ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE MATEMATICA

POST-GRADO EN EDUCACION MATEMATICA

MONOGRAFIA PREVIA LA OBTENCION DEL TITULO:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

TEMA:

RESOLUCION DE ECUACIONES POLINOMICAS UTILIZANDO PROGRAMACION EN PASCAL

ALUMNO:

SIMON BOLIVAR KUONQUI MERA

DIRECTOR:

ING. LUIS RODRIGUEZ OJEDA

1993 - 1994

GUAYAQUIL - ECUADOR

D E D I C A T O R I A :

A Lupe:

De quien recibí todo el apoyo que una persona pueda desear para llegar con éxito a su meta.

A Christian y Serguei:

Quienes despiertan en mí el gran deseo de ser siempre mejor.

A G R A D E C I M I E N T O :

Quiero hacer llegar mis sinceros agradecimientos a todas las personas e instituciones que de una u otra forma han hecho posible la realización de este Post-grado.

A **FILANBANCO**, por su gran aporte económico en beneficio de la educación del país.

A la **ESPOL**, que con su personal docente altamente calificado, supieron inyectar sus conocimientos con mística de verdaderos **MAESTROS**.

Al **MINISTERIO DE EDUCACION**, Institución gracias a la cual fue posible que este proyecto inicie, se desarrolle y culmine con el exito que todos habíamos deseado.

Quiero hacer un reconocimiento especial al M.C. Gaudencio Zurita, mentalizador y coordinador de este Post-grado, El, supo realizar un trabajo titánico, aceptó y ganó el reto que se había trazado, aunque yo pienso que ese no era su objetivo, ganar el reto, sino el de empezar a transformar la educación en el país, transformación que se la necesita desde hace mucho tiempo pero que no hemos tenido decisión ni apoyo para misión de tanta envergadura.

DECLARACION EXPRESA

La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la **ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL.**

(Reglamento de exámenes y títulos profesionales)

I N D I C E

CAPITULO I

CAPITULO II

INTRODUCCCION

El presente trabajo de investigación monográfica ha sido realizado con el propósito de aportar en algo a la Educación Media en el área de la Matemática y concretamente en la resolución de Ecuaciones Polinómicas.

He dividido este trabajo en dos capítulos: El primero está dedicado estrictamente a la parte algebraica y, el segundo a la aplicación de la Programación en Pascal para hallar las raíces de las ecuaciones polinómicas.

Cada tema tratado será ilustrado con un sencillo ejemplo, para dar así una mejor interpretación del mismo, y de esta forma ir preparando el terreno del capítulo segundo.

Al empezar el segundo capítulo haré previamente una síntesis sobre Lenguaje de Programación y Turbo Pascal. El método de Bairstow para hallar las raíces de polinomios será tratado con mayor atención en vista de que es una aplicación directa de lo revisado en el primer capítulo.

Realizaré una correlación entre la parte algorítmica,la programática y el diagrama de flujo.

Finalmente ilustraré algunas prueba de corridas del programa Bairstow.

Deseo igualmente que este pequeño aporte ayude a descifrar en Ud. cualquier inquietud que haya tenido previamente.

CAPITULO I

FUNCIONES POLINOMICAS Y RACIONALES

1.1.- ECUACION ENTERA RACIONAL.-

Definición.- Una ecuación entera racional de grado n en la variable x es una expresión de la forma

$A_0X^n+A_1X^{n-1}+A_2X^{n-2}+...+A_{n-1}X+A_n=0$ donde n es un entero no negativo y los A_i son constantes reales o complejas; $A_0=0$.

Otra forma de expresar la ecuación anterior es:

$X^n+P_1X^{n-1}+P_2X^{n-2}+...+P_{n-1}X+P_n = 0$. al dividir por $A_0=0$.

Ejemplos:

$4X^3-2X^2+3X-5=0$ es racional entera de grado 3

$X^2- 2X+4=0$ es racional entera de grado 2

$X^4+ 3X-8=0$ es racional entera de grado 4

Observese que en cada una de las ecuaciones los exponentes de X son enteros positivos y los coeficientes de las variables son constantes (reales o complejas).

1.2.- POLINOMIOS DE GRADO N.-

Definición.- Un polinomio de grado n en la variable X es una función de X de la forma

$f(x)=A_0X^n+A_1X^{n-1}+A_2X^{n-2}+...+A_{n-1}X+A_n$, $A_0=0$; donde n es un entero no negativo y las A_i constantes reales o complejas. Entonces f(x)=0 es una ecuación racional entera de grado n en X.

Ejemplos.-

Si $f(x)= 3X^3+X^2+5X-6$, se tiene $f(-2)=3(-2)^3+(-2)^2+5(-2)-6 \implies f(-2)=-36$.

Si $f(x) = X^2 + 2X - 8$, se tiene $f(5)=(5)^2+2(5)-8 \implies f(5)=2 5-3$. Todo valor de X que anule a $f(x)$ recibe el nombre de raíz de la ecuación $f(x)=0$.

Ejemplo:

2 es una raíz de la ecuación $f(x)=3X^3-2X^2-5X-6=0$, ya que: $f(2)=24-8-10-6=0$.

1.3.- COCIENTE DE POLINOMIOS.-

1.3.1.- División larga.-

Teorema:- Sean dos polinomios cualesquiera $P(x)$ y $D(x)$, donde el grado de $D(x) <$ grado de $P(x)$ y $D(x)=0$, entonces existen los polinomios $R(x)$ y $Q(x)$, tales que:

$P(x)=D(x)Q(x)+R(x)$ donde el grado de $R(x) <$ grado de $D(x)$ o bien $R(x)=0$ y la suma de los grados de $D(x)$ y $Q(x)$ es igual al grado de $P(x)$.

La ecuación $P(x) = D(x)Q(x)+R(x)$ es una consecuencia directa de la ecuación que resulta de la división de:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Donde a $P(x)$ se le llama dividendo; $D(x)$ se le llama divisor; $Q(x)$ se le llama cociente y a $R(x)$ se le llama residuo o resto.

Ejemplo:

Sean $P(z)=2Z^4-Z^3+7Z^2-2Z-2$ y $D(z)=2Z^2-Z+1$. Encontrar Q(z) y R(z).

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2Z^4-Z^3+7Z^2-2Z-2 & 2Z^2-Z+1 \\ \hline
 & -2Z^4+Z^3-Z^2 & Z^2+3 \\ \hline
 & 6Z^2-2Z-2 & \\
 & -6Z^2+3Z-3 & \\ \hline
 & Z-5 &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow \quad Q(z) = Z^2+3$

$R(z) = Z-5$

$P(z) = Q(z)D(z)+R(z)$

1.3.2.- División Sintética.-

La división sintética es un método abreviado de efectuar la división de cualquier polinomio por un polinomio de la forma (x+r). Por este método podemos determinar los coeficientes del cociente y tambien el residuo.

Ejemplo:

Dado $P(x) = 3X^5-4X^4-5X^3-8X+25$

$D(x) = X-2$

Hallar Q(x) y R(x).

Se escriben los coeficientes de P(x), sustituyendo con ceros los terminos cuyas potencias de X faltan, es decir:

$$3 \quad -4 \quad -5 \quad +0 \quad -8 \quad +25$$

A continuación y en forma de división clásica se escribe el segundo termino de D(x) cambiando su signo.

$$3 \quad -4 \quad -5 \quad +0 \quad -8 \quad +25 \ \big| \ \underline{2 \qquad}$$

El primer coeficiente de P(x) se escribe en el primer lugar de una tercera fila y se le multiplica por el divisor 2.

El producto 6 se coloca en la segunda fila bajo el segundo coeficiente de P(x) y se suma a este, obteniendo 2, que se pone en la columna correspondiente.

Este 2 se multiplica por el 2 del divisor y el producto 4 se suma a -5, dando -1 y así sucesivamente.

El último número de la tercera fila es el resto y todo los números a su izquierda son los coeficientes del cociente.:

```
3  -4  -5  +0  -8  +25  ¦ 2
                         ----------
   +6  +4  -2  -4  -24  ¦
-----------------------
3  +2  -1  -2  -12  +1     residuo
```

coeficientes de Q(x)

Como P(x) es de quinto grado y D(x) de primer grado, entonces Q(x) es de cuarto grado.

La solución es: $3X^4+2X^3-X^2-2X-12+\frac{1}{X-2}$

Como P(x) = Q(x)D(x)+R, entonces:

$$3X^5-4X^4-5X^3-8X+25=(3X^4+2X^3-X^2-2X-12)(X-2)+\frac{1}{X-2}$$

1.4.- TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si un polinomio P(x), de grado n>0, se divide entre X-r, entonces el residuo R es una constante y es igual al polinomio cuando se sustituye r por X: es decir P(r)=R.

Demostración.-

Si Q(x) es el cociente, por definición de división se tiene:

P(x) = Q(x)(x-r)+R(x)

Como el grado R(x)<grado (x-r) ===> R es constante.

Como $P(x) = Q(x)(x-r)+R(x)$ se cumple para cualquier valor de X, entonces se cumple también:

$P(r) = Q(r)(r-r)+R$

$P(r) = Q(r).0+R$

$P(r) = R$

Ejemplo:

Hallar por división sintética Q(x) y R, de dividir :

$P(x) = X^4-2X^2+3X-2$ entre $D(x) = X+2$. Utilizar el resultado para calcular P(-2).

Solución:

$P(x) = X^4-2X^2-3X-2$

$D(x) = X+2 = X-(-2)$ y $r = -2$

```
1  +0  -2  +3  -2  ¦  -2
   -2  +4  -4  +2  ¦------------
------------------
1  -2  +2  -1  +0
```

$Q(x) = X^3-2X^2+2X-1$, y $R = 0$

$P(-2) = 0$

1.5.- TEOREMA DEL FACTOR.-

El Teorema del Residuo nos conduce al Teorema del Factor que dice:

El polinomio P(x) de grado $n > 0$ es divisible por (x-r), es decir (x-r) es un factor de P(x), si y solamente si r es un cero de P(x)

Demostración:

Sea $P(x) = Q(x)(x-r)+R$

Si r es un cero de P(x), entonces $P(r)=0$ y como $P(r)=R$

entonces $P(x) = Q(x)(x-r)+0$

$P(x) = Q(x)(x-r)$ Luego $x-r$ es un factor de $P(x)$

Reciprocamente:

Si $x-r$ es un factor de $P(x)$, entonces:

$P(x) = Q(x)(x-r)$

$P(r) = Q(r)(r-r) = Q(r).0 = 0$

Por tanto, r es un cero de $P(x)$

Ejemplo:

Mostrar que $X-1$ es un factor de $P(x) = 14X^{99}-65X^{56}+51$

Solución:: Se calcula el residuo de dividir $P(x)$ entre $X-1$.

Basta calcular según el Teorema del Residuo, $P(1)$

$P(1) = 14(1)^{99}-65(1)^{56}+51$

$= 14-65+51 = 0$

Como $P(1) = 0$, 1 es un cero de $P(x)$ y por el Teorema del Factor, $(x-1)$ es un factor de $P(x)$.

1.6.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

El Teorema del Factor establece que si r es un cero de $P(x)$ siendo $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_1X+A_0$, donde $n>0$, entonces $\exists Q(x) = A_nX^{n-1}+...+q_0$ tal que $P(x) = (x-r)Q(x)$.

Este teorema se aplica cuando se conoce algo acerca de los ceros de $P(x)$.

Ya sabemos encontrar los ceros de polinomios de primero y segundo grado, pero no se ha dicho nada acerca de los polinomios de grado mayor.

El siguiente teorema no dice como encontrar los ceros de un polinomio, pero si garantiza la existencia de estos.

Aceptaremos la validez de este teorema, ya que su demostración es demasiada complicada para incluirla aquí.

Teorema:

Si $P(x)$ es de grado $n > 0$ entonces existe un r real o complejo tal que $P(r) = 0$. En otras palabras, todo $P(x)$ de grado mayor que 0, tiene al menos un cero.

Supongamos: $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_1X+A_0$ donde el grado $n>0$ entonces existe un r de $P(x)$. Luego, por el Teorema del Factor, tenemos:

$\exists Q_1(x) = A_nX^{n-1}+...+q_1$ tal que $P(x) = (x-r_1)Q_1(x)$ **(1)**

Si $n-1 > 0$ se puede aplicar el Teorema Fundamental del Algebra a $Q_1(x)$ para ver que existe un r_2 tal que $Q_1(r_2)=0$ entonces por el Teorema del Factor:

$\exists Q_2(x) = A_nX^{n-2}+...+q_2$ tal que $Q_1(x) = (x-r_2)Q_2(x)$ **(2)**

Reemplazando **(2)** en **(1)**:

$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)Q_2(x)$ **(3)**

Si el grado $Q_2(x)$ es positivo, entonces $Q_2(x)$ tiene un cero, r_3, así que:

$Q_3(x) = A_nX^{n-3}+...+q_3$ tal que $Q_2(x) = (x-r_3)Q_3(x)$ **(4)**

Si reemplazamos la ecuación **(4)** por la **(3)**, tenemos:

$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)Q(x)$

Se puede continuar este proceso hasta que el grado del polinomio cociente sea cero, esto es, después de n pasos. El último polinomio cociente es:

$Q_n(x) = A_nX^{n-n} = An$, y por consiguiente:

$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n)A_n$

Es claro determinar que los números $r_1, r_2, r_3,...,r_n$ son precisamente los ceros de $P(x)$, entonces $P(x)$ tiene exactamente n ceros no necesariamente diferentes.

Observaciones:

i).- El teorema ya se ha verificado para $n = 1$ y $n = 2$. Pues si $P(x) = ax + b$ y r es un cero, entonces: $P(x) = a(x-r)$ porque $r = - b/a$, y si $P(x) = ax^2 + bx + c$ es un polinomio de segundo grado, con ceros r_1 y r_2, entonces: $P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$.

ii).- De la ecuación $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)$, claro que los números $r_1,r_2,r_3,\ldots,r_n$ son precisamente los ceros de $P(x)$. Por tanto, $P(x)$ tiene exactamente n ceros no necesariamente diferentes.

iii).- Si $P(x)$ se representa como el producto de factores lineales y $(x-r)$ ocurre m veces, entonces r se llama un cero de multiplicidad m.

iv).- El Teorema Fundamental del Algebra asegura la existencia de solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Ejemplo:

Si 3 es un cero doble de $P(x) = X^4-12X^3+55X^2-114X+90$, escribir a $P(x)$ como un producto de factores lineales.

Solución: Como 3 es un cero doble de $P(x)$, entonces:

$$P(x) = (x-3)^2Q(x)$$

$$= (X^2-6X+9)Q(x)$$

Para hallar $Q(x)$ dividimos $P(x)$ entre (X^2-6X+9), nos da: $Q(x) = X^2-6X+10$.

Usando: $X = \dfrac{- b \pm \;\; b^2-4ac}{2a}$ en $X^2-6X+10$ obtenemos los ceros: $(3+i)$ y $(3-i)$.

$\Longrightarrow$ $P(x) = (x-3)^2[x-(3+i)][x-(3-1)]$.

1.7.- CEROS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES.-

Teorema.-

Sea $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...A_1X+A_0$ un polinomio de grado $n>0$ con coeficientes reales. Si r es un cero de P(x), entonces su conjugado r también es un cero de P(x).

Demostración.-

Si r es un cero de P(x), entonces:

$P(r) = A_nr^n+ A_{n-1}r^{n-1}+...A_1r+A_0 = 0$

tomando el conjugado a los dos lados de la ecuación, tenemos:

$P(r) = A_nr^n+A_{n-1}r^{n-1}+...+A_1r+A_0 = 0$

Como el conjugado de la suma de dos o más términos es la suma de los conjugados de los términos y 0 = 0, tenemos:

$A_nr^n+A_{n-1}r^{n-1}+...A_1r+A_0 = 0$

Como el conjugado del producto de dos o más factores es el producto de los conjugados de los factores, nos da:

$A_nr^n+A_{n-1}r^{n-1}+...+A_1r+A_0 = 0$

Como el conjugado de un número real es el mismo número real y como los coeficientes de P(x) son reales, se puede escribir:

$A_nr^n+A_{n-1}r^{n-1}+...+A_1r+A_0 = 0$ o

$P(r) = 0$. Es decir, r es un cero de P(x).

Ejemplo:

Si 3-i es un cero de $P(x) = X^3-4X^2-2X+20$. Hallar dos ceros más de P(x) y luego descomponer P(x) en producto de factores lineales.

Solución.- Si 3-i es un cero, entonces su conjugado, 3+i también lo es, y tenemos: [x-(3-i)] y [x-(3+i)],

$$\Longrightarrow \frac{X^3-4X^2-2X+20}{[X-(3-i)][X-(3+i)} = \frac{X^3-4X^2-2X+20}{X^2-6X+10} = X+2$$

$\Longrightarrow P(x) = [X-(3-i)][X-(3+i)](X+2)$

1.8.- CEROS RACIONALES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS.-

Si todos los coeficientes de P(x) C **Z**, entonces por medio del siguiente teorema se pueden encontrar todos los ceros racionales de P(x), si existen.

Teorema:

Si b/c,C Q, c=0 en su mínima expresión, es un cero del polinomio $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_1X+A_0$, donde A_i son todos enteros, entonces b es un factor de A_0 y c es un factor de A_n.

Ejemplo:- Hallar todos los posibles ceros racionales del polinomio $P(x) = 2X^3+3X^2+2X+3$

Si b/c C Q, c=0, es un cero racional de P(x), entonces debe ser un factor de $A_0 = 3$ y c de $A_n = 2$

Algunos valores de b serán: 1, -1, 3, -3

Algunos valores de c serán: 1, -1, 2, -2

Entonces los posibles valores de b/c serán: 1, -1, 3, - -3, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2.

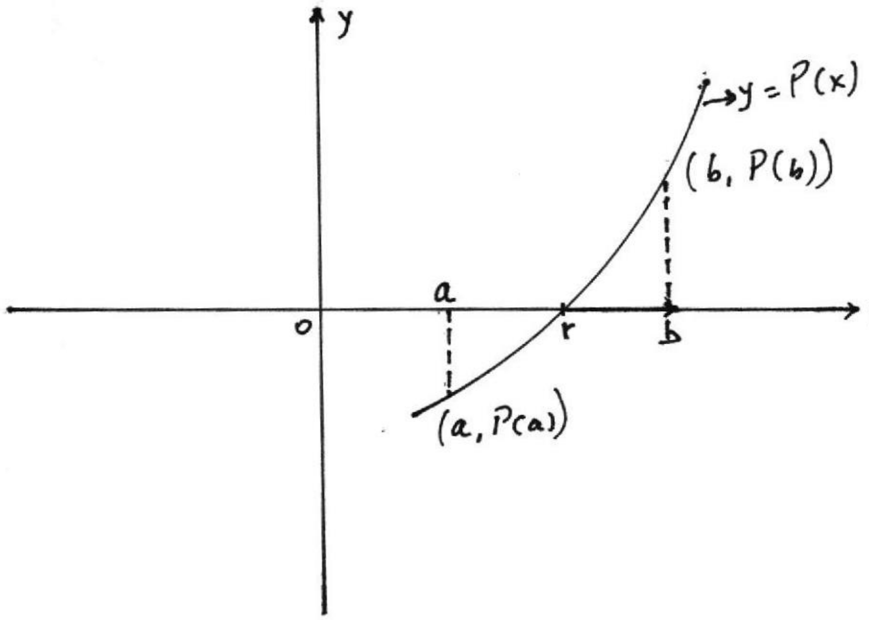
Probando estos valores se halla que P(-3/2) = 0.

Entonces el único cero de P(x) es -3/2.

1.9.- CEROS REALES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES.-

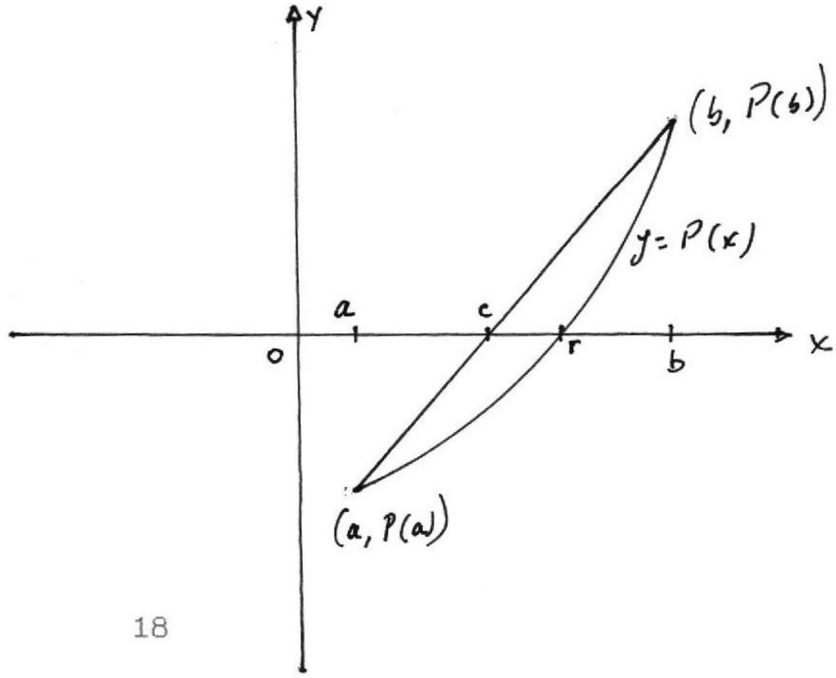
Teorema:

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales; a y b dos números tales que $a < b$. Si los dos números $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un número r entre a y b tal que $P(r) = 0$.



Un cero real de un polinomio se puede aproximar de la siguiente manera:

En la figura se muestra un arco del gráfico de un polinomio $P(x)$.



Los números $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, y r es un cero de $P(x)$ que está entre a y b. Tomamos un punto c aproximado a r y que a su vez intersecta al eje X.

Para encontrar a c procedemos de la siguiente manera:

La pendiente del segmento $(a, P(a))$ hasta $(b, P(b))$ está dada por el cociente:

$$\frac{P(b) - P(a)}{b - a} \quad \textbf{(1)} \quad \text{y también por} \quad \frac{0 - P(a)}{c - a} \quad \textbf{(2)}$$

Igualando **(1)** con **(2)**, y desarrollando tenemos:

$$\frac{P(b) - P(a)}{b - a} = \frac{0 - P(a)}{c - a}$$

$$\Longrightarrow \quad (c-a)P(b) - (c-a)P(a) = -(b-a)P(a)$$

$$\Longrightarrow \quad cP(b) - aP(b) - cP(a) + aP(a) = - bP(a) + aP(a)$$

$$\Longrightarrow \quad cP(b) - cP(a) = aP(b) - bP(a)$$

$$\Longrightarrow \quad c[P(b) - P(a)] = aP(b) - bP(a)$$

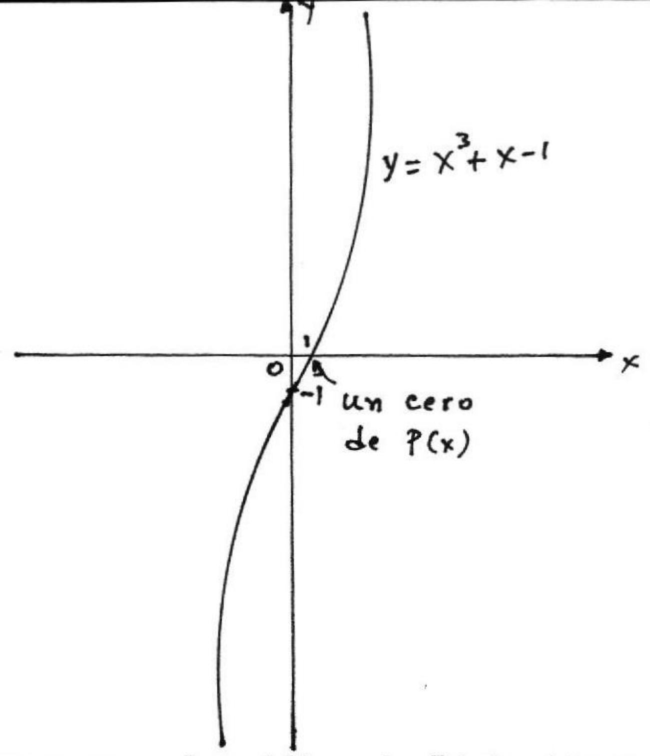
$$\Longrightarrow \quad c = \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$

Tomando el número c como una aproximación de cero r:

$$r \simeq \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$

Ejemplo:

Considerar el gráfico del polinomio $P(x) = X^3+X-1$ para determinar los ceros reales de $P(x)$.



Se puede observar que el gráfico de P(x) tiene un cero entre 0 y 1. Examinando un poco más observamos que el cero se encuentra entre (0,P(0)) y (1,P(1)) o sea entre (0,-1) y (1,1) que se encuentran en lados opuestos del eje X, entonces el gráfico de P(x) debe intersectar el eje X en algún punto entre 0 y 1.

El gráfico de P(x) sugiere que el cero de P(x) > 1/2.

Haciendo algunos cálculos observamos que:

$P(0.6) = (0.6)^3 + 0.6 - 1 = - 0.184$

$P(0.7) = (0.7)^3 + 0.7 - 1 = 0.043$

Como estos dos números tienen signos opuestos, podemos afirmar que nuestro cero es un número entre 0.6 y 0.7 y así podemos ir consiguiendo mejores aproximaciones.

Un cero de P(x) que este entre 0.6 y 0.7 es aproximadamente:

$$r \simeq \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)} \simeq \frac{(0.6)(0.043) - (0.7)(-0.184)}{0.043 - (-0.184)} \simeq 0.681$$

Si se quiere una mejor aproximación se podrían calcular

P(0.681), P(0.682), P(0.679),... hasta encontrar dos números con signos opuestos.

1.10.- FUNCIONES RACIONALES.-

Se llaman funciones racionales a las funciones que son cocientes de polinomios.

Las expresiones: $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4}$; $X = -4$

$g(x) = \dfrac{X^2}{X+1}$; $X = -1$ $\qquad h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$; $X = 1$

$j(x) = \dfrac{4X^3-5X+1}{X^2-1}$; $X^2 = 1$ $\qquad k(x) = \dfrac{8}{3X^2}$; $X = 0$, son

funciones racionales.

El Dominio de una función racional $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no contiene los ceros de la función polinómica g ya que la división entre cero no tiene sentido.

Si el número real a es un cero de ambas funciones f y g en $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, es decir si:

$f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, entonces por el Teorema del Factor se tiene:

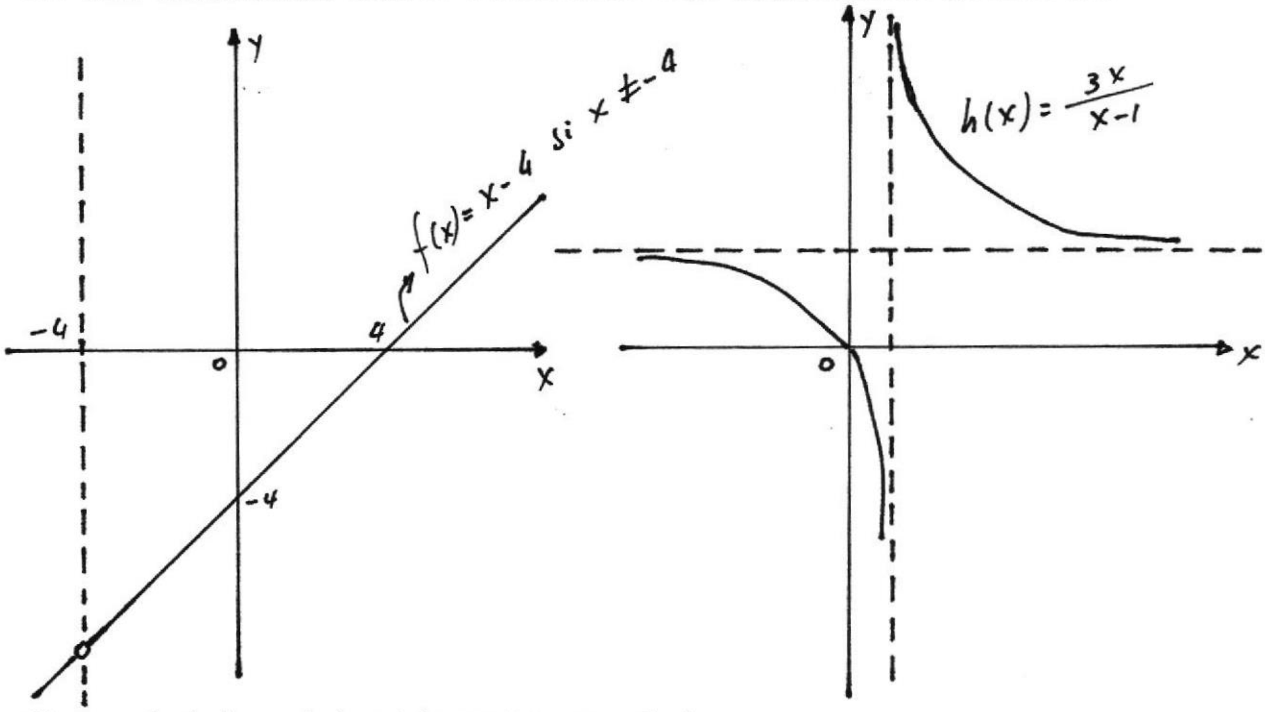
$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\ ,\ \text{si } X = a$$

Ejemplo:

Sean: $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4} = \dfrac{(x+4)((X-4)}{X+4} = X - 4$ si $X = -4$

y $h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$ si $X = 1$

De las funciones dadas obtenemos los siguientes gráficos:



Observándolos detenidamente concluimos que:

i) La función $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4}$ no está definida cuando el denominador X+4 es 0, es decir cuando X = -4. Esta restricción origina en el gráfico un punto perdido (o un hueco) puesto que tanto el numerador como el denominador son simultaneamente cero cuando X = -4.

ii) Para la función $h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$, la restricción en el denominador origina que no solo no está definida cuando X=1 sino que también es infinitamente grande en valor absoluto cuando X se aproxima a 1.

Esto ocurre porque solamente el denominador es 0 cuando $X=1$, no así el numerador que en este caso es 3.

iii) $X = -4$ no es asíntota para $f(x) = \frac{X^2-16}{X+4}$, mientras que $X = 1$ si lo es para $h(x) = \frac{3X}{X-1}$.

En general, concluímos que:

$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si

$g(a) = 0$ y si $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ se hace infinitamente grande

cuando X se aproxima a **a**. Esta situación se presenta cuando $g(a) = 0$ y $f(a) = 0$.

CAPITULO II

APLICACION DE TURBO PASCAL EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES POLINOMICAS

Preliminares.-

Antes de dar inicio al presente capítulo creo de importancia hacer notar los siguientes aspectos relacionados con el **TURBO PASCAL**.

2.1.- LENGUAJE DE PROGRAMACION

Un programa en computadora es una secuencia de instrucciones nada ambiguas que toman datos, los manipulan de cierta manera y regresan datos. Estas instrucciones deben ser específicas porque una computadora entiende las instrucciones como secuencias de interruptores de encendido-apagado que no permiten ambiguedades.

Un lenguaje de alto nivel consiste en palabras que son fáciles de reconocer y recordar para un ser humano, en lugar de las secuencias de ceros y unos.

Consiste de palabras como WRITE, PROGRAM, BEGIN Y END. Cuando un programa se compila, cada palabra de alto nivel se traduce en muchas cadenas de ceros y unos, que representan instrucciones y datos. Hoy en día los encendidos y apagados son interruptores electrónicos que la computadora fija por ella misma para responder a los enunciados de sus programas.

Los lenguajes de alto nivel varían mucho en que "tan altos" son. En el nivel más bajo esta el lenguaje ensamblador, donde cada palabra corresponde a una instrucción del procesador de la PC.

El lenguaje ensamblador es útil cuando se necesita manipular la computadora directamente y cuando sabe exacta y precisamente lo que quiere hacer.

Un poco más arriba están los lenguajes como C, que son algunas veces usados para escribir compiladores y sistemas operativos. C proporciona más ayuda que el ensamblador, pero da un acceso significativo a las funciones de bajo nivel de la computadora.

Todavía más arriba están los lenguajes como Pascal, que combinan instrucciones fáciles de recordar, algún acceso de bajo nivel, y por lo menos algunas funciones de seguridad para el programador novato.

2.2.- TURBO PASCAL

El lenguaje Pascal fue diseñado por Niklaus Wirth en el inicio de los años 70 como una forma de enseñar las ideas de programación estructurada a los estudiantes de ciencias computacionales, y hasta hoy, todavía exhibe su ascendencia didáctica.

Turbo Pascal es un lenguaje de programación de propósitos general que es adecuado para un amplio rango de aplicaciones. Proporciona capacidades de alto nivel al sistema operativo y a la CPU. Pascal tambien está diseñada para enseñar métodos de programación estructurada que hacen más fácil la depuración y modificación de los programas.

Turbo Pascal, como una forma distintiva de Pascal, también da soporte a la programación orientada a objetos, que extiende con mucho las capacidades proporcionadas por la programación estructurada.

2.3.- PROPOSICIONES DE CONTROL EN PASCAL

IF..THEN..ELSE: Se usa cuando el programa debe ramificarse en una dirección u otra, basándose en la condición especificada en la cláusula IF. La cláusula ELSE es opcional.Enunciados IF..THEN..ELSE múltiples pueden ser anidados para manejar múltiples alternativas.

CASE..END: Usado cuando el programa deba ramificarse en una entre varias direcciones, dependiendo de los valores recibidos en múltiples casos.Los enunciados CASE son una forma más fácil de manejar muchas alternativas que con los enunciados IF anidados. Turbo Pascal extiende el enunciado CASE permitiendo la adición de una cláusula ELSE (CASE..ELSE..END) para manejar situaciones en las que un valor no esté implementado en ninguno de los casos. Los sectores CASE deben ser constantes del tipo ordenal, a diferencia de los valores de una cláusula IF, que pueden ser variables y tipos de datos no ordinales.

FOR I:= M TO N DO: Uselo cuando el programa debe repetir un enunciado una cierta cantidad de veces; aquí, I es la variable de control del ciclo, **M** es el valor inicial, y **N** es el valor final. Más de un enunciado puede repetirse si se enlazan en un solo enunciado compuesto usando BEGIN..END. La variable de control es incrementada automáticamente en cada pasada por el ciclo.

WHILE..DO: Es utilizada cuando el programa debe repetir un enunciado basándose en que la condición del ciclo sea verdadera, pero a) no se sabe si la condición será verdadera alguna vez, y b) no se sabe por adelantado cuántas veces se tendrá que ejecutar el ciclo. La condición del ciclo es evaluada antes de que el ciclo se ejecute, porque si es falsa cuando el programa alcance el ciclo WHILE, entonces el ciclo nunca se ejecutará. Se pueden repetir muchos enunciados si se enlazan en un solo enunciado compuesto con BEGIN..END.

REPEAT..UNTIL: Debe usarse cuando un programa tenga que repetir un enunciado basándose en que una condición sea verdadera, pero a) el ciclo debe ejecutarse por lo menos una vez, y b) no se sabe por adelantado cuántas veces se tiene que repetir dicho enunciado. La condición del ciclo es evaluada después de que se ejecuta el ciclo, así que, sin importar el valor de la condición del ciclo cuando el programa alcance el enunciado REPEAT, el ciclo se ejecutará por lo menos una vez. Más de un enunciado puede ser incluido entre REPEAT y UNTIL sin tener que utilizar BEGIN..END.

2.4.-PASOS EN EL DESARROLLO DE PROGRAMAS

i).- Establezca en una oración lo que el programa debe hacer.

ii).- Divida la tarea principal en subtareas hasta que cada una sea un claro paso lógico. Olvídese de los detalles del lenguaje.

iii).- Decida los detalles generales, como las variables globales y locales, las estructuras de datos, etc. Esconda lo más que pueda dentro de subrutinas; cree el marco general del programa.

iv).- Codifique y pruebe cada subrutina por separado antes de colocarla en el marco general del programa. Asegúrese de que cualquier variable externa usada por una subrutina sea declarada como parámetro.

v).- Coloque todas las subrutinas en el marco general del programa y pruebe el programa bajo una veriedad de condiciones.

2.5.- PROGRAMACION ESTRUCTURADA

Este es el nombre que se da al enfoque general de usar módulos, es decir, delegar subtareas y emplear alguna forma de programación descendente con refinamiento por pasos.

En la programación descendente se empieza haciendo un bosquejo del cuerpo principal en seudocódigo, y si es muy complicado será necesario trazar varios bosquejos del cuerpo principal, en donde cada uno irá completando cada vez más detalles.

Pero regresando a la programación estructurada podemos decir que su meta es producir programas que sean más fáciles: **i)** de escribir, **ii)** de corregir, **iii)** de leer y **iv)** de modificar.

En resumen, Turbo Pascal es un lenguaje de programación diseñado para enseñar métodos de programación estructurada que hacen más fácil la depuración y modificación de los programas.

2.6.- METODO DE BAIRSTOW PARA HALLAR LAS RAICES DE POLINOMIOS

Se establece en primer término que todo polinomio de grado n, de coeficientes A_i reales

$P(x) = x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$ **(1)**

cumple con las siguientes propiedades:

i).- Tienen **n** raíces ya sean reales o complejas, únicas o repetidas.

ii).- Las raíces complejas siempre aparecen en parejas complejas conjugadas.

iii).- Satisface la regla de los signos de Descartes.

El método a utilizar para encontrar las raíces de la ecuación polinomial es el de **BAIRSTOW**, el mismo que nos permite factorizar un polinomio de segundo grado de la forma $x^2 + px + q$ o partir de un polinomio P(x) de grado n, siendo n > 2, es decir:

$P(x) = Q(x)(x^2 + px + q)$ **(2)**

Las raíces reales o complejas a y b del polinomio x^2+px+q son a su vez raíces de P(x) o sea:

$P(x) = Q(x)(x-a)(x-b)$ **(3)**

Repitiendo el método para el polinomio Q(x), se obtienen otras dos raíces de p(x); y así sucesivamente hasta determinar las n raíces de la ecuación **(1)**.

A continuación veremos una descripción del método de Bairstow:

Dada la ecuación polinomial **(1)**, si el polinomio p(x) se divide entre x^2+px+q, se obtiene:

$p(x) = (x^2 + px + q)Q(x) + Rx + S$ **(4)**

Donde $Rx + S$ es el residuo y $Q(x)$ se puede expresar como:

$Q(x) = x^{n-2} + B_1x^{n-3} + \ldots + B_{n-3}x + B_{n-2}$ **(5)**

Si el residuo $Rx + S$ es nulo, entonces $x^2 + px + q$ es el factor de $P(x)$ deseado. Ahora el objetivo es reducir R y S a cero para obtener los valores de p y q.

Vamos a obtener R y S como funciones de p y q.

Sustituyendo la ecuación **(5)** en la **(4)**:

$P(x) = (x^2+px+q)(x^{n-2}+B_1x^{n-3}+\ldots+B_{n-3}x+B_{n-2}) + Rx + S$

Efectuando el producto nos queda:

$P(x) = x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+B_1x^{n-1}+B_1px^{n-2}+B_1qx^{n-3}+B_2x^{n-2}+$
$+B_2px^{n-3}+B_2qx^{n-4}+\ldots+B_{n-3}x^3+B_{n-3}px^2+B_{n-3}qx+B_{n-2}x^2+B_{n-2}px+$
$+B_{n-2}q+Rx+S$

Agrupando términos de la misma potencia:

$P(x) = x^n+x^{n-1}(p+B_1)+x^{n-2}(q+B_1p+B_2)+x^{n-3}(B_1q+B_2p)+$
$+x^{n-4}(B_2q)+\ldots+x^3(B_{n-3})+x^2(B_{n-3}p+B_{n-2})+x(B_{n-3}q+B_{n-2}p+R)+$
$+B_{n-2}q+S$

Comparando con la ecuación **(1)**:

$A_1 = B_1 + p$ **(6)**

$A_2 = B_2 + pB_1 + q$ **(7)**

......

$A_k = B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2}$ $k=3,4.5,\ldots n-2$ **(8)**

......

$A_{n-1} = R + pB_{n-2} + qB_{n-3}$ **(9)**

$A_n = S$ **(10)**

Si se definen $B_0 = 1$ y $B_{-1} = 0$, y además B_n y B_{n-1} tales que: $R = B_{n-1}$ **(11)** $S = B_{n-1}$ **(12)**

Las ecuaciones **(6)** a **(10)** se pueden escribir en términos de la fórmula iterativa única.

$A_k = B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2} \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad$ **(13)**

Obsérvese que de la fórmula **(6)** se puede determinar B_1 en términos de p y A_1 conocida.

Sustituyendo esta B_1 en **(7)**, se puede determinar B_2 en términos de A_1 yA_2 conocidas, así como p y q.

Continuando en esta forma, se pueden determinar B_{n-1} y B_n en términos de p y q, así como de las A_i conocidas.

Sustituyendo B_{n-1} y B_n en las ecuaciones **(11)** y **(12)** se encuentran R y S como funciones de p y q.

Como se desea que el residuo de la ecuación **(4)** sea nulo, se deben determinar p y q tales que se cumplan las ecuaciones:

$R = f_1(p,q) = 0 \qquad$ **(14)**

$S = f_2(p,q) = 0 \qquad$ **(15)**

Las ecuaciones **(14)** y **(15)** forman un sistema de ecuaciones no lineales en p y q, que se puede resolver por el método de Newton-Raphson para funciones de dos variables.

La expresión iterativa de Newton-Raphson que da la aproximación x_{k+1} de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en una variable, es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta expresión de Newton-Raphson, se puede escribir:

$$f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f'(x_k) = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

donde x_k es la aproximación anterior de la raíz.

La expresión iterativa de Newton-Raphson para determinar el punto (x,y) en el cual la función de dos variables f(x,y) vale cero, se puede escribir tomando los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor para funciones de dos variables y bajo ciertas suposiciones.

$$f(x_k,y_k)+(x_{k+1}-x_k)f_x(x_k,y_k)+(y_{k+1}-y_k)f_y(x_k,y_k) = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

Donde $f_x(x_k,y_k)$ representa la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a x evaluada en el punto de la k-esima aproximación(x_k,y_k). En esta ecuación, (x_{k+1},y_{k+1}) representa la nueva aproximación a la raíz en términos de la aproximación anterior (x_k,y_k), así como la función $f(x,y)$ y sus dos derivadas parciales evaluadas en (x_k,y_k).

Aplicando la ecuación **(17)** a las funciones **(14)** y **(15)**:

$$f_1(p_k,q_k) + pf_{1p}(p_k,q_k) + qf_{1q}(p_k,q_k) = 0 \qquad \textbf{(18)}$$

$$f_2(p_k,q_k) + pf_{2p}(p_k,q_k) + qf_{2q}(p_k,q_k) = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

donde:

$$p = p_{k+1} - p_k \qquad \textbf{(20)}$$

$$q = q_{k+1} - q_k \qquad \textbf{(21)}$$

Puesto que $R = f_1(p,q) = B_{n-1}$ y $S = f_2(p,q) = B_n+pB_{n-1}$, las ecuaciones **(18)** y **(19)** se pueden expresar como

$$B_{n-1} + p\left(\frac{B_{n-1}}{p}\right) + q\left(\frac{B_{n-1}}{q}\right) = 0 \qquad \textbf{(22)}$$

$$B_n+p_kB_{n-1}+ p\left(\frac{B_n}{p} + B_{n-1}+p_k\frac{B_{n-1}}{p}\right)+ q\left(\frac{B_n}{q} +p_k \frac{B_{n-1}}{q}\right) = 0$$

en términos de B_n y B_{n-1}. Para simplificar la última ecuación, restemos la ecuación **(22)** multiplicada por p_k de la ecuación **(23)** para obtener:

$$B_{n-1} + \frac{B_{n-1}}{p} p + \frac{B_{n-1}}{q} q = 0 \qquad \textbf{(24)}$$

$$B_n + \left(\frac{B_n}{p} + B_{n-1}\right) p + \frac{B_n}{q} q = 0 \qquad \textbf{(25)}$$

Para emplear estas fórmulas, se necesita conocer las derivadas parciales de B_n y B_{n-1}, se pueden obtener a partir de la fórmula recursiva **(13)**, cuyas derivadas parciales dan:

$$\frac{B_k}{p} = -B_{k-1} - p\,\frac{B_{k-1}}{p} - q\,\frac{B_{k-2}}{p} \qquad \textbf{(26)}$$

$$\frac{B_k}{q} = -B_{k-2} - p\,\frac{B_{k-1}}{q} - q\,\frac{B_{k-2}}{q} \qquad \textbf{(27)}$$

donde

$$\frac{B_{-1}}{p} = \frac{B_{-1}}{q} = \frac{B_0}{p} = \frac{B_0}{q} = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

Puesto que $B_{-1} = 0$ y $B_0 = 1$

Para evitar la necesidad de evaluar las derivadas parciales **(26)** y **(27)**, así como para obtener un algoritmo más eficiente, vamos a obtener otras formas de recurrencia más convenientes.

Así como factorizamos $x^2 + px + q$ de $p(x)$ para obtener la ecuación **(4)**, factoricemos la $Q(x)$ de la ecuación **(4)** en la misma forma para obtener

$$Q(x) = (x^2 + px + q)(x^{n-4} + C_1x^{n-5} + \ldots + C_{n-5} + C_{n-4}) + + R^*x + S^* \qquad \textbf{(29)}$$

Agrupando terminos de igual potencia y comparando con la ecuación **(5)**, se obtiene la relación de recurrencia

$$C_k = B_k - pC_{k-1} - qC_{k-2} \qquad k = 1,2,3,\ldots,n \qquad \textbf{(30)}$$

Análoga a la relación **(13)** con $C_{-1} = 0$ y $C_0 = 1$, y extendida hasta n.

El negativo de la ecuación **(30)** con subíndice $k = k-1$ es $-C_{k-1} = -B_{k-1} + pC_{k-2} + qC_{k-3}$. Comparando esta expresión con la **(26)** se infiere que:

$$\frac{B_k}{p} = - C_{k-1} \qquad (31)$$

Análogamente, la relación **(30)** con $k = k-2$ se puede escribir como $- C_{k-2} + pC_{k-3} + qC_{k-4}$ que comparada con **(27)**, da:

$$\frac{B_k}{q} = - C_{k-2} \qquad (32)$$

Sustituyendo **(31)** y **(32)** en las ecuaciones de Newton-Raphson **(24)** y **(25)**, se obtiene:

$$C_{n-2}\, p + C_{n-3}\, q = B_{n-1} \qquad (33)$$

$$(C_{n-1} - B_{n-1})\, p + C_{n-2}\, q = B_n \qquad (34)$$

Para simplificar aún más la nomenclatura, se define

$$C_{n-1} = C_{n-1} - B_{n-1} \qquad (35)$$

con lo cual las ecuaciones anteriores quedan en la forma de Bairstow

$$C_{n-2}\, p + C_{n-3}\, q = B_{n-1} \qquad (36)$$

$$C_{n-1}\, p + C_{n-2}\, q = B_n \qquad (37)$$

que constituyen un sistema lineal de ecuaciones que puede resolverse para p, q.

2.7.- PASOS A SEGUIR EN EL COMPUTADOR PARA RESOLVER UNA ECUACION POLINOMICA UTILIZANDO PROGRAMACION EN PASCAL

Los pasos a seguir en el computador son:

i).- Ingresar los valores iniciale de p y q.

ii).- Evaluar B_k para $k = 1,2,\ldots,n$ empleando la ecuación

$$A_k = B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2} \quad k = 1,2,\ldots,n$$

iii).- Evaluar C_k para $k = 1,2,\ldots,n-1$, empleando la ecuación

$$C_k = B_k - pC_{k-1} - qC_{k-2} \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

iv).- Evaluar $\bar{A}_{n-1} = \bar{A}_{n-1} - \bar{B}_{n-1}$

v).- Resolver el sistema de ecuaciones

$$C_{n-2}\, p + C_{n-3}\, q = B_{n-1}$$

$$C_{n-1}\, p + C_{n-2}\, q = B_n$$

para determinar las incógnitas p y q

vi).- Obtener los nuevos valores de p y de q empleando

$$p_{k+1} = p_k + p$$

$$p_{k+1} = q_k + q$$

vii).- Determinar si ya convergió el m{todo, o sea, ver si p < y q < . Si no ha convergido, regresar a (ii)

viii).- Con los valores obtenidos de p y q , determinar las raíces del factor cuadrático

$$x^2 + px + q$$

ix).- Repetir el proceso desde (i) con el polinomio reducido Q(x), hasta obtener todas las raíces de p(x).

2.8.- PROGRAM BAIRSTOW

```
Program Bairstow;
Var
 a,b,c: array [1..20] of real;
 i,j,n: integer;
 r,s,dr,ds,den,tol, x,x1,x2 : real;
begin
  writeln ('grado del polinomio?');
  readln (n);
  writeln ('valores iniciales para el factor cuadrático:');
  writeln ('ingrese el valor inicial de r');
  readln (r);
  writeln ('ingrese el valor inicial de s');
  readln (s);
  writeln ('tolerancia?');
  readln (tol);
  for i:= 0 to n do
    begin
```

```
  writeln('ingrese coeficiente', i);
  readln(a,[i+3]);
end;
b[1]:= 0;
b[2]:= 0;
c[1]:= 0;
c[2]:= 0;
repeat
    writeln('valores   iniciales   para   el   factor
    cuadrático');
    writeln('ingrese el valor inicial de r');
    readln(r);
    writeln('ingrese el valor inicial de s');
    readln(s);
    i:=1;
    if i > 20 then
        begin
          writeln('no converge');
          halt;
        end;
      writeln('factor  cuadrático  encontrado  x^2-r*x-
      s');
      writeln('r=',r, 's=',s);
      if n=2 then;
        begin
         x1:=(r+sqrt(abs(r*r=4*s))/2);
         writeln('x1=', x1);
         x2:=(r-sqrt(abs(r*r+4*s))/2);
         writeln('x2=',x2);
        end;
        n:=n-2;
         for i:= 3 to n+3 do
         a[i]:=b[i];
         until n > 3;
         if n=1 then
          begin
            writeln('ecuación lineal final ax+b');
            writeln('a=', b[n+2]);
            writeln('b=', b[n+3]);
             begin
              if b[n+2]<>0 then
              x1:=(b[n+3])/(b[n+2]);
              writeln('x1=',x1);
           end;
           if n = 2 then
           else
             begin
              writeln('ecuación    final     cuadrática
               a*x^2+bx+c');
              writeln('a=', b[n+1]);
              writeln('b=', b[n+2]);
              writeln('c=', b[n+3]);
              begin
              x1:=(r+sqrt(abs(r*r+4*s))/2);
```

```
            writeln('x1=', x1);
            x2:= (r-sqrt(abs(r*r+4*s))/2);
            writeln('x2=', x2);
          end;
       end;
    end;
 end.
```

2.8.1.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAM BAIRSTOW