Matrícula: Nombre: Paralelo:

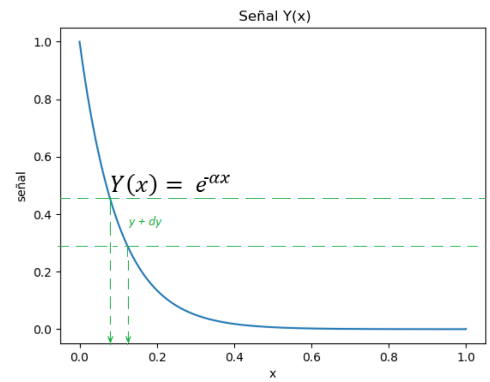
COMPROMISO DE HONOR: Al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. Además, no debo consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada. Firmo el presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior. *"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".*

Firma

Notas: Desarrolle los ejercicios de forma ordenada y con letra legible en las hojas para desarrollo.

Tema 1 (25 puntos). Sea Y una variable aleatoria definida por:

$$Y(x) = e^{-\alpha x}$$
$$0 \leq x \leq T,$$
$$\alpha = 1, T = 1$$

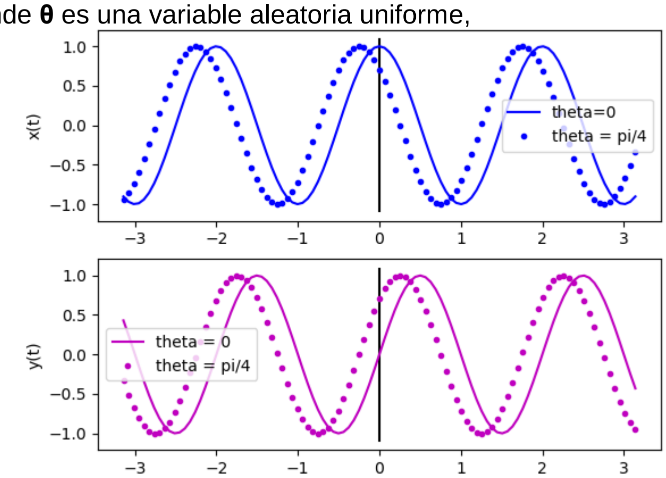


donde X es una variable aleatoria uniforme, distribuida en el intervalo de (0, T]

a) Determine la función densidad de probabilidad para Y
b) Calcule la función de distribución acumulada para Y
c) Grafique su resultado
d) Determine la auto-correlación para Y

Tema 2. (45 puntos) Sean X(t) y Y(t) mostrados en la figura, donde **θ** es una variable aleatoria uniforme, distribuida en el rango [-π π].

$$X(t) = \cos(\omega t + \theta)$$
$$Y(t) = \sin(\omega t + \theta)$$



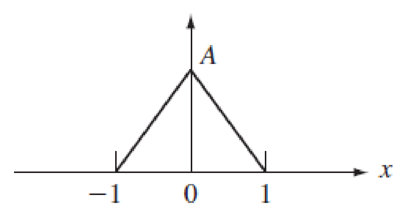
Si **ω** = 1/2, para **θ** = 0 y **θ** = π/4, se muestran en la figura los resultados sobre X(t) y Y(t).

Determine los resultados para:

a) Valor esperado de X(t)
b) Valor esperado de Y(t)
c) Correlación cruzada entre X(t) y Y(t)
d) Covarianza cruzada de X(t) y Y(t)
e) Determinar si el proceso Y es estacionario o estacionario en el sentido amplio. Justifique su respuesta

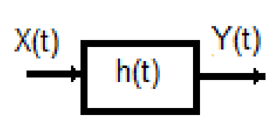
Tema 3. (15 puntos) Encuentre la densidad espectral de potencia $S_Y(f)$ de un proceso aleatorio con función de auto-correlación:

$$R_X(\tau) \cos(2 \pi f_0 \tau)$$



donde $R_X(\tau)$ es en si mismo una función de auto-correlación.
Determine la potencia promedio, si $R_X(\tau)$ es de tipo triangular y grafique Sy(f).

Tema 4 (15 puntos). La entrada a un filtro es un ruido blanco con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$. El filtro tiene la función de transferencia mostrada:



$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

a) Encuentre $S_{Y,X}(f)$ y $R_{Y,X}(\tau)$
b) Encuentre $S_Y(f)$ y $R_Y(\tau)$
c) Calcule la potencia promedio del proceso de salida

Formulario:

Función densidad

$$f_Y(y) = \sum_k \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Bigg|_{x=x_k}$$

Valor esperado

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Covarianza Cruzada

$$C_{X,Y}(\tau) = E[\{X(t) - m_X(t)\}\{Y(t+\tau) - m_Y(t+\tau)\}]$$
$$= R_X(\tau) - m_X(t)m_Y(t+\tau)$$

Suma de dos procesos WSS conjuntos:

Z(t) = X(t) +Y(t)

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_Y(\tau)$$

Retraso en el tiempo:

Y(t) = X(t-d), d constante, X(t) es WSS

$$R_{XY}(\tau) = E[Y(t+\tau)X(\tau)] = E[X(t+\tau-d)X(t)]$$
$$= R_X(\tau - d)$$

Identidad trigonométrica

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

Transformadas de Fourier

Linealidad $\quad a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$

$\quad a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$

Retraso en el tiempo

$x(t - T_d) \quad X(f)e^{\{-j\omega T_d\}}$

Cambio de escala $\quad x(at) \quad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

Conjugación $\quad x^*(t) \quad X^*(-f)$

Dualidad $\quad X(t) \quad X(-f)$

Rectangular

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$X(f) = T[Sa(\pi f T)]$$

Triangular

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$X(f) = T[Sa(\pi f T)]^2$$

Escalón Unitario

$$\mu(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j\,2\,\pi f}$$

Signo

$$sgn(t) = \begin{cases} +1, t > 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$$

$$X(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

Constante

x(t) = 1

$$X(f) = \delta(f)$$

Impulso en t=t0

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

$$X(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

Sinc $\quad x(t) = Sa\,(2\pi W\,t)$

$$X(f) = \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$

Fasor

$$x(t) = e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$X(f) = e^{j\varphi}\delta(f - f_0)$$

Senoide

$$x(t) = \cos(\omega_c t + \varphi)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{j\,\varphi}\delta(f + f_c)$$

Gausiano

$$x(t) = e^{-\pi\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}$$

$$X(f) = t_0 e^{-\pi(f t_0)^2}$$

Exponencial lateral

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t/T}, t > 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$$

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f T}$$

Exponencial Bilateral

$$x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$$

$$X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2}$$

Densidad Espectral de Potencia

$S_Y(f) = |H(f)|^2\, S_X(f)$

Densidad Espectral de Potencia cruzada

$S_{Y,X}(f) = H(f)\, S_X(f)$