ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2018 - 2019	**PERIODO:** PRIMER TÉRMINO
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES	**PROFESORES:** Jennifer Avilés, José Castro, C. Mario Celleri, Antonio Chong, David De Santis, Liliana Pérez, Eduardo Rivadeneira, Hernando Sánchez, Emilk Sempértegui.
EVALUACIÓN: SEGUNDA	**FECHA:** 27 AGOSTO 2018

Tema 1 (5 Puntos: 1 Punto cada literal)
Complete las siguientes frases, para lo cual NO es necesario justificar las respuestas.

a) $\{f(x), g(x), h(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $a_1y'''(x) + a_2y''(x) = 0$ donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \neq 0$ si: $\boldsymbol{f(x), g(x)}$ **y** $\boldsymbol{h(x)}$ **son soluciones de la ecuación diferencial y además son linealmente independientes.**

b) Si $y(x) = c_1 + c_2 cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + c_3 sen\left(\frac{\pi}{4}x\right); c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ es la solución general de la ecuación $y'''(x) + b_1y''(x) + b_2y'(x) + b_3y(x) = 0$ donde b_1, b_2, b_3 son constantes, entonces la solución particular de $y'''(x) + b_1y''(x) + b_2y'(x) + b_3y(x) = -x\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ usando el método de los coeficientes indeterminados se plantea de la forma: $\boldsymbol{\left[(Ax + B)\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + (Cx + D)\,\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]x.}$

c) Si $t^4y^{(4)}(t) + A_3t^3y^{(3)}(t) + A_2t^2y^{(2)}(t) + A_1ty^{(1)}(t) = 0$ donde A_3, A_2, A_1 son constantes tiene a $\{1, t^2, t^3, t^{-1}\}$ como un conjunto fundamental de soluciones, la solución particular de $t^4y^{(4)}(t) + A_3t^3y^{(3)}(t) + A_2t^2y^{(2)}(t) + A_1ty^{(1)}(t) = \sec(t)$ usando el método de variación de parámetros se plantea de la forma: $\boldsymbol{y_p(t) = v_1(t) + t^2v_2(t) + t^3v_3(t) + t^{-1}v_4(t)}$ con la condición de que se satisfaga el sistema de ecuaciones: $\boldsymbol{\begin{cases} v_1' + t^2v_2' + t^3v_3' + t^{-1}v_4' = 0 \\ 2tv_2' + 3t^2v_3' - t^{-2}v_4' = 0 \\ 2v_2' + 6tv_3' + 2t^{-3}v_4' = 0 \\ 6v_3' - 6t^{-4}v_4' = t^{-4}\sec(t) \end{cases}}$.

d) Considere el sistema $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, donde A es una matriz de $3x3$. Si A tiene como valores propios a $r = 2$ y $r = -1$ tal que el primero tiene vectores propios $[0 \quad 1 \quad 0]^T$, $[\sqrt{2} \quad 0 \quad 1]^T$ y el segundo tiene vector propio $[1 \quad 0 \quad -\sqrt{2}]^T$, entonces la solución general del sistema está dada por:

$$\boldsymbol{x(t) = c_1e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\\-\sqrt{2}\end{bmatrix};\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.}$$

e) Considere el sistema $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, donde A es una matriz de $2x2$. Si A tiene valores propios $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ con vectores propios $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \pm i\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$, la solución general del sistema está dada por:

$$\boldsymbol{x(t) = c_1e^{-\frac{t}{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}\mathbf{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right) + c_2e^{-\frac{t}{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathbf{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + \begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right);\ c_1, c_2, \in \mathbb{R}.}$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Completa correctamente cada literal sin necesidad de proporcionar justificación alguna.	1.0 P cada literal
TOTAL	**5.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Tema 2 (5 Puntos)
Demuestre formalmente la siguiente proposición.
Sea $f(t)$ es una función seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial cuando $t \to \infty$. Si $f(t)$ satisface $f(t+T) = f(t)$ para algún número positivo fijo T, entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ está dada por $L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-ST}} \int_0^T e^{-St} f(t)dt$; $S > 0$.

<u>Una manera de realizar la demostración es:</u>

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-St} f(t)dt = \int_0^T e^{-St} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-St} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-St} f(t)dt + \cdots$$
$$L[f(t)] = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-St} f(t)dt \right)$$

Se aplica el cambio de variable:
$$v = t - nT \ \ , \ \ dv = dt \ \ , \ \ si\ t = nT \Longrightarrow v = 0 \ \ , \ \ si\ t = (n+1)T \Longrightarrow v = T$$

Entonces se tiene:
$$L[f(t)] = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^T e^{-S(v+nT)} f(v+nT)dv \right)$$

Dado que f es periódica de periodo T, entonces $f(v+nT) = f(v)$:
$$L[f(t)] = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^T e^{-Sv} e^{-SnT} f(v)dv \right)$$
$$L[f(t)] = \sum_{n=0}^\infty \left(e^{-SnT} \int_0^T e^{-Sv} f(v)dv \right)$$
$$L[f(t)] = \left(\int_0^T e^{-Sv} f(v)dv \right) \sum_{n=0}^\infty (e^{-ST})^n$$

Dado que $\sum_{n=0}^\infty (e^{-ST})^n$ es una serie geométrica convergente a $\frac{1}{1-e^{-ST}}$ siempre que $S > 0$:
$$L[f(t)] = \left(\int_0^T e^{-St} f(t)dt \right) \left(\frac{1}{1-e^{-ST}} \right) \ ; \ S > 0$$
$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-ST}} \int_0^T e^{-St} f(t)dt \ ; \ S > 0.$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Realiza una secuencia de pasos válidos para demostrar la proposición.	5.0 P
TOTAL	**5.0 P**

Tema 3 (10 Puntos)

Halle las funciones $y(\theta)$, $w(\theta)$ y $z(\theta)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones, donde el operador * denota el producto de convolución:

$$\begin{cases} y'(\theta) - (cos(\theta) * y(\theta)) = z(\theta) - w(\theta) \\ w'(\theta) = y'(\theta)\delta(\theta - \pi) \\ y'(\theta) = \cos(\theta) \end{cases} ;\ y(0) = 1\ ;\ w(0) = A\ ;\ A \in \mathbb{R}\ ;\ \theta \in [0, \infty).$$

<u>Desarrollo:</u>

De la tercera ecuación:

$y(\theta) = \int \cos(\theta) d\theta = sen(\theta) + c_1;\ c_1 \in \mathbb{R}$

Sustituyendo $y(0) = 1$: $sen(0) + c_1 = 1 \ \rightarrow\ c_1 = 1 \ \rightarrow\ y(\theta) = sen(\theta) + 1$

De la segunda ecuación:

$w'(\theta) = \cos(\theta)\delta(\theta - \pi) \ \rightarrow\ w'(\theta) = \cos(\pi)\delta(\theta - \pi) \ \rightarrow\ w'(\theta) = -\delta(\theta - \pi)$

Aplicando la transformada de Laplace: $L[w'(\theta)] = L[-\delta(\theta - \pi)]$.

- $L[w'(\theta)] = SW(S) - w(0) = SW(S) - A$
- $L[-\delta(\theta - \pi)] = -e^{-\pi S}$

Sustituyendo se tiene:

$SW(S) - A = -e^{-\pi S} \rightarrow W(S) = \frac{A}{S} - \frac{e^{-\pi S}}{S} \rightarrow w(\theta) = L^{-1}\left[\frac{A}{S} - \frac{e^{-\pi S}}{S}\right] \rightarrow w(\theta) = A - \mu(\theta - \pi); A \in \mathbb{R}$

De la primera ecuación:

$\cos(\theta) - \int_0^\theta cos(\theta - \alpha)\,(sen(\alpha) + 1)d\alpha = z(\theta) - \big(A - \mu(\theta - \pi)\big)$

Entonces, se tiene: $z(\theta) = \cos(\theta) - \int_0^\theta cos(\theta - \alpha)\,(sen(\alpha) + 1)d\alpha + A - \mu(\theta - \pi)$

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta cos(\theta - \alpha)\,(sen(\alpha) + 1)d\alpha &= \int_0^\theta (cos(\theta - \alpha)\,sen(\alpha) + cos(\theta - \alpha))d\alpha \\
&= \int_0^\theta \left(\frac{1}{2}[sen(\theta) + sen(2\alpha - \theta)] + cos(\theta - \alpha)\right) d\alpha \\
&= \left[\frac{\alpha}{2} sen(\theta) - \frac{1}{4} cos(2\alpha - \theta) - sen(\theta - \alpha)\right]_0^\theta \\
&= \left(\frac{\theta}{2} sen(\theta) - \frac{1}{4} cos(\theta)\right) - \left(-\frac{1}{4} cos(-\theta) - sen(\theta)\right) \\
&= \frac{\theta}{2} sen(\theta) - \frac{1}{4} cos(\theta) + \frac{1}{4} cos(\theta) + sen(\theta)
\end{aligned}$$

$\int_0^\theta cos(\theta - \alpha)\,(sen(\alpha) + 1)d\alpha = \left(\frac{\theta}{2} + 1\right) sen(\theta)$

Así, se tiene que: $z(\theta) = \cos(\theta) - \left(\frac{\theta}{2} + 1\right) sen(\theta) + A - \mu(\theta - \pi)$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	PUNTAJE
Halla la función $y(\theta)$.	2.0 P
Halla la función $w(\theta)$.	4.0 P
Halla la función $z(\theta)$.	4.0 P
TOTAL	**10.0 P**

Tema 4 (10 Puntos)

Para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que se muestra a continuación, obtenga la solución general usando series de potencia alrededor de $x_0 = 0$, identificando las funciones a las que las series solución convergen:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

Desarrollo:

Sean $\boldsymbol{P(x) = x^2}$; $\boldsymbol{Q(x) = x}$; $\boldsymbol{R(x) = x^2 - \frac{1}{4}}$. Dado que P, Q, y R son polinomios y no hay factores que sean comunes para ellos 3, los valores x_0 que satisfacen $P(x_0) = 0$ se denominan puntos singulares de la ecuación diferencial ordinaria (EDO). Por lo tanto, $x_0 = 0$ es un punto singular de la EDO dada.

Además, dado que: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)Q(x)}{P(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x)(x)}{x^2} = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^2 R(x)}{P(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2} = -\frac{1}{4}$ existen y son finitos, se dice que $x_0 = 0$ es un punto singular regular.

Para la EDO dada se supone soluciones de la forma: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.
De este modo, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$ y $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$.

Sustituyendo estas series en la EDO:

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4} a_n x^{n+r} = 0$$

Realizando el siguiente cambio de variable a la 3era serie para que todas las series tengan el mismo exponente para $\boldsymbol{x}$: $n + r + 2 = m + r \rightarrow n = m - 2 \rightarrow m = n + 2$. Por lo tanto:

La 3era serie: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r}$.

Aplicando un 2do cambio de variable: $m = n$, se obtiene: $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r}$.

Así: $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4} a_n x^{n+r} = 0$

Desarrollando términos iniciales para que el índice de todas las series inicie en el mismo valor:

$$\underbrace{r(r-1)a_0 x^r}_{n=0} + \underbrace{(r+1)r a_1 x^{r+1}}_{n=1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \underbrace{r a_0 x^r}_{n=0} + \underbrace{(r+1) a_1 x^{r+1}}_{n=1} +$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n+r} \underbrace{-\tfrac{1}{4} a_0 x^r}_{n=0} \underbrace{-\tfrac{1}{4} a_1 x^{r+1}}_{n=1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{1}{4} a_n x^{n+r} = 0$$

Agrupando términos semejantes, se obtiene:

$$\left(r(r-1) + r - \tfrac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left((1+r)r + (1+r) - \tfrac{1}{4}\right) a_1 x^{r+1} +$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\left((n+r)(n+r-1) + (n+r) - \tfrac{1}{4}\right) a_n + a_{n-2}\right] x^{n+r} = 0$$

Igualando coeficientes, se obtiene los valores de $\boldsymbol{r}$ y la expresión de recurrencia:

- $\left(r(r-1) + r - \frac{1}{4}\right) a_0 = 0 \rightarrow r^2 - \frac{1}{4} = 0$ (ecuación indicial) $\rightarrow r = \frac{1}{2} \vee r = -\frac{1}{2}$
  (a_0 se considera como variable libre, esto es, $a_0 \in \mathbb{R}$).
- $\left((1+r)r + (1+r) - \frac{1}{4}\right) a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$.
- $\left((n+r)(n+r-1) + (n+r) - \frac{1}{4}\right) a_n + a_{n-2} = 0$; $n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z}$
  $$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \frac{1}{4}}; \; n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando los valores de $\boldsymbol{r}$ en la expresión de recurrencia y generando términos iniciales, se obtiene:

Para $r = \frac{1}{2}$: $a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+1)}$; $n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z}$

$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 3}$; $a_3 = \frac{-a_1}{3(4)} = 0$

$a_4 = -\frac{a_2}{4(5)} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$; $a_5 = \frac{-a_3}{5(6)} = 0$

$a_6 = -\frac{a_4}{6(7)} = -\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$; $a_7 = \frac{-a_5}{7(8)} = 0$

$a_8 = -\frac{a_6}{8(9)} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$; $a_9 = \frac{-a_7}{9(10)} = 0$

Entonces para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$a_{2k} = \frac{(-1)^n a_0}{(2k+1)!}$; $a_{2k+1} = 0$

Para $r = -\frac{1}{2}$: $a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)}$; $n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z}$

$a_2 = -\frac{a_0}{2(1)}$; $a_3 = \frac{-a_1}{3(2)} = 0$

$a_4 = -\frac{a_2}{4(3)} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$; $a_5 = \frac{-a_3}{5(4)} = 0$

$a_6 = -\frac{a_4}{6(5)} = -\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$; $a_7 = \frac{-a_5}{7(6)} = 0$

$a_8 = -\frac{a_6}{8(7)} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$; $a_9 = \frac{-a_7}{9(8)} = 0$

Entonces para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$a_{2k} = \frac{(-1)^n a_0}{(2k)!}$; $a_{2k+1} = 0$

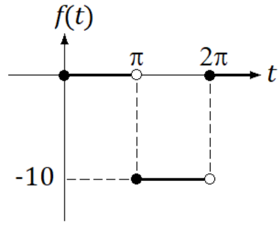
Así, las soluciones están dadas por:
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$
$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{(2k+1)+r}$

Para $r = \frac{1}{2}$:
$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!} x^{2k+1-\frac{1}{2}} = a_0 x^{-\frac{1}{2}} sen(x); a_0 \in \mathbb{R}$
Para $r = -\frac{1}{2}$:
$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}} = a_0 x^{-\frac{1}{2}} cos(x); a_0 \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial está dada por:
$$y(x) = c_1 x^{-\frac{1}{2}} sen\,(x) + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \cos(x)\,; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

CRITERIO DE CALIFICACION **EL ESTUDIANTE:**	**PUNTAJE**
Muestra que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial e indica la forma en la que se plantea la solución usando serie de potencias.	2.0 P
Sustituye la solución planteada y sus derivadas en la ecuación diferencial para obtener la ecuación indicial con sus soluciones y la expresión de recurrencia para los coeficientes de la serie planteada.	3.0 P
Para cada raíz de la ecuación indicial, genera una cantidad adecuada de coeficientes iniciales para obtener la respectiva solución en serie de potencia y la función a la que ésta converge.	4.0 P
Indica la solución general de la ecuación diferencial.	1.0 P
TOTAL	**10.0 P**

Tema 5 (10 Puntos)
Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con movimiento unidimensional suspendido desde un punto fijo. La masa del sistema, la cual corresponde a la masa de un bloque, es de $2[kg]$, el coeficiente de amortiguamiento debido a la resistencia del medio es de $4[N.s/m]$, la constante de restitución del resorte es de $10[N/m]$. El sistema inicialmente se encuentra en reposo y en equilibrio, esto es, la posición y velocidad inicial del bloque son iguales a cero. Considerando que el sistema recibe una excitación externa dada por la función $f(t)$ del gráfico, encuentre la posición del bloque en cualquier instante de tiempo $t \geq 0$ con respecto a la posición de equilibrio usando la transformada de Laplace.



Desarrollo:
A partir de un diagrama de cuerpo libre del sistema en movimiento:
El modelo matemático que se obtiene usando la segunda ley de Newton es:
$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t), \text{ donde:}$$
$x(t)$: posición del bloque en el tiempo t con respecto a la posición de equilibrio y con signo positivo hacia abajo [m],
m: es la masa del bloque del sistema,
cx': fuerza de resistencia del medio, donde c es el coeficiente de amortiguamiento,
$kx(t)$: es la fuerza de restitución del resorte, donde k es la respectiva constante de restitución,
$f(t)$: representa la excitación externa que actúa sobre el cuerpo considerando signo positivo hacia abajo (podría considerarse también signo positivo hacia arriba dado que esto no se indica en el enunciado, con lo cual el modelo matemático quedaría como $mx'' + cx' + kx = -f(t)$),

Del gráfico, $f(t) = \begin{cases} 0 \ ; & 0 \leq x < \pi \\ -10 \ ; & \pi \leq x < 2\pi \\ 0 \ ; & x \geq 2\pi \end{cases}$. Entonces $f(t) = -10\big(\mu_\pi(t) - \mu_{2\pi}(t)\big)$.

Así, el problema de valor inicial que describe el movimiento del bloque está dado por:
$$2x''(t) + 4x'(t) + 10x(t) = -10[\mu_\pi(t) - \mu_{2\pi}(t)] \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace:
$$2L[x''(t)] + 4L[x'(t)] + 10L[x(t)] = -10(L[\mu_\pi(t)] - L[\mu_{2\pi}(t)])$$

- $L[x''(t)] = S^2X(S) - Sx(0) - x'(0) = S^2X(S)$
- $L[x'(t)] = SX(S) - x(0) = SX(S) \quad ; \quad L[x(t)] = X(S)$
- $L[\mu_\pi(t)] = \frac{e^{-\pi S}}{S} \quad ; \quad L[\mu_{2\pi}(t)] = \frac{e^{-2\pi S}}{S}$

$$2S^2X(S) + 4SX(S) + 10X(S) = -10\frac{e^{-\pi S}}{S} + 10\frac{e^{-2\pi S}}{S}$$
$$(2S^2 + 4S + 10)X(S) = -10\frac{e^{-\pi S}}{S} + 10\frac{e^{-2\pi S}}{S}$$
$$X(S) = -5\frac{e^{-\pi S}}{S(S^2+2S+5)} + 5\frac{e^{-2\pi S}}{S(S^2+2S+5)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:
$$x(t) = L^{-1}\left[-5\frac{e^{-\pi S}}{S(S^2+2S+5)} + 5\frac{e^{-2\pi S}}{S(S^2+2S+5)}\right]$$
Una manera de proceder es realizando la siguiente descomponiendo en fracciones parciales:
$$\frac{1}{S(S^2+2S+5)} = \frac{A}{S} + \frac{BS+C}{S^2+2S+5} \;\rightarrow\; \frac{1}{S(S^2+2S+5)} = \frac{A(S^2+2S+5)+(BS+C)S}{S(S^2+2S+5)} \;\rightarrow\; 1 = (A+B)S^2 + (2A+C)S + 5A$$
$$0 = A + B\ ;\ 0 = 2A + C\ ;\ 1 = 5A \;\rightarrow\; A = 1/5;\ B = -1/5\ ;\ C = -2/5 \;\rightarrow\; \frac{1}{S(S^2+2S+5)} = \frac{1}{5S} - \frac{S+2}{5(S^2+2S+5)}$$
Entonces, se tiene que:
$$x(t) = L^{-1}\left[-e^{-\pi S}\left(\frac{1}{S} - \frac{S+2}{S^2+2S+5}\right) + e^{-2\pi S}\left(\frac{1}{S} - \frac{S+2}{S^2+2S+5}\right)\right]$$
$$x(t) = L^{-1}\left[-\frac{e^{-\pi S}}{S} + e^{-\pi S}\frac{S+2}{S^2+2S+5} + \frac{e^{-2\pi S}}{S} - e^{-2\pi S}\frac{S+2}{S^2+2S+5}\right]$$
$$x(t) = L^{-1}\left[-\frac{e^{-\pi S}}{S} + e^{-\pi S}\frac{S+1+1}{(S+1)^2+4} + \frac{e^{-2\pi S}}{S} - e^{-2\pi S}\frac{S+1+1}{(S+1)^2+4}\right]$$
$$x(t) = L^{-1}\left[-\frac{e^{-\pi S}}{S} + e^{-\pi S}\underbrace{\frac{(S+1)}{(S+1)^2+4}}_{G(S)} + e^{-\pi S}\underbrace{\frac{1}{(S+1)^2+4}}_{H(S)} + \frac{e^{-2\pi S}}{S} - e^{-2\pi S}\underbrace{\frac{(S+1)}{(S+1)^2+4}}_{G(S)} - e^{-2\pi S}\underbrace{\frac{1}{(S+1)^2+4}}_{H(S)}\right]$$
$$x(t) = -\mu_\pi(t) + \mu_\pi(t)g(t-\pi) + \mu_\pi(t)h(t-\pi) + \mu_{2\pi}(t) - \mu_{2\pi}(t)g(t-2\pi) - \mu_{2\pi}(t)h(t-2\pi),$$

tal que: $g(t)=L^{-1}[G(S)]=L^{-1}\left[\frac{(S+1)}{(S+1)^2+4}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{S}{S^2+4}\right]=e^{-t}\cos(2t)$

$h(t)=L^{-1}[H(S)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2+4}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+4}\right]=\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial está dada por:

$$x(t)=-\mu_\pi(t)+\mu_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\cos\big(2(t-\pi)\big)+\mu_\pi(t)\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\mathrm{sen}\big(2(t-\pi)\big)+$$
$$\mu_{2\pi}(t)-\mu_{2\pi}(t)e^{-(t-2\pi)}\cos\big(2(t-2\pi)\big)-\mu_{2\pi}(t)\frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}\mathrm{sen}\big(2(t-2\pi)\big);\ t\geq 0\ \ [\mathrm{m}]$$

$$x(t)=\mu_\pi(t)\left(-1+e^{-(t-\pi)}\left[\cos\big(2(t-\pi)\big)+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\big(2(t-\pi)\big)\right]\right)+$$
$$\mu_{2\pi}(t)\left(1-e^{-(t-2\pi)}\left[\cos\big(2(t-2\pi)\big)+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\big(2(t-2\pi)\big)\right]\right)\ ;\ t\geq 0\ \ [\mathrm{m}]$$

$$x(t)=\mu_\pi(t)\left(-1+e^{-(t-\pi)}\left[\cos(2t)+\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t)\right]\right)$$
$$+\mu_{2\pi}(t)\left(1-e^{-(t-2\pi)}\left[\cos(2t)+\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t)\right]\right)\ ;\ t\geq 0\ \ [\mathrm{m}]$$

CRITERIO DE CALIFICACION El estudiante:	**PUNTAJE**
Determina el problema de valor inicial que describe el movimiento del bloque del sistema, indicando lo que representa cada expresión de la ecuación diferencial.	3.0 P
Aplica la transformada de Laplace al problema de valor inicial y obtiene una expresión para la transformada de la posición del bloque del sistema.	3.0 P
Aplica la transformada inversa de Laplace para determina la posición del bloque del sistema para cualquier tiempo t.	4.0 P
TOTAL	**10.0 P**

Tema 6 (10 Puntos)
Usando el método del operador diferencial determine la solución general del sistema:

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - x(t) + y(t) = -1 \\ x'(t) + y'(t) - x(t) = t^2 \end{cases}$$

(Nota: No aplique la transformada de Laplace en la resolución del ejercicio)

Desarrollo:
Expresando el sistema con la notación del operador diferencial se tiene:

$$\begin{cases} D^2x + Dy - x(t) + y(t) = -1 \\ Dx + Dy - x(t) = t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D^2 - 1)x + (D + 1)y = -1 \\ (D - 1)x + Dy = t^2 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $-D$ y la segunda por $(D + 1)$ para luego sumar las ecuaciones resultantes de manera que se elimine la variable y:

$$\begin{cases} -D(D^2 - 1)x - D(D + 1)y = -D(-1) \\ (D + 1)(D - 1)x + (D + 1)Dy = (D + 1)(t^2) \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones resultantes se tiene que:

$$[-D(D^2 - 1) + (D + 1)(D - 1)]x = 2t + t^2$$
$$-D^3x + Dx + D^2x - x = 2t + t^2$$
$$x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = -2t - t^2$$

Se halla solución complementaria $x_c(t)$ resolviendo la ecuación homogénea:
$x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 0$
Se plantea la solución: $x(t) = e^{rt} \rightarrow x'(t) = re^{rt} \rightarrow x''(t) = r^2e^{rt} \rightarrow x'''(t) = r^3e^{rt}$.
Reemplazando en la ecuación: $r^3e^{rt} - r^2e^{rt} - re^{rt} + e^{rt} = 0 \rightarrow e^{rt}(r^3 - r^2 - r + 1) = 0$.
Entonces, $r^2(r - 1) - (r - 1) = 0 \rightarrow (r - 1)(r^2 - 1) = 0 \rightarrow (r - 1)^2(r + 1) = 0$
$\rightarrow r = 1$ con $m = 2$ y $r = -1$ con $m = 1$. Así, $x_c(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Para hallar una solución particular para la ecuación no homogénea, es válido usar el método de los coeficientes indeterminados:
Se plantea la solución: $x_p(t) = (At^2 + Bt + C)t^S$ tal que $S = 0$ es el menor entero no negativo con el cual cada término de $x_p(t)$ es linealmente independiente a cada término de $x_c(t)$.
Entonces: ${x_p}'(t) = 2At + B \rightarrow {x_p}''(t) = 2A \rightarrow {x_p}'''(t) = 0$
Sustituyendo en la ecuación: $0 - 2A - 2At - B + At^2 + Bt + C = -2t - t^2$

$$At^2 + (B - 2A)t + (C - 2A - B) = -2t - t^2$$
$$A = -1\ ;\ B - 2A = -2\ ;\ C - 2A - B = 0$$
$$A = -1\ ;\quad B = -4\quad ;\ C = -6 \quad\rightarrow\quad x_p(t) = -t^2 - 4t - 6$$

La solución general para la función incógnita $x(t)$ es igual a:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} - t^2 - 4t - 6\ ;\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar la función incógnita $y(t)$ se puede proceder de forma similar pero eliminando la incógnita $x(t)$. Para el presente ejercicio también es posible hallar $y(t)$ de la segunda ecuación del sistema como sigue:

$$x'(t) + y'(t) - x(t) = t^2 \quad\rightarrow\quad y(t) = \int\left(t^2 - x'(t) + x(t)\right)dt$$
$$y(t) = \int\begin{pmatrix} t^2 - (c_1e^t + c_2e^t + c_2te^t - c_3e^{-t} - 2t - 4) \\ +(c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} - t^2 - 4t - 6) \end{pmatrix}dt$$
$$y(t) = \int(-c_2e^t + 2c_3e^{-t} - 2t - 2)\,dt$$
$$y(t) = -c_2e^t - 2c_3e^{-t} - t^2 - 2t + c_4\ ;\ c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

CRITERIO DE CALIFICACION El estudiante:	**PUNTAJE**
Expresa el sistema usando el operador diferencial.	2.0 P
Aplica eliminación Gaussiana para obtener una ecuación diferencial con una sola función incógnita del sistema, y halla esta incógnita.	5.0 P
Sustituye la incógnita obtenida en alguna de las ecuaciones del sistema para obtener la otra función incógnita; o aplica nuevamente eliminación Gaussiana para obtener una ecuación diferencial con la incógnita que falta hallar y resuelve dicha ecuación.	3.0 P
TOTAL	**10.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)