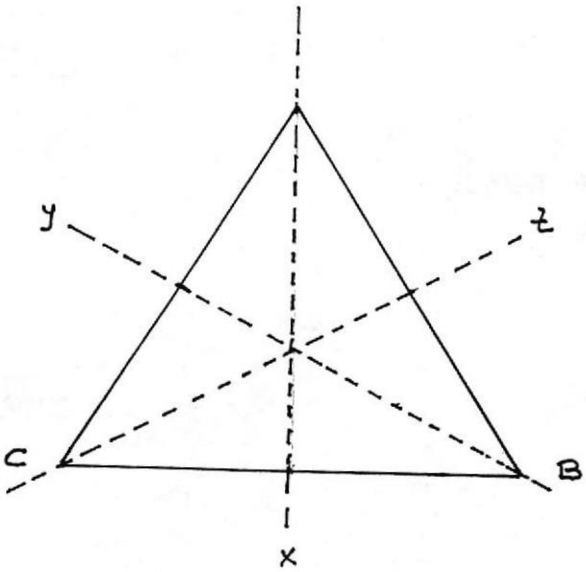
Ejemplo 1

Encontrar todos los elementos de S_1 y S_2 y preparar la tabla de multiplicar de estos grupos.

Si contiene un solo elemento $I = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{c|c} & I \\ \hline I & \boxed{I} \end{array}$ es la tabla de multiplicar de S_1. Hay dos elementos en S_2 ; $u = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ y $\beta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ la tabla de multiplicar de S_2 es

	I	β
I	I	β
β	β	I

Del triángulo equilátero que enunciamos en el Capítulo I que posee 6 operaciones de simetría obtenemos las tablas que indicamos a continuación.



Con estos conceptos podemos multiplicar o componer las simetrías ya referidas anteriormente.

Recordemos que: El conjunto de las simetrías del triángulo son K = I, W, V, X, Y, Z, las mismas que son cerradas con respecto a la composición de funciones (G es cerrado bajo la operación * <=> ∀a,b ∈ G => a*b ∈ G). Con este antecedente podemos formar la siguiente tabla:

Ejemplo 2

*	I	w	v	x	y	z
I	I	w	v	x	y	z
w	w	v	I	z	x	y
v	v	I	w	y	z	x
x	x	y	z	I	w	v
y	y	z	x	v	I	w
z	z	x	y	w	v	I

Demostración:

Vamos a demostrar que la siguiente tabla forma un grupo.

1. e*x = x*e = x

   I*x = x*I = x

2. ∀a∈G, ∃a´∈G tal que

   a = I

   a´= I

   a = W

   a´= V

   a = V

   a´= W

   a = X

   a´= X

Se deja al lector la propiedad asociativa (¿cuántas operaciones debe hacerse?)

Con esta demostración hemos probado que la tabla anterior forma un grupo.

Volviendo a las simetrías de un triángulo y escogemos la Fig. I, W, V, observamos que este grupo de permutaciones forma un grupo más pequeño dentro del otro que es un ejemplo de <u>Subgrupo</u>. Detengámonos para estudiar.

Ejemplo 3

Demostrar que la tabla forma un subgrupo

*	I	w	v	x	y	z
I	I	w	v	x	y	z
w	w	v	I	z	x	y
v	v	I	w	y	z	x
x	x	y	z	I	w	v
y	y	z	x	v	I	w
z	z	x	y	w	v	I

Demostración

$e*x = x*e = x$

$I*W = W*I = W$

$\forall a \in G \; \exists a' \in G$ tal que

$a*a' = a'*a = e$

$$\left.\begin{array}{l} V*W = e \\ W*V = e \end{array}\right. \Rightarrow V = W^{-1}$$

$V*W = I$

$V*(W*W^{-1}) = I*W^{-1}$

$V*I = W^{-1}$

$V = W^{-1}$

Con esta demostración hemos probado que es un Subgrupo {I,W,V}.

Este grupo contenido en otro mayor es un ejemplo de subgrupo.

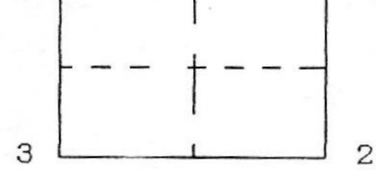
No todo conjunto de esta tabla es un subgrupo, por ejemplo si probaramos con un conjunto M = x, y, z ; éste no es un subgrupo ya que x,y=W ; y W no es elemento de M.

Ejemplo 4

Simetrías de un cuadrado

A cada una de estas formas en que el cuadrado puede de nuevo colocarse en su sitio, le llamamos un movimiento rígido o una simetría del cuadrado.

Es claro que cada simetría efectúa una permutación del conjunto {1,2,3,4} que representa los vértices. Usaremos la rotación de las permutaciones para describir a las simetrías. Veremos, que no todas las permutaciones de este conjunto representan simetrías del cuadrado.



Incluiremos entre las simetrías la permutación idéntica, es decir el movimiento rígido que deja invariante el cuadrado.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Es claro que al girar el cuadrado en un ángulo recto en dirección contraria a la de las agujas del reloj y alrededor de su centro nos da un simetría.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

vemos también que las rotaciones, contrarias a la de las agujas del relos en dos o tres ángulos rectos son también simétricas.

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Observamos además que las rotaciones en dirección de las agujas del relos en uno, dos o tres ángulos rectos tiene los mismos efectos de R_3, R_2 y R_1 respectivamente.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D- = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Las ocho operaciones I, R_1, R_2, H, V, D+, D- forman el conjunto de simetrías del cuadrado. La composición o producto es una operación.

	I	R_1	R_2	R_3	H	V	D+	D-
I	I	R_1	R_2	R_3	H	V	D+	D-
R_1	R_1	R_2	R_3	I	D+	D-	V	H
R_2	R_2	R_3	I	R_1	V	H	D-	D+
R_3	R_3	I	R_1	R_2	D-	D+	H	V
H	H	D-	V	D+	I	R_2	R_3	R_1
V	V	D+	H	D-	R_2	I	R_1	R_3
D+	D+	H	D-	V	R_1	R_3	I	R_2
D-	D-	V	D+	H	R_3	R_1	R_2	I

En esta tabla observamos la existencia del neutro I y cada elemento tiene su inverso.

El conjunto de simetrías forma un grupo llamado GRUPO DE SIMETRIAS DEL CUADRADO.

CONCLUSIONES

Félix Klein dio una famosa denifición de una geometría en su discurso de aceptación de una cátedra en la Universidad de Erlangen "Una Geometría es el estudio de aquellas propiedades de un espacio (conjunto) que permanecen invariantes bajo algún subgrupo fijo de todo el grupo de transformaciones". Esta definición la hemos aplicado en la geometría euclidiana.

Remembrando esta famosa cita, remarquemos los puntos que consideramos deben recordarse luego de leer este trabajo monográfico:

1. El objetivo principal de este trabajo es dar un inicio en el estudio de la simetría y luego continúen en estudios más avanzados de este interesante tema.
2. El teorema de Cayley es uno de los teoremas clásicos de la teoría de grupos que nos permite demostrar que cualquier grupo es estructuralmente el mismo con algún grupo de permutaciones.
3. Hemos hablado de conjuntos en donde se define el concepto de distancia entre elementos. Si consideramos $d(x,y)$ como la distancia entre los dos elementos x, y entonces podemos hablar acerca de transformaciones que conservan la distancia.
4. El subconjunto de transformaciones que preserva la distancia es un subgrupo de isometrías.

5. Las rotaciones alrededor de un punto fijo forma un subgrupo de las isometrías.
6. La reflexión en el plano es una función que transforma cada punto de una determinada recta en sí mismo y a todo punto fuera de la recta.
7. La simetría, en esencia, es la manera de mover las figuras, de modo que sigan pareciendo las mismas.

APENDICE

f,g	Función
T	Traslación a la derecha
T´	Traslación a la izquierda
r	Reflexión
I,W,δ,τ,U,B	Permutación
I,W,V,X,Y,Z	Simetrías
A,B,S	Conjuntos
Q	Números racionales
R	Números reales
Z	Números enteros
a	Elemento de G
G	Grupo
<a>	Generador
C	Números complejos
δ	Isometría
S_R	Conjunto de todas las biyecciones de un subconjunto R en R
G´	$\{\tau_a/a\in G\}$
∈	Pertenencia
Φ	Conjunto vacío
Z+	Enteros positivos
Q+	Racionales positivos
R+	Reales positivos
*, a*b	Operación binaria
(G,*)	Grupo
e	Elemento Identidad

a'	Elemento Inverso
$\|S\|$	Orden de S
$\subseteq$	Inclusión
$B\subseteq A$	B subconjunto de A
$H\leq G$	Inclusión de subgrupos
$f:E\to F$	Transformación de E en F
$f:A\to A$	Permutación
I	Transformación Identidad
A_n	Grupo Alternante
$G\approx G'$	Grupos Isomorfos
S_R	Conjunto de permutaciones de R en R.

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, Tom M., Calculus, Reverté S.A., España (1979)

BAUHSLAG B., CHANDLER B., Teoría de Grupos, Mc Graw-Hill, Colombia (1972)

FRALEIGH, John., Algebra Abstracta, Addiso-Wesley, Iberoamericana S.A., EE.UU. (1988)

STEWART, Lan, Conceptos de Matemáticas Modernas, Alianza Editorial S.A., Madrid (1977)