



# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

## FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2017-2018	<b>PERIODO:</b>	Segundo Término
<b>MATERIA:</b>	ESTADÍSTICA	<b>PROFESORES:</b>	Cardenas N./Cevallos L./Cevallos H./Crow P./García S./Gonzalez S./Pambabay J./Sanchez J./Salazar V/Ugarte
<b>EVALUACIÓN:</b>	Tercera	<b>FECHA:</b>	Jueves 21 de Febrero 2018

### COMPROMISO DE HONOR

Yo, ..... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora *sencilla, ordinaria* para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.**

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma \_\_\_\_\_ NÚMERO DE MATRÍCULA:..... PARALELO:.....

### TEMA 1: (20 PUNTOS)

El presidente de una compañía se opone al seguro nacional de salud. Argumenta que su implementación sería muy costosa, en particular debido a que la existencia de este sistema tendería a fomentar permanencias hospitalarias más prolongadas, además de otros efectos. Adicionalmente, piensa que el tiempo de hospitalización depende del tipo de seguro que tengan las personas. Con estos antecedentes, le pide a la especialista en estadística de la empresa que verifique el asunto, por lo que tomó una muestra aleatoria de 660 hospitalizaciones y resumió los resultados en la siguiente tabla:

		Días en el hospital			
		<5	5-10 días	>10 días	Total
Fracción de costos cubiertos por el seguro	<25%	40	75	65	180
	25-50%	30	45	75	150
	>50%	40	100	190	330
	Total	110	220	330	660

Probar si lo que asume el presidente de la compañía es verdad, si el tiempo de hospitalización dependerá de la cobertura del seguro contratado por el asegurado.

### TEMA 2: (20 PUNTOS)

En el 2015 se realizó un estudio en el que se determinó que el tiempo de espera (en minutos) que tarda un estudiante en abordar un autobús para llegar a la ESPOL tiene la siguiente distribución continua de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2}x & 0 \leq x < 5 \\ \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2}x & 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

- a) Encuentre el valor K que justifique que se trata de una función de densidad de probabilidad. (6pts)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera sea a lo mucho 3 minutos?. (7pts)
- c) En un paralelo de 50 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos estudiantes tarde a lo mucho 3 minutos en abordar un autobús para llegar al campus?. (7pts)

### TEMA 3: (20 PUNTOS)

A continuación, se presentan datos correspondientes al peso en gramos de tilapias crecidas en cautiverio y que se las mide a fin de determinar su peso promedio luego de un cambio de su dieta durante un mes. ¿Se puede afirmar que estos datos pueden ser modelados por una Población que es  $N(320,25)$ ? Concluya usando valor p a un nivel de significancia del 5%.

Clase	Frecuencia
[305, 310)	7
[310, 315)	20
[315, 320)	39
[320, 325)	30
[325, 330)	17
[330, 335)	6
[335, 340)	1

**TEMA 4: (20 PUNTOS)**

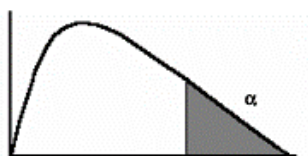
En un estudio de contaminación del aire realizado en una estación experimental, de ocho observaciones diferentes de aire se obtuvieron los siguientes montos de materia orgánica suspendida soluble en benceno (en microgramos por metro cúbico), 2.2; 1.8; 3.1; 2.0; 2.4; 2.0; 2.1; y 1.2. Suponiendo que la población muestreada es normal:

- Elabore un intervalo de confianza de 95% para la correspondiente media real.
- Si la probabilidad de un error tipo I debe ser cuando más de 0.01, ¿Estaría esta evidencia en contra de una hipótesis según la cual, en promedio, la contaminación será de al menos de 2.0 (en microgramos por metro cúbico).

**TEMA 5: (20 PUNTOS)**

Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X ="número de caras en los tres lanzamientos" e Y ="diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de sellos en los tres lanzamientos". Determine:

- Determine la distribución de probabilidad conjunta de X e Y (7pts)
- Determine la Media y desviación estándar de X e Y. (6pts)
- Determine si las variables son independientes? (7pts)

**Tabla de la Chi Cuadrado**

Grados de libertad	$\alpha=.995$	$\alpha=.99$	$\alpha=.975$	$\alpha=.95$	$\alpha=.90$	$\alpha=.10$	$\alpha=.05$	$\alpha=.025$	$\alpha=.01$	$\alpha=.005$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.597
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.345	12.838
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.070	12.833	15.086	16.750

**Tabla de la Normal**

TABLA Probabilidades de una Normal Estándar

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**RÚBRICA**

<b>AÑO:</b>	2017-2018	<b>PERIODO:</b>	Segundo Término
<b>MATERIA:</b>	ESTADÍSTICA	<b>PROFESORES:</b>	Cardenas N./Cevallos L./Cevallos H./Crow P./García S./Gonzalez S./Pambapaby J./Sanchez J./Salazar V/Ugarte
<b>EVALUACIÓN:</b>	Tercera	<b>FECHA:</b>	Jueves 21 de Febrero 2018

**TEMA 1: (20 PUNTOS)**

El presidente de una compañía se opone al seguro nacional de salud. Argumenta que su implementación sería muy costosa, en particular debido a que la existencia de este sistema tendería a fomentar permanencias hospitalarias más prolongadas, además de otros efectos. Adicionalmente, piensa que el tiempo de hospitalización depende del tipo de seguro que tengan las personas. Con estos antecedentes, le pide a la especialista en estadística de la empresa que verifique el asunto, por lo que tomó una muestra aleatoria de 660 hospitalizaciones y resumió los resultados en la siguiente tabla:

		Días en el hospital			
		<5	5-10 días	>10 días	Total
Fracción de costos cubiertos por el seguro	<25%	40	75	65	180
	25-50%	30	45	75	150
	>50%	40	100	190	330
	Total	110	220	330	660

Probar si lo que asume el presidente de la compañía es verdad, si el tiempo de hospitalización dependerá de la cobertura del seguro contratado por el asegurado.

**RESOLUCIÓN Y RÚBRICA**

Pearson's Chi-squared test

data: seguro

X-squared = 24.316, df = 4, p-value = 6.904e-05

Existe evidencia estadística para rechazar la independencia.

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
<b>Criterios</b>	No realiza cálculo alguno.	Define correctamente el contraste de hipótesis y realiza correctamente el cálculo de las frecuencias esperadas	Calcula correctamente el estadístico	Calcula correctamente el valor p y concluye bien.
<b>Puntos</b>	0	6	16	20

**TEMA 2: (20 PUNTOS)**

En el 2015 se realizó un estudio en el que se determinó que el tiempo de espera (en minutos) que tarda un estudiante en abordar un autobús para llegar a la ESPOL tiene la siguiente distribución continua de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2}x & 0 \leq x < 5 \\ \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2}x & 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

a) Encuentre el valor K que justifique que se trata de una función de densidad de probabilidad. (6pts)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera sea a lo mucho 3 minutos? (7pts)

d) En un paralelo de 50 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos estudiantes tarde a lo mucho 3 minutos en abordar un autobús para llegar al campus? (7pts)

**RESOLUCIÓN**

Literal a)

Para que f(x) sea una función de densidad debe cumplirse que:

1)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Para cumplir 2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dx + \int_0^5 \frac{x}{k^2} + \int_5^{10} \left( \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2}x \right) dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{10}{k} - \frac{25}{k^2} = 1$$

K=5

Para cumplir 1)

Para  $0 \leq x < 5$   $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{5}$

Para  $0 \leq x < 5$   $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{5}$

f(x) si cumple con 1)

Entonces f(x) es una función de densidad de probabilidad con K=5

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
<b>Criterios</b>	Plantea correctamente las condiciones	Plantea correctamente la condición 2 para encontrar K pero no encuentra el valor correcto.	Plantea correctamente la condición 2 para encontrar K y encuentra el valor correcto. No verifica la condición 1	Obtiene correctamente el valor de K y verifica que cumple las dos condiciones.
<b>Puntos</b>	1	2	4	6

b)  $P(x \leq 3) = \int_0^3 \frac{x}{25} dx = \frac{9}{50} = 0.18$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
<b>Criterios</b>	No realiza cálculo alguno	Plantea correctamente la los límites de la integral.	Plantea correctamente la integral con límites pero no encuentra el valor correcto de la probabilidad.	Obtiene la probabilidad correcta.
<b>Puntos</b>	0	2-	4	7

c)  $P(x >= 2) = 1 - (P(x=0) + P(x=1))$

Suceso: Un estudiante espere a lo mucho 3 minutos para abordar el autobus

P(suceso): 0.18

Variable aleatoria Binomial (50, 0.18)

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[ \binom{50}{0} 0.18^0 (1 - 0.18)^{50} + \binom{50}{1} 0.18^1 (1 - 0.18)^{49} \right]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.00058748$$

$$P(X \geq 2) = 0.999412523$$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
<b>Criterios</b>	Plantea correctamente la variable aleatoria	Plantea correctamente la variable aleatoria con el suceso y probabilidad asociada.	Plantea correctamente la variable aleatoria y valores a evaluar pero no obtiene el resultado correcto.	Obtiene la probabilidad correcta.
<b>Puntos</b>	1	2	4	7

### TEMA 3: (20 PUNTOS)

A continuación, se presentan datos correspondientes al peso en gramos de tilapias crecidas en cautiverio y que se las mide a fin de determinar su peso promedio luego de un cambio de su dieta durante un mes. ¿Se puede afirmar que estos datos pueden ser modelados por una Población que es  $N(320,25)$ ? Concluya usando valor p a un nivel de significancia del 5%.

Clase	Frecuencia
[305, 310)	7
[310, 315)	20
[315, 320)	39
[320, 325)	30
[325, 330)	17
[330, 335)	6
[335, 340)	1

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
<b>Criterios</b>	Postula el contraste de hipótesis correcto.	Postula la prueba de bondad de ajuste y calcula los valores esperados correctamente.	Postula la prueba de bondad de ajuste, calcula los valores esperados correctamente, reagrupa las clases y halla el estadístico de prueba correspondiente.	Postula la prueba de bondad de ajuste, calcula el estadístico de prueba y concluye correctamente con valor p
<b>Puntos</b>	3	9	15	20

**TEMA 4 (20 puntos):**

En un estudio de contaminación del aire realizado en una estación experimental, de ocho observaciones diferentes de aire se obtuvieron los siguientes montos de materia orgánica suspendida soluble en benceno (en microgramos por metro cúbico), 2.2; 1.8; 3.1; 2.0; 2.4; 2.0; 2.1; y 1.2. Suponiendo que la población muestreada es normal:

a. Elabore un intervalo de confianza de 95% para la correspondiente media real.

**SOLUCIÓN:**

$$n = 8$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{2.2 + 1.8 + 3.1 + 2.0 + 2.4 + 2.0 + 2.1 + 1.2}{8} = 2.1$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - 2.1)^2}{8 - 1} = \frac{(2.2 - 2.1)^2 + (1.8 - 2.1)^2 + \dots + (1.2 - 2.1)^2}{7} = 0.28857143$$

$$S = 0.53718845$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{\alpha/2} = t_{0.025}(\text{para } n - 1 = 7 \text{ grados de libertad}) = 2.365$$

Al sustituir los valores anteriores en la fórmula de intervalo de confianza de muestras pequeñas para  $\mu$ , obtenemos:

$$\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$2.1 - 2.365 \frac{0.53718845}{\sqrt{8}} < \mu < 2.1 + 2.365 \frac{0.53718845}{\sqrt{8}}$$

$$1.650 < \mu < 2.549$$

Luego, estamos 95% seguro de que el intervalo de 1.650 a 2.549 contiene la media real de la contaminación del aire.

**RÚBRICA:**

Desarrollo				
Nivel	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollo	Excelente
<b>Criterios</b>	No logra identificar el intervalo de confianza de muestra pequeña para $\mu$	Identifica correctamente al menos unos de los valores de $n, \bar{X}, S, \alpha$ y $t_{\alpha/2}$	Identifica los valores de $n, \bar{X}, S, \alpha$ y $t_{\alpha/2}$ , pero no logra construir el intervalo de confianza	Construye correctamente el intervalo de confianza de muestra pequeña para $\mu$
<b>Puntos</b>	0	1 - 2	3 - 4	5 - 10

- c. Si la probabilidad de un error tipo I debe ser cuando más de 0.01, ¿estaría esta evidencia en contra de una hipótesis según la cual, en promedio, la contaminación será de al menos de 2.0 (en microgramos por metro cúbico).

**SOLUCIÓN:**

**Hipótesis nula:**  $\mu = 2.0$  o  $\mu \leq 2.0$

**Hipótesis alternativa:**  $\mu > 2.0$

**Nivel de significancia:**  $\alpha = 0.01$

**Criterio:** Rechazar la hipótesis nula si  $t > 2.998$ , donde 2.998 es el valor para  $t_{0.01}$  que corresponde a  $8 - 1 = 7$  grados de libertad y

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

**Cálculos:**

$$t = \frac{2.1 - 2.0}{0.53718845/\sqrt{8}} = 0.526524$$

**Decisión:**

Dado que  $t=0.526524$  es menor que 2.998, la hipótesis nula no debe ser rechazada, esto es los datos no fundamenta el argumento.

**RÚBRICA:**

Desarrollo				
Nivel	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollo	Excelente
<b>Criterios</b>	No desarrolla procesos coherentes	Plantea correctamente la hipótesis nula $H_0$ y la hipótesis alternativa $H_a$ , pero comete errores al plantear el criterio para rechazar $H_0$	Plantea correctamente el criterio para rechazar $H_0$ y estima adecuadamente el estadístico de prueba t, pero no concluye correctamente	Concluye correctamente
<b>Puntos</b>	0	1 - 2	3 - 4	5 - 10

**TEMA 5: (20 PUNTOS)**

Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X ="número de caras en los tres lanzamientos" e Y ="diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de sellos en los tres lanzamientos". Determine:

- d) Determine la distribución de probabilidad conjunta de X e Y
- e) Determine la Media y desviación estándar de X e Y.
- f) Determine si las variables son independientes?

Literal a) Determine la distribución de probabilidad conjunta de X e Y

Moneda 1	Moneda 2	Moneda 3	X= Número de caras	Y=   Caras - Sellos
C	C	C	3	3
C	C	S	2	1
C	S	C	2	1
C	S	S	1	1
S	S	S	0	3
S	S	C	1	1
S	C	S	1	1
S	C	C	2	1

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}; & x = 2, \quad y = 1 \\ \frac{3}{8}; & x = 1, \quad y = 1 \\ \frac{1}{8}; & x = 0, \quad y = 3 \\ \frac{1}{8}; & x = 3, \quad y = 3 \end{cases}$$

Y/X	0	1	2	3	fy
1	-	3/8	3/8	-	6/8
3	1/8	-	-	1/8	2/8
Fx	1/8	3/8	3/8	1/8	1

**RÚBRICA:**

Nivel	Insuficiente	Desarrollado	Excelente
<b>Criterios</b>	No logra identificar los valores que adopta las variables	Desarrolla el espacio muestral, y determina los valores	Representa la distribución conjunta de forma correcta
<b>Puntos</b>	0	3	7

Literal b) Determine la Media y desviación estándar de X e Y.

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 1.5$$

$$E(y) = 1\left(\frac{6}{8}\right) + 3\left(\frac{2}{8}\right) = 1.5$$

$$E(x^2) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 4\left(\frac{3}{8}\right) + 9\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

$$Var(x) = 3 - 2.25 = 0.75 \rightarrow Sd(x) = 0.866$$

$$E(y^2) = 1\left(\frac{6}{8}\right) + 9\left(\frac{2}{8}\right) = 3$$

$$Var(y) = 3 - 2.25 = 0.75 \rightarrow Sd(y) = 0.866$$

Nivel	Insuficiente	Desarrollado	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno	Plantea correctamente el desarrollo	Proporciona la respuesta correcta
Puntos	0	3	6

Literal c) ¿X e Y son independientes?

No son independientes  $f(1,3) = \frac{3}{8}$  y  $f(1)f(3) = \frac{3}{8}\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{3}{32}$  no son iguales

Nivel	Insuficiente	Desarrollado	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno	Identifica que la independencia ocurre cuando $f(x,y) = f(x) * f(y)$	Proporciona la conclusión correcta
Puntos	0	4	7