ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2018	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Argüello G., Avilés J., Baquerizo G., Chóez M., Díaz R., Laveglia F., Mejía M., Ramos P., Ramos M., Ronquillo C., Toledo X.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	27/agosto/2018

S O L U C I Ó N y R Ú B R I C A

1) (3 PUNTOS) Un compañero suyo está resolviendo el siguiente problema sobre cálculo de límites aplicando el teorema de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 3}{4x^3} = \lim_{x \to 1} \frac{12x}{12x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Explique a su compañero si está en lo correcto o cuál es el error que estaría cometiendo.

Solución:

Al evaluar la tendencia en la función racional del primer límite, se tiene efectivamente una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que se puede aplicar el TEOREMA DE L'HOPITAL.

Sin embargo, en el segundo límite ya no existe indeterminación alguna. No se debe seguir aplicando este teorema, sino que se puede aplicar el TEOREMA DE SUSTITUCIÓN:

$$\lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 3}{4x^3} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ El compañero sí está cometiendo un error.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre la aplicabilidad del teorema de L'Hopital.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Indica que no existe error alguno.	**Solamente indica que hay error pero no lo sustenta.**	**Identifica que hay error pero se equivoca al evaluar el límite.**	**Especifica cuál es el error en el cálculo y evalúa bien el límite.**
	0	**1**	**2**	**3**

2) (10 PUNTOS) Justificando su respuesta, establezca si la proposición dada es VERDADERA O FALSA.

a) (5 PUNTOS) $$\int_{-2}^{0} |2x+1|\,dx = 5$$

Solución:

Descomponemos la función valor absoluto, basándonos en su definición:

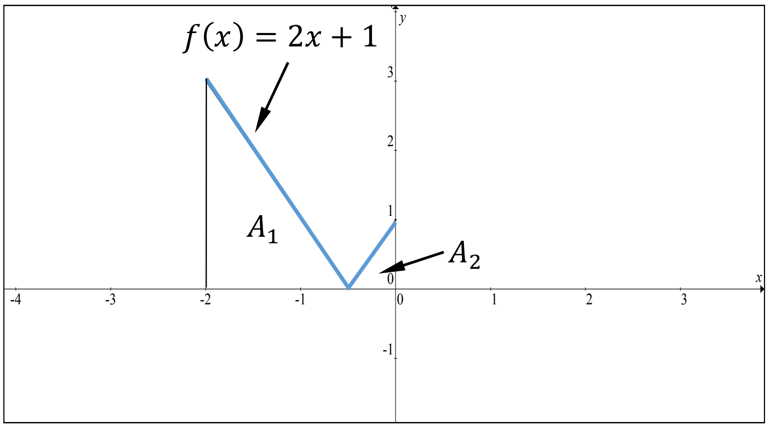
$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1\,, & x \geq -\dfrac{1}{2} \\ -2x-1\,, & x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Aplicamos la PROPIEDAD ADITIVA de las integrales definidas:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} -(2x+1)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (2x+1)\,dx &= -(x^2+x)\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} + (x^2+x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} \\ &= -\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-(4-2)\right)+\left(0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{4}-2\right)+\left(0-\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{9}{4}+\frac{1}{4} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-2}^{0} |2x+1|\,dx = \frac{5}{2}}$$

Otra opción es calcular el área de la región comprendida entre la función valor absoluto y el eje X:



Se puede observar que se definen dos triángulos rectángulos cuyas áreas son respectivamente:

$A_1 = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)(3)}{2} = \dfrac{9}{4}\ [u^2]$ y $A_2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)(1)}{2} = \dfrac{1}{4}\ [u^2]$, valores que son coincidentes con los cálculos previos y cuya suma es igual a $\dfrac{5}{2}\ [u^2]$.

∴ La proposición es FALSA.

Rúbrica para la primera forma de resolución:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre la propiedad aditiva de las integrales definidas.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No puede descomponer el valor absoluto, ni aplica bien la propiedad aditiva.	Descompone bien el valor absoluto pero aplica mal la propiedad aditiva.	Descompone bien el valor absoluto, aplica bien la propiedad aditiva; pero, o se equivoca en la integración o en la evaluación o no concluye.	Descompone bien el valor absoluto, integra bien, evalúa correctamente y concluye sobre el valor de verdad de la proposición.
	0	1	2 – 4	5

Rúbrica para la segunda forma de resolución:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre cálculo de áreas de superficies triangulares.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No identifica los triángulos que se forman para el cálculo del área solicitada.	Identifica los triángulos para el cálculo del área solicitada, pero tiene inconvenientes con alguna de sus longitudes.	Identifica los triángulos y sus longitudes; pero, o se equivoca en uno de los cálculos parciales de área, o en el área total, o no concluye.	Identifica los triángulos y sus longitudes, calcula correctamente las áreas de cada uno y el área total, así como concluye sobre el valor de verdad de la proposición.
	0	1	2 – 4	5

b) (5 PUNTOS) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})\right)^2}\,\boldsymbol{dx}$ **es convergente**.

Solución:

Aplicamos la técnica de INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN con el cambio de variable:

$$u = ln(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{ccc} x = e^2 & \rightarrow & u = 2 \\ x = +\infty & \rightarrow & u = +\infty \end{array}$$

Por lo que, la nueva integral impropia se redefine así:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{du}{u^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b u^{-2}\, du = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) \Bigg|_2^b = -\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

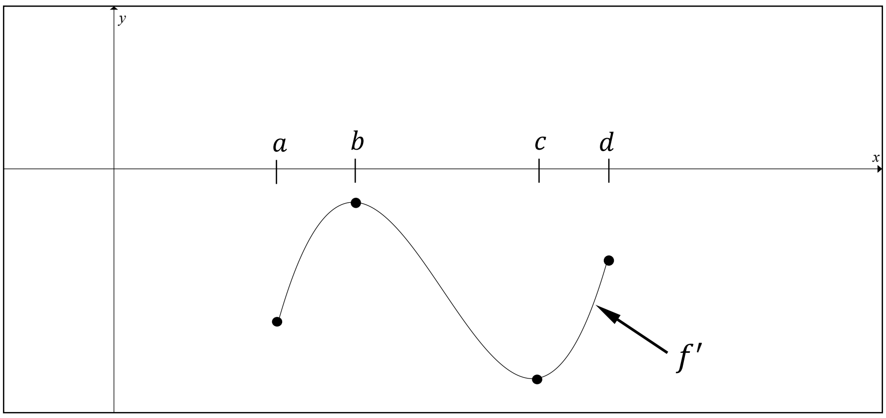
Concluimos entonces que la integral es convergente.

∴ La proposición es VERDADERA.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre integrales impropias y su tratamiento con límites.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No reconoce que es integral impropia, ni que debe aplicar límites.	**Tiene problemas para seleccionar una técnica de integración apropiada.**	**O se equivoca en la integración o en la evaluación o no concluye.**	**Integra y evalúa bien e indica el valor de verdad de la proposición.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

3) (4 PUNTOS) En la figura se muestra la gráfica de la derivada de una función de variable real f' cuyo dominio es el intervalo $[a, d]$.



Con base en lo proporcionado y justificando su respuesta, complete las siguientes proposiciones para que sean verdaderas:

a) La función f es estrictamente decreciente en el intervalo $[\quad,\quad]$

Solución:

La gráfica dada corresponde a la primera derivada f' y se cumple que:

$$\forall x \in [a, d]\,, \qquad f'(x) < 0$$

Esto se da para las funciones monótonas decrecientes. Por lo que:

$\therefore$ **L**a función f es estrictamente decreciente en el intervalo $[a, d]$.

b) La función f tiene puntos de inflexión en $x =$ y $x =$

Solución:

Para identificar puntos de inflexión, se requiere que $f''(x) = 0$ o que $f''(x)$ no exista y que se produzcan cambios de concavidad a un lado y al otro de dichos puntos. En este caso, dado que la segunda derivada es la derivada de la primera derivada, en la gráfica se observan dos puntos para los cuales la derivada de esta primera derivada es igual a cero (pendientes de rectas tangentes horizontales). Además, la derivada antes y después de estos puntos experimenta cambios en su monotonía, originándose cambios de signo en la segunda derivada de la función. Por lo tanto:

$\therefore$ La función f tiene puntos de inflexión en $x = b$ y $x = c$.

Rúbrica del literal a):

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre el criterio de la primera derivada para determinar la monotonía de una función.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra asociar los datos proporcionados en la gráfica.		**Se refiere al criterio de la primera derivada pero no puede concluir sobre el intervalo de monotonía.**	**Justifica y concluye bien sobre los extremos del intervalo de monotonía decreciente de la función.**
	0		**1**	**2**

Rúbrica del literal b):

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante conoce sobre el criterio de la segunda derivada para determinar puntos de inflexión.</td><td>Insuficiente</td><td>En desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td colspan="2">No logra asociar los datos proporcionados en la gráfica.</td><td>Se refiere a los criterios de la segunda y la primera derivada pero no puede concluir sobre los puntos de inflexión.</td><td>Justifica y concluye bien sobre los puntos de inflexión de la función.</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

4) **(14 PUNTOS) Obtenga las antiderivadas solicitadas:**

a) **(7 PUNTOS)** $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{x^3+3x^2-5x-3}}{\boldsymbol{x^3-x}}\,\boldsymbol{dx}$

Solución:

Como el integrando es una función racional impropia, debemos realizar la división de polinomios:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2-5x-3 & x^3-x \\ \cline{2-2}
-x^3 \qquad\quad +x & 1 \\ \cline{1-1}
3x^2-4x-3 &
\end{array}
$$

La función racional se puede expresar así:

$$\frac{x^3+3x^2-5x-3}{x^3-x}=1+\frac{3x^2-4x-3}{x^3-x}$$

Aplicamos la PROPIEDAD DE LINEALIDAD de las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x^3+3x^2-5x-3}{x^3-x}\,dx=\int dx+\int \frac{3x^2-4x-3}{x^3-x}dx$$

Utilizaremos la técnica de descomposición en FRACCIONES PARCIALES para el segundo término:

$$\frac{3x^2-4x-3}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

Luego:

$$3x^2-4x-3=A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)$$

$$
\begin{array}{lllll}
x=0 & \rightarrow & -3=A(1)(-1)+0+0 & \rightarrow & A=3 \\
x=-1 & \rightarrow & 4=0+B(-1)(-2)+0 & \rightarrow & B=2 \\
x=1 & \rightarrow & -4=0+0+C(1)(2) & \rightarrow & C=-2
\end{array}
$$

Entonces:

$$\int \frac{x^3+3x^2-5x-3}{x^3-x}\,dx = \int dx + \int \frac{3\,dx}{x} + \int \frac{2\,dx}{x+1} + \int \frac{-2\,dx}{x-1}$$

Por lo que:

$$\boxed{\int \frac{x^3+3x^2-5x-3}{x^3-x}\,dx = x + 3\,ln|x| + 2\,ln|x+1| - 2\,ln|x-1| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{x^3+3x^2-5x-3}{x^3-x}\,dx = x + ln\left|x^3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right| + C}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, la propiedad de linealidad y la antiderivada de funciones racionales.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar.	**No divide correctamente los polinomios pero logra identificar la técnica de integración que debe aplicar.**	**Divide bien los polinomios, descompone en fracciones parciales, resuelve el sistema de ecuaciones, pero no aplica bien la propiedad de linealidad de las integrales o no integra bien algún término.**	**Divide bien los polinomios, descompone en fracciones parciales, resuelve el sistema de ecuaciones, aplica la propiedad de linealidad, integra bien cada término y especifica la constante.**
	0	**1 – 2**	**3 – 5**	**6 – 7**

b) (7 PUNTOS) $\displaystyle \int \left(e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} + arc\ sen(x)\right) dx$

Aplicamos la PROPIEDAD DE LINEALIDAD de las integrales indefinidas:

$$\int \left(e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} + arc\ sen(x)\right) dx = \int e^{-2x}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} + $$
$$+ \int arc\ sen(x)\,dx$$

Resolvemos cada integral:

- Aplicamos la Técnica de Sustitución:

  Sea $u = -2x \quad \rightarrow \quad du = -2\,dx$

  $$\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{2}e^{u} + C_1 = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1$$

- Aplicamos la Técnica de Sustitución:

  Sea $u = 2x \quad \rightarrow \quad du = 2\,dx$

  $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-u^2}} = \frac{1}{2}arc\ sen\left(\frac{u}{3}\right) + C_2 = \frac{1}{2}arc\ sen\left(\frac{2x}{3}\right) + C_2$$

- Aplicamos la Técnica de Integración Por Partes:

  $$u = arc\ sen(x) \qquad dv = dx$$
  $$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = x$$

  $$\int arc\ sen(x)\,dx = x\ arc\ sen(x) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

  Consideramos el cambio de variable:

  $$u = 1 - x^2 \quad \rightarrow \quad du = -2x\,dx$$

  $$\int arc\ sen(x)\,dx = x\ arc\ sen(x) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = x\ arc\ sen(x) + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right) + C_3$$

  $$\int arc\ sen(x)\,dx = x\ arc\ sen(x) + \sqrt{1-x^2} + C_3$$

$$\boxed{\int\left(e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} + arc\ sen(x)\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}arc\ sen\left(\frac{2x}{3}\right) + x\ arc\ sen(x) + \sqrt{1-x^2} + C}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante aplica la técnica de integración por partes y por sustitución, conoce la derivada de funciones trigonométricas inversas y la antiderivada de funciones exponenciales.	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar.	Aplica la propiedad de linealidad e integra correctamente utilizando un cambio de variable y solamente integra bien uno de los tres términos del integrando.	Aplica linealidad e integra correctamente utilizando un cambio de variable y sustitución trigonométrica dos de los tres términos del integrando.	Aplica linealidad e integra correctamente utilizando cambio de variable, sustitución trigonométrica e integración por partes los tres términos del integrando y considera la constante C en la antiderivada.
	0	1 – 2	3 – 5	6 – 7

5) **(5 PUNTOS) El agua que se está filtrando crea un charco circular con un área que aumenta a razón de $3\ [pulg^2/min]$. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule cuán rápido está aumentando la longitud del radio del charco cuando éste mide $10\ [pulg]$.**

Solución:

Al tratarse de un charco circular, requerimos el área de un círculo:

$$A = \pi r^2$$

Obtenemos la razón de cambio correspondiente, derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{2\pi r}$$

Evaluamos:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=10\ [pulg]} = \frac{3\ [pulg^{\cancel{2}}/min]}{2\pi(10)\ [\cancel{pulg}]}$$

$$\boxed{\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=10\ [pulg]} = \frac{3}{20\pi}\ [pulg/min]}$$

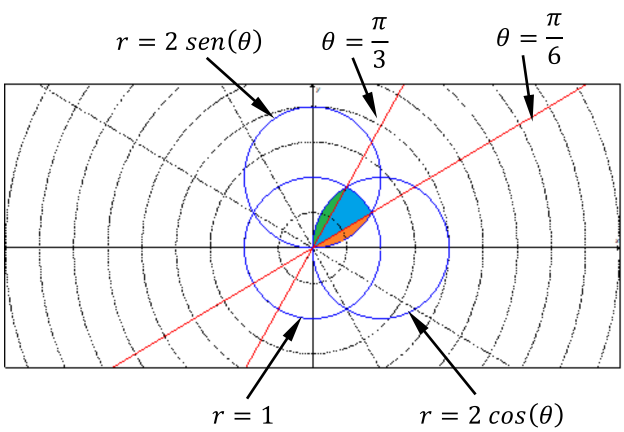
Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante plantea y resuelve bien un problema de razón de cambio.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra interpretar la situación geométrica especificada.	Interpreta geométricamente el problema y plantea bien el área del círculo; pero, o no deriva bien, o no despeja correctamente la razón de cambio.	Plantea bien la razón de cambio, deriva y despeja bien; pero no evalúa los datos proporcionados en forma adecuada.	Plantea y resuelve bien el problema de razón de cambio especificando las unidades correctas.
	0	1 – 2	3 – 4	5

6) **(7 PUNTOS) Bosqueje las curvas $r = 1$, $r = 2\,cos(\theta)$ y $r = 2\,sen(\theta)$ en el plano polar y calcule el área definida por la región común entre ellas.**

Solución:

Debemos identificar la región común entre las tres curvas:



Los puntos de intersección entre las curvas, los podemos determinar resolviendo las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$1 = 2\,sen(\theta) \qquad sen(\theta) = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\cancel{2}\,sen(\theta) = \cancel{2}\,cos(\theta) \qquad tan(\theta) = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$1 = 2\,cos(\theta) \qquad cos(\theta) = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Podemos calcular el área dividiendo la región común en tres partes:

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(2\, sen(\theta)\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\, cos(\theta)\right)^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left[4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} sen^2(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta + 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2(\theta) d\theta\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - cos(2\theta)}{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta + 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos(2\theta)}{2} d\theta\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[4\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sen(2\theta)\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}} + \theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + 4\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} sen(2\theta)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \left(2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)\ \ [u^2]}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica la región común entre curvas polares en forma analítica y en forma gráfica; y, con la aplicación de integrales definidas calcula su área.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar bien cómo se grafican las curvas o no sabe plantear el área como la suma de integrales definidas.	**Grafica las curvas e identifica sus puntos de intersección, pero no grafica bien la región común o no plantea bien el área como la suma de integrales definidas.**	**Grafica correctamente la región con base en los puntos de intersección, no conoce cómo integrar todas las expresiones o no evalúa bien todos los términos.**	**Grafica correctamente la región con base en los puntos de intersección, integra todas las expresiones que se presentan y evalúa bien cada término.**
	0	**1 – 2**	**3 – 6**	**7**

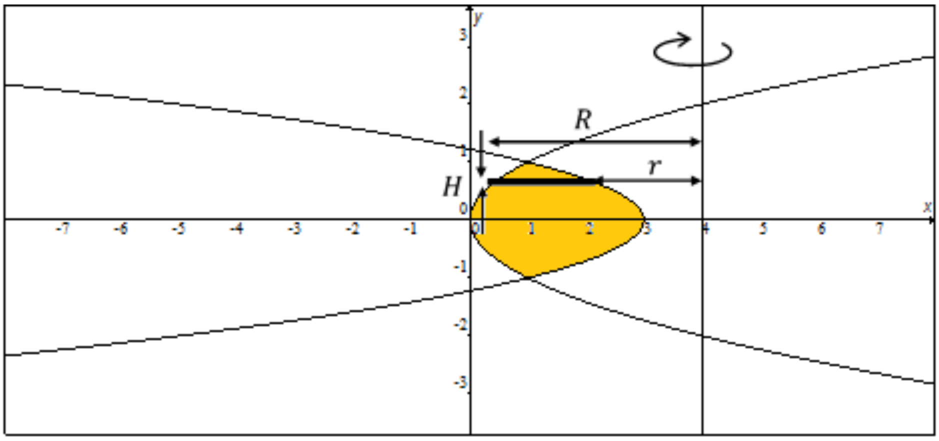
7) (7 PUNTOS) Sea $\boldsymbol{R}$ la región definida por:

$$\boldsymbol{R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 \leq x \leq 3 - 2y^2 \}}$$

Bosqueje $\boldsymbol{R}$ en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar $\boldsymbol{R}$ alrededor de la recta $\boldsymbol{x = 4}$.

Solución:

Se bosqueja la gráfica de la región:



Se utilizará el MÉTODO DE LAS ARANDELAS, en donde:

$$R = (4 - y^2)\ [u] \qquad \wedge \qquad r = \left(4 - (3 - 2y^2)\right) = (1 + 2y^2)\ [u] \quad \wedge \quad H = dy$$

Se identifican los puntos comunes de ambas curvas:

$$y^2 = 3 - 2y^2 \ \rightarrow \ 3y^2 = 3 \ \rightarrow \ y^2 = 1 \ \rightarrow \ |y| = 1 \ \rightarrow \ (y = 1) \vee (y = -1)$$

$$\therefore \ (1, 1) \ \wedge \ (1, -1) \ \text{son los puntos de intersección.}$$

Debido a la característica gráfica de la parábola se aplicará la propiedad de simetría:

$$Volumen = 2\left[\pi \int_0^1 (R^2 - r^2)\, H\right] = 2\left[\pi \int_0^1 \left((4 - y^2)^{\,2} - (1 + 2y^2)^2\right) dy\right]$$

$$= 2\pi \left[\int_0^1 \left(16 - 8y^2 + y^4 - (1 + 4y^2 + 4y^4)\right) dy\right]$$

$$= 2\pi \left[\int_0^1 (15 - 12y^2 - 3y^4)\, dy\right] = 2\pi \left(15y - 4y^3 - \frac{3y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$Volumen = 2\pi\left(15 - 4 - \frac{3}{5}\right) = 2\pi\left(11 - \frac{3}{5}\right) = 2\pi\left(\frac{52}{5}\right)$$

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución generado es:

$$\boxed{Volumen = \frac{104\pi}{5} \ \ [u^3]}$$

También se puede considerar una integración con el Método de las Capas Cilíndricas, pero el resultado será el mismo.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica una región acotada por dos parábolas, el sólido de revolución que se forma y mediante cálculo integral obtiene su volumen.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.	**Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución.**	**Identifica la región a integrar, plantea la expresión del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.**	**Identifica la región a integrar, plantea la expresión del volumen, integra bien cada término y expresa el resultado correcto.**
	0	**1 – 2**	**3 – 6**	**7**