ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT"

MONOGRAFIA

Previa la obtención del Título de:
MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA
APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por:
JORGE ANIBAL IZA

Guayaquil - Ecuador

1994

AGRADECIMIENTO

Agradezco a todas las Instituciones que hicieron posible la realización del Curso de Post-grado, y en especial al mentalizador Master Guadencio Zurita.

Master Gaudencio Zurita

Director de Monografía

D E C L A R A C I O N   E X P R E S A

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

. . . .

Jorge Aníbal Iza

INDICE

INTRODUCCION

En los últimos años, el Algebra Lineal se ha desarrollado y ha incrementado el conocimiento en profesionales de diferentes áreas relacionadas con la Matemática.
El Algebra Lineal ha desarrollado dos elementos de la Matemática como son: la abstracción y la aplicación.

La presente monografía tiene como objetivo fundamental el de comprender el Proceso de Ortogonalización, "inventado" o "creado" por dos hombres de ciencia, ellos fueron: Jorge Pederson Gram (1850-1916) que estuvo interesado en la ciencia metrológica y Erhardt Schmidt (1876-1959) un matemático alemán.

Esta monografía en su primera parte presenta varias definiciones que son necesaria para comprender el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt. Seguidamente, se expone el significado del Proceso de Ortogonalización y finalmente, se realizan ejemplos ilustrativos en R^3, un ejemplo con polinomios de grado menor o igual a dos, un ejemplo con un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas que se espera sean comprendidos por toda persona interesada en el presente trabajo.

CAPITULO I

PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT

A continuación se dan varias definiciones que son fundamentales para la comprensión del tema central de este trabajo.

DEFINICION 1.- Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de un espacio vectorial V y $, c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes reales, el vector v en V es una **combinación lineal** de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si y solamente si $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$

DEFINICION 2.- Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$, vectores de un espacio vectorial V; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores **linealmente independientes** en V, si y solamente si la única solución a la igualdad;

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0_v$ es $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 \in R$

Si n vectores no son linealmente independientes en V, se dice que son linealmente dependientes .

DEFINICION 3.- Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de un espacio vectorial V se dice que **generan** a V, si y solamente si todo vector $v \in V$ puede expresarse como una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

DEFINICION 4.- Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en un espacio vectorial V es una **base** para V, si y solamente si

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes en V y generan V.

DEFINICION 5.- Sea V un espacio vectorial y sean v_1, v_2 y $v_3 \in V$, se dice que V es un espacio vectorial con producto interno si y solamente si tiene definida una función $\phi: V \times V \dashrightarrow R$ llamado **producto interno** tal que $\phi(v_1,v_2) = \langle v_1,v_2 \rangle \in R$ cumple las siguientes propiedades:

i) $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1,v_3 \rangle + \langle v_2,v_3 \rangle + v_1,v_2,v_3 \in V$

ii) $\langle \alpha\, v_1,v_2 \rangle = \alpha \langle v_1,v_2 \rangle$, v $\alpha \in R$, v $v_1,v_2 \in V$

iii) $\langle v_1,v_2 \rangle = \langle v_2,v_1 \rangle$, v $v_1,v_2 \in V$ y

iv) $\langle v_1,v_1 \rangle \geq 0$, v $v_1 \neq 0_v$

v) $\langle v_1,v_1 \rangle = 0 \equiv v_1 = 0_v$

DEFINICION 6.- Si $v \in R^n$ entonces la norma de v, denotado por $\|v\|$ está dada por $\|v\| = +\sqrt{\langle v,v \rangle}$

DEFINICION 7.- El conjunto de vectores $B = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ es un **conjunto ortonormal** si:

$\langle u_i,u_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, y, (1)

$\langle u_i,u_i \rangle = 1$ (2)

Si solamente se satisface (1), el conjunto se denomina ortogonal.

DEFINICION 8.- Un vector en un espacio con producto interno es **unitario** si y solamente si $\|v\| = 1$

TEOREMA.- Si V es un espacio vectorial cualquiera con producto interno, el vector $v / \|v\|$ es un vector unitario.

Prueba:

$$\text{Sea } u = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| \;;\; \frac{1}{\| v \|}\|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

un vector como u, se denomina **unitario**, es decir con norma igual a 1.

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

El proceso de Gram-Schmidt permite convertir cualquier conjunto de vectores linealmente independientes v_1, $v_2,\dots,v_n$ en un conjunto de vectores ortogonales (u ortonormales).

Empezamos el proceso convirtiendo los vectores de una base de un espacio vectorial V, $B_1 = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ a una base $B'1 = \{ v'_1,v'_2,\dots,v'_n\}$ ortogonal para, finalmente llegar a una base ortonormal $B_2 = \{u_1,u_2,\dots,u_n\}$.

$$\text{Sea } v'_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = u_1 = v'_1,$$ esto hace a u_1 unitario

Hagamos ahora: $v'_2 = v_2 - \langle v_2,u_1\rangle u_1$; debemos probar que v'_2 es ortogonal a u_1.

$$\begin{aligned}
\langle u_1,v_2\rangle &= \langle u_1,v_2\rangle - \langle\langle v_2,u_1\rangle u_1\rangle \\
&= \langle u_1,v_2\rangle - \langle u_1,\langle v_2,u_1\rangle u_1\rangle \\
&= \langle u_1,v_2\rangle - \langle v_2,u_1\rangle \langle u_1,u_1\rangle \\
&= \langle u_1,v_1\rangle - \langle v_2,u_1\rangle = 0
\end{aligned}$$

Entonces u_1 y v'_2 son ortogonales

Definimos: $$u_2 = \frac{v'_2}{\| v'_2 \|}$$, esto hace a u_2 unitario

construyamos v'_3 igual a:

$$v'_3 = v_3 - \langle v_3,u_1\rangle\, u_1 - \langle v_3,u_2\rangle\, u_2$$

Probamos que v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2 .

$$\langle u_1,v'_3\rangle = \langle u_1,v_2\rangle - \langle u_1,v_3\rangle \langle u_1,u_1\rangle - \langle v_2,u_2 \rangle \langle u_1,u_2\rangle$$

$$= \langle u_1,v_3\rangle - \langle u_1,v_3\rangle = 0$$

Entonces hemos pobrado que: v'_3 es ortogonal a u_1.

Ahora, probamos que v'_3 es ortogonal a u_2.

$$\langle u_2,v'_3\rangle = \langle u_2,v_3\rangle - \langle v_3,u_1\rangle \langle u_1,u_2\rangle - \langle v_3,u_2\rangle \langle u_1,u_2\rangle$$

$$= \langle u_2,v_3\rangle - \langle v_3,u_2\rangle = 0$$

Hagamos: $$u_3 = \frac{v'_3}{\| v'_3 \|}$$, luego u_3 es unitario

A continuación calculamos v'_4:

$$v'_4 = v_4 - \langle v_4,u_1\rangle\, u_1 - \langle v_4,u_2\rangle\, u_2 - \langle v_4,u_3\rangle\, u_3$$

$$\vdots$$

$$v'_k = v_k - \langle v_k,u_2\rangle\, u_1 - \langle v_k,u_2\rangle\, u_2 - \ldots - \langle v_k,u_i\rangle\, u_i -$$

$$\ldots - \langle v_k,u_{k-1}\rangle\, u_{k-1}$$

Hacemos ahora: $$u_k = \frac{v'_k}{\| v'_k \|}$$

Resumiendo el proceso de Gram-Schimidt podemos decir que si se tiene la expresión:

$v'_i = v_i - \langle v_i,u_1\rangle u_1 - \ldots - \langle v_i,u_{i-1}\rangle u_{i-1}$, entoncespara cada i del subespacio H generado por los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ originales, H es también generado por $v'_1,v'_2,\ldots,v'_n$.

Los vectores $u_i = \dfrac{v'_i}{\|v'_i\|}$ que se obtienen son ortonormales porque son ortogonales entre sí y su norma es 1 y también generan H .

Presentamos un ejemplo en el que se construye una base ortonormal para R^3 utilizando el Proceso de Gram-Schmidt.
A partir de los vectores :
$v_1 = (1\ 0\ 1)$, $v_2 = (1\ 0\ -1)$ y $v_3 = (0,\ 3,\ 4)$

Comprobaremos primero si los vectores dados son linealmente independientes, para ello tomamos la combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3 y la igualamos al cero de R^3 , esto es $(0\ \ 0\ \ 0)$.

$c_1\ v_1 + c_2\ v_2 + c_3\ v_3 = 0_v$

$c_1\ (1\ 0\ 1) + c_2\ (1\ 0\ -\ 1) + c_3\ (0\ 3\ 4) = (0\ 0\ 0)$

$\Longrightarrow (c_1\ 0\ c_1) + (c_2\ 0\ -c_2) + (0\ 3c_3\ 4c_3) = (0\ 0\ 0)$

Obtenemos un sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas (c_1, c_2 y c_3) que es un conjunto de predicados: p_1, p_2 y p_3 :

$p_1\ (c_1,\ c_2,\ c_3) : c_1 + c_2 \quad = 0$

$p_2\ (c_1,\ c_2,\ c_3) : \quad + 3\ c_3 = 0$

$p_3\ (c_1,\ c_2,\ c_3) : c_1 - c2 + 4c_3 = 0$

Encontramos el conjunto solución de $p_1 \hat{}\ p_2 \hat{}\ p_3$ esto es

$Ap_1(c_1,c_2,c_3)\hat{}\ p_2(c_1,c_2,c_3)\hat{}\ p3(c_1,c_2,c_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow Ap_1\ (c_1,c_2,c_3)\hat{}p_2\ (c_1,c_2,c_3)\hat{}p_3\ (c_1,c_2,c_3) =$

$\{(0\ 0\ 0)\} \subset R^3$

Hemos probado que los vectores son linealmente independientes.

Ahora debemos probar que los vectores v_1,v_2,v_3 generan a R^3 , es decir que cualquier vector $(a,b,c)\ \in R^3$ puede expresarse como una combinación lineal de v_1,v_2,v_3.

$c_1\ (1\ 0\ 1) + c_2\ (1\ 0\ -1) + c_3\ (0\ 3\ 4) = (a\ b\ c)$

$(c_1\ 0\ c_1) + (c_2\ 0\ -c_2) + (0\ 3c_3\ 4c_3) = (a\ b\ c)$

Obtenemos el conjunto de predicados p_1, p_2 y p_3 :

$p_1\ (c_1,\ c_2,\ c_3) : \quad c_1 + c_2 \qquad = a$

$p_2\ (c_1,\ c_2,\ c_3) : \qquad\qquad 3c_3 = b$

$p_3\ (c_1,\ c_2,\ c_3) : \quad c_1 - c_2 + 4c_3 = c$

Encontramos el conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$, esto es $A p_1 (c_1, c_2, c_3) \wedge p_2 (c_1, c_2, c_3) \wedge p_3 (c_1, c_2, c_3)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 1 & -1 & 4 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 4 & c \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 4 & -a+c \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-a+c}{-2} \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-a+c}{-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{c+a}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3a-4b+3c}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3a+4b-3c}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \end{array}\right]$$

$$Ap(c) = \left\{\left(\frac{3a-4b+3c}{6}\right), \left(\frac{3a+4b-3c}{6}\right), \left(\frac{b}{3}\right)\right\}$$

Como hemos probado que los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente independiente y generan a R^3, los vectores dados constituyen una base en R^3.

Partimos de la base:

$B = \{ (1\ 0\ 1),\ (1\ 0\ -1),\ (0\ 3\ 4)\}$

para llegar a la base ortonormal $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ a travez el proceso de Gram-Schmidt.

Definimos v'_1:

$$v'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Encontramos la norma de v_1:

$$\|v_1\| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$v'_1 = \frac{(1\ 0\ 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\quad 0\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = u_1$$

Hagamos; $v'_2 = v_2 - \langle v_2, u1\rangle\, u_1$, para lo cual encontramos previamente $\langle v_2, u_1\rangle$.

$\langle v_2, u_1\rangle = \langle (1\ 0\ -1),\ (1/\sqrt{2}\ 0\ 1/\sqrt{2})\rangle$

$$\langle v_2, u_1\rangle = 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\,(0) + (-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$v'_2 = (1\ 0\ -2) - 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\quad 0\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (1\ 0\ -1)$$

verificamos que v'_1 y v'_2 son ortogonales, entonces efectuamos el producto interno entre v'_1 y v'_2 .

$$\langle v'_1, v'_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ 0\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ 1\quad 0\quad -1 \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Entonces son ortogonales.

$$\text{Hacemos: } u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{(1\ 0\ -1)}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{(1\ 0\ -1)}{\sqrt{2}}$$

Encontramos v'_3:

$v'_3 = v_3 - \langle v_3, u1\rangle\, u_1 - \langle v_3, u_2\rangle\, u_2$, para esto hallamos primero el producto interno entre v_3 y $u1$ y entre v_3 y u_2.

$$\langle v_3, u_1\rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\ (0) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$v'_3 = (0\ 3\ 4) - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (0\ 3\ 4) + (-2\ 0\ -2) + (2\ 0\ -2)$$

$$v'_3 = (0\ 3\ 0)$$

Ahora, comprobamos que v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2

$$\langle v'_3, u_1\rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle v'_3, u_2\rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\ (0) + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Entonces v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2.

Encontramos u_3:

$$u_3 = \frac{v'_3}{\|v'_3\|} = \frac{(0\ 3\ 0)}{\sqrt{9}} = \frac{(0\ 3\ 0)}{3} = (0\ 1\ 0)$$

$u_3 = (0\ 1\ 0)$

Luego, la base ortonormal que hemos obtenido es:

$$B_2 = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}), (0\ 1\ 0)\}$$

Comprobamos ahora que el producto de cualquier par de vectores de B_2 es cero.

$$<u_1, u_2> = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0\ (0) + \frac{1}{\sqrt{2}} (- \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$<u_1, u_3> = \frac{1}{\sqrt{2}} (0) + 0\ (1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (0) = 0$$

$$<u_2, u_3> = \frac{1}{\sqrt{2}} (0) + 0\ (1) + (- \frac{1}{\sqrt{2}}) (0) = 0$$

Entonces hemos comprobado que la base

$B_2 = \{ (\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}), (0 1\ 0)\}$ es ortonormal

También podemos obtener bases ortonormales en el espacio vectorial de los polinomios, como se indica en la siguiente ilustración.

Construya una base ortonormal para el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 en el intervalo [0,1].

Iniciamos con la base estandar $B_1 = \{1, x, x^2\}$

Puesto que P_2 [0,1] es un subconjunto de P_n [0,1] (polinomios de grado menor o igual a n definidos en el intervalo cerrado [0,1]) ya que todo polinomio es continuo y P_n es un espacio vectorial para todo entero n.

Sean p(x) y q(x) dos polinomios, usaremos el producto interno o escalar entre vectores pasa polinomios dado por

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_a^b p(x)\, q(x)\, dx$$

Partiremos de la base canónica : $B_1 = \{1, x, x^2\}$

v'_1 se define:

$$v'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Encontramos la norma de v_1:

$$\|v_1\| = \sqrt{\int_0^1 (1)\,(1)\, dx} = \sqrt{\int_0^1 dx} = \sqrt{X\,\Big|_0^1} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

$$v'_1 = \frac{1}{1} = u_1 = 1$$

Hallamos v'_2:

$v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle$, para lo cual primero hallamos $\langle v_2, u_1\rangle$

$$\langle v_2, u_1\rangle = \int_0^1 (x)\,(1)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$v'_2 = x - \left(\frac{1}{2}\right)(1) = x - \frac{1}{2}$$

verificamos que v'_1 y v'_2 son ortogonales, es decir que el producto interno entre v'_1 y v'_2 sea cero.

$$\langle v'_1, v'_2\rangle = \int_0^1 (1)\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 0 = 0$$

Entonces v'_1 y v'_2 son ortogonales

Ahora encontramos la norma de v'_2

$$\|v'_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx}$$

$$= \sqrt{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{3}\,(2x - 1)$$

A continuación, obtenemos v'_3:

$v'_3 = v'_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2$. Para lo cual calculamos primero los productos internos entre v_3 y u_1 y entre v_3 y u_2.

$$\langle v_3, u_1\rangle = \int_0^1 (x^2)\,(1)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle v_3,\ u_2\rangle = \int_0^1 (x^2)\ (3(2x-1))dx$$

$$= \int_0^1 (x^2)\ (2\sqrt{3}x-\sqrt{3})dx = \int_0^1 (2\sqrt{3}x^3 - \sqrt{3}x^2)dx$$

$$= \frac{(\sqrt{3}\ )\ x^4}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ x^3 \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$v'_3 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}\ (\sqrt{3}(2x-1))}{6} = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}\ x - \sqrt{3})}{6}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x = x^2 - x + \frac{1}{6} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$v'_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

seguidamente comprobamos que v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2

$$\langle v'_3, u_1\rangle = \int_0^1 (\ x^2 - x + \frac{1}{6})\ (1)\ dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \Big|_0^1 = (\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\ ) - 0$$

$$= (\ \frac{2 - 3 + 1}{6}\ ) - 0 = 0$$

$$\langle v'_3,\ u_2\rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})\ (\sqrt{3}\ (2X - 1))$$

$$= \int_0^1 \ (2\ \sqrt{3}\ X^3 - 3\sqrt{3}\ X^2 + \frac{4}{3}\ \sqrt{3}\ x - \frac{\sqrt{3}}{6})\ dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4}x^4 - \frac{3\sqrt{3}}{3}x^3 + \frac{4\sqrt{3}}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - 0$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{6}\right) - 0$$

$$= 0$$

entonces v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2 ahora, calculamos la norma de v'_3

$$\|v'_3\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx}$$

$$= \sqrt{\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{36} \Big|_0^1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{36 - 20 + 30 - 30 + 5}{180}} = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$u^3 = \frac{v'_3}{\|v'_3\|} = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1)$$

$$u_3 = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1)$$

Hemos obtenido entonces la base ortonormal:

$B_2 = \{\ 1,\ \sqrt{3}\,(2x - 1),\ \sqrt{5}\,(\ 6x^2 - 6x + 1)\}$

Para comprobar que B_2 es ortonormal, la norma de cada uno de los vectores u_1 , u_2 y u_3 debe ser uno, y el producto de cualquier par de vectores debe ser cero.

Encontramos las normas:

$$\|u_1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2\, dx} = \sqrt{x\Big|_0^1} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{3}\,(2x-1))^2\, dx} = \sqrt{\int_0^1 3\,(4x^2-4x+1)\, dx}$$

$$= \sqrt{3\left(\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right)\Big|_0^1} = \sqrt{4x^3 - 6x^2 + 3x\Big|_0^1}$$

$$= \sqrt{4(1) - 6(1) + 3(1) - 0} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\|u_3\| = \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{5}\,(6x^2-6x+1))^2\, dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 5\,(36x^4 + 36x^2 + 1 + 12x^2 - 12x)\, dx}$$

$$= \sqrt{5\left(\frac{36x^5}{5} + 12x^3 + x + 4x^3 - 18x^4 - 6x^2\right)\Big|_0^1}$$

$$= \sqrt{5\left[\left(\frac{36}{5} + 12 + 1 + 4 - 18 - 6\right) - 0\right]}$$

$$= \sqrt{5\left(\frac{36}{5} - 7\right)} = \sqrt{5\left(\frac{36}{5} - \frac{35}{5}\right)} = \sqrt{\left(\frac{5}{5}\right)} = 1$$

Ahora comprobamos que el producto interno entre cualquier par de vectores de cero

$$<u_1\, ,\, u_2> = \int_0^1 (1)\,(\sqrt{3}\,(2x-1))dx = \int_0^1 \sqrt{3}\,(2x-1)dx$$

$$= \sqrt{3}\,(x^2 - x\Big|_0^1 = \sqrt{3}\,(1 - 1 - 0) = 0$$

$$<u_1 , u_3> = \int_0^1 (1)\,(\sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1))dx$$

$$= \sqrt{5} \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = \sqrt{5}\,(2x^3 - 3x^2 + x)\Big|_0^1$$

$$= \sqrt{5}\,[(2 - 3 + 1)\ 0\ ] = 0$$

$$<u_1 , u_3> = \int_0^1 [\sqrt{3}(2x-1)]\,[\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)]dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{5}(12x^3 - 18x^2 + 8x - 1)dx$$

$$= \sqrt{5}\,(3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - x)\Big|_0^1 = 0$$

Entonces hemos probado que la base obtenida es ortonormal.

A continuación presentamos un ejemplo de ortogonalidad en el espacio vectorial de las matrices reales M_{nxn} (R) de **n** filas y **n** columnas.

Sean A, B, C, D $\in M_{nxn}$; en este espacio vectorial, $V=M_{nxn}$, se ha definido el siguiente producto interno: $<A,B>=tr<B^tA>$, donde tr(A) es la traza, es decir, la función:

$$\phi(A)=tr(A)=a_{11} + a_{22}+....+a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Probaremos primero que la siguiente es una base ortonormal de V.

$$B_1 = \left\{ \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} \right\}$$

A los elementos de la base les llamaremos matrices: A, B, C y D respectivamente.

Probaremos primero que es una base ortonormal, la norma de cada uno de los vectores en B_1 debe ser 1 y, el producto interno de 2 matrices cualesquiera en B_1 debe ser cero.

Encontramos las normas de cada una de las siguientes matrices:

$$\|A\| = +\sqrt{\langle A,A\rangle} = +\sqrt{tr\langle A^t,A\rangle} = +\sqrt{1+0} = +\sqrt{1} = 1$$

$$\|B\| = +\sqrt{\langle B,B\rangle} = +\sqrt{tr\langle B^t,B\rangle} = +\sqrt{0+1} = +\sqrt{1} = 1$$

$$\|C\| = +\sqrt{\langle C,C\rangle} = +\sqrt{tr\langle C^t,C\rangle} = +\sqrt{+1+0} = +\sqrt{1} = 1$$

$$\|D\| = +\sqrt{\langle D,D\rangle} = +\sqrt{tr\langle D^t,D\rangle} = +\sqrt{+0+1} = +\sqrt{1} = 1$$

Entonces, se ha probado una de las propiedades de conjunto ortonormal, esto es que cada uno de sus componentes es unitario. Comprobamos ahora, la propiedad de ortogonalidad.

Para esto, efectuamos el producto interno entre cualesquier par de matrices.

$$\langle A,B\rangle = tr \langle B^tA\rangle$$

Calculamos B^t y luego el producto con A:

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \langle B^tA\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, obtenemos la traza:

$$tr \langle B^tA\rangle = 0+0 = 0$$

Efectuamos el producto interno entre A y C:

$$\langle A.C\rangle = tr \langle C^tA\rangle$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos C^tA:

$$C^tA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallamos la traza: $tr <C^tA> = 0+0 = 0$

Ahora, calculamos el producto interno entre B y D:

$<B,D> = tr <D^tB>$

$$D^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ===> D^tB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$tr <D^tB> = 0+0 = 0$

A continuación, obtenemos el producto interno entre A y D:

$<A,D> = tr <D^tA>$

$$D^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ===> D^tA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$tr <D^tA> = 0$

Finalmente C y D:

$<C,D> = tr <D^tC>$

$$D^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ===> D^tC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$tr <D^tC> = 0$

Lo cual prueba que B_1 es una base ortonormal y no hemos usado el proceso de ortogonalización de GRAM-SCHMIDT.

A continuación presentamos un ejemplo en el que se tiene un sistema de ecuaciones, se desea construir una base ortonormal para su espacio solución, considerando como un subespacio de R^n.

Construir la base del espacio solución de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, que tenga 2 variables libres, y construir además una base ortogonal utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

Tenemos el siguiente conjunto de predicados:

$p_1 \ (x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$p_2 \ (x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$

$p_3 \ (x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$

Encontramos el conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$, esto es $Ap_1 \ (x_1,x_2,x_3,x_4) \wedge p_2 \ (x_1,x_2,x_3,x_4) \wedge p_3 \ (x_1,x_2,x_3,x_4)$, utilizando la matriz aumentada del sistema y el método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A p_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \hat{\ } p_2 (x_1,x_2,x_3,x_4) \hat{\ } p_3 (x_1,x_2,x_3,x_4) =$

$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, x_1 = - x_3 - x_4, x_2 = 0, x_3, x_4 \in R\} \quad R^4$

Entonces una base para el espacio solución del sistema es:

$B = \{(-1\ 0\ 1\ 0), (-1,0,0,1)$

Encontramos ahora, una base ortonormal para $Ap_1\hat{\ }p_2\hat{\ }p_3$.

Trabajamos con el producto interno estandar en R^n

Sabemos que:

$v_1 = (-1\ 0\ 1\ 0)$

$v_2 = (-1\ 0\ 0\ 1)$

Obtenemos las norma de v_1:

$\|v_1\| = \sqrt{(1 + 0 + 1 + 0)} = \sqrt{2}$

Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1\ 0\ 1\ 0) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\ \ 0\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ 0 \right)$$

$$u_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\ \ 0\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ 0 \right)$$

Encontramos v'_2 :

$v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$, para lo cual obtenemos $\langle v_2, u_1 \rangle$:

$$\langle v_2, u_1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 0 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v'_2 = (-1\ 0\ 0\ 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right)$$

$$= (-1\ 0\ 0\ 1) + \left(\frac{1}{2}\ 0 - \frac{1}{2}\ 0\right) = \left(-\frac{1}{2}\ 0 - \frac{1}{2}\ 1\right)$$

$$v'_2 = \left(-\frac{1}{2}\ 0 - \frac{1}{2}\ 1\right)$$

Ahora comprobamos que v'_2 y u_1 son ortogonales:

$$\langle v'_2, u_1\rangle = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0(0) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\,(0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

Entonces, v'_2 y u_1 son ortogonales.

Encontramos ahora la norma de v'_2:

$$\|v'_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\ 0 - \frac{1}{2}\ 1\right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}\ 0 - \frac{1}{2}\ 1\right)$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\ 0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces, la base ortonormal pedida es :

$$B_2 = \{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right),\quad \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\ 0\ \frac{-1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \}$$

Para comprobar que la base B_2 es ortonormal, debemos encontrar el producto interno entre u_1 y u_2, el mismo que debe ser cero y, luego encontraremos que la norma de u_1 y u_2 debe ser uno.

$$<u_1,u_2> = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 0\ (0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 0\ \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} + 0 = 0$$

Entonces u_1 y u_2 son ortogonales

Ahora encontramos las normas:

$$\|u_1\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{2}{4} + 0 + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$$

Entonces, hemos comprobado que B_2 es una base ortonormal para el espacio solución del sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas siguientes:

$$p_1 \; (x_1,x_2,x_3,x_4) \; : \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$p_2 \; (x_1,x_2,x_3,x_4) \; : \; 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$p_3 \; (x_1,x_2,x_3,x_4) \; : \; 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0.$$

CONCLUSIONES

Este tema de estudio involucra el conocimiento de varias definiciones del Algebra Lineal como combinación lineal,norma de un vector, vector unitario, producto interno, etc., que ayudarán a cualquier estudiante de nivel medio que tenga aspiraciones de llegar a un centro de estudios de educación superior.

En este trabajo se demostró los pasos necesarios para ortogonalizar un conjunto de vectores linealmente independiente, obteniéndose en cada paso del Proceso de Gram-Schmidt el conjunto generador ortogonal que se requiere para el siguiente.

El proceso de Gram-Schmidt es necesario que lo conozca un estudiente de bachillerato ya que esto le permitirá trabajar con varias espacios vectoriales, determinar como está definido el producto interno y pasar de una base cualquiera B_1 a una base ortonormal B_2.

También podrá trabajar, conforme avance en sus estudios de Algebra Lineal, con polinomios y vectores característicos con la ayuda del proceso de Gram-Schmidt.

ANEXO

INDICE DE SIMBOLOS

0_v	Cero Vector
R	Conjunto de los Números Reales
$\|v\|$	Norma del vector v
B_1, B	Base
B'_1	Base Ortogonal
B_2	Base Ortonormal
$M_{nxn}(R)$	Espacio vectorial de las matrices reales de n filas y n columnas.
$\in$	Pertenece a
$\forall$	Para todo
α	Escalar
tr(A)	Traza de la matriz A
B^t	Transpuesta de la matriz B
R^n	Conjunto de todos los n-vectores
<,>	Producto interno
V	Espacio vectorial
v	Vector; elemento de V
===>	Implica o entonces
P_n	Polinomios de grado menor o igual a n
$\sqrt{}$	Raíz cuadrada
p_1	Predicado
$\neq$	Diferente a; no es igual a

BIBLIOGRAFIA

GROSSMAN, S. (1987): ALGEBRA LINEAL, México, segunda edición, Edit. Grupo Editorial Iberoamérica, 475 ps.

LANGE, S. (1976): ALGEBRA LINEAL, Edit. Fondo Educativo Interamericano, México, 1976, 400 ps.

KOLMAN, B. (1981): ALGEBRA LINEAL, Edit. Fondo Educativo Interamericano, 1981, Nueva York, 304 ps.

PERRY,W. (1990): ALGEBRA LINEAL con aplicaciones, México, Edit. MacGraw Hill.