Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: 2019	PERIODO: PRIMERO
MATERIA: **CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES**	PROFESOR:
EVALUACIÓN: SEGUNDA	
TIEMPO DE DURACIÓN: 2 Horas	FECHA: AGOSTO 26 DE 2019

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que no puedo usar calculadora; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: __________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** __________________ ***PARALELO:*** ________

PRIMER TEMA (20 puntos)

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones; en caso de ser verdaderas, justifíquelas formalmente; caso contrario, desarrolle un contraejemplo:

a) Considere un campo vectorial conservativo $\vec{F}(x,y)$; en la figura 1, $\int_{C_1} \vec{F}(x,y)\cdot dr = \lambda, \lambda \in R$ desde el punto A al punto B, y , $\int_{C_2} \vec{F}(x,y)\cdot dr = -\lambda, \lambda \in R$, desde el punto B al punto A. Note la simetría del problema (C_2 es la semielipse opuesta de C_1).

Figura 1

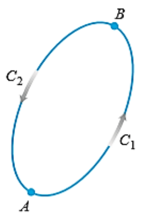
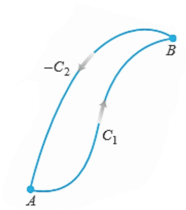


Figura 2



Si en la figura 2, $\int_{C_1} \vec{F}(x,y)\cdot dr = \beta, \beta \in R$ desde el punto A al punto B entonces , $\int_{-C_2} \vec{F}(x,y)\cdot dr = -\beta,\ \beta \in R$ desde el punto B al punto A.

VERDADERO

Para todo campo conservativo $\vec{F}(x,y)$, se cumple que $\int_C \vec{F}(x,y)\cdot dr = 0$

Si C es toda la trayectoria de la figura 2, entonces C es cerrado y es la unión de las trayectorias C_1 y $-C_2$, por lo tanto:

$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot dr = \int_{C_1} \vec{F}(x,y)\cdot dr + \int_{-C_2} \vec{F}(x,y)\cdot dr = \beta + \int_{-C_2} \vec{F}(x,y)\cdot dr = 0$$

Entonces: $\int_{-C_2} \vec{F}(x,y)\cdot dr = -\beta,\ \beta \in R$

b) $\vec{F}(x,y,z) = sen(x)\, e^{z}\, \hat{\imath} + xy\, \hat{\jmath} - \cos(x)\, e^{z}\, \hat{k}$**, representa un campo vectorial conservativo.**

FALSO

$$Rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz} \\ sen(x)e^{z} & xy & -\cos(x)e^{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d(-\cos(x)\, e^{z})}{dy} - \dfrac{d(xy)}{dz} \\ -\dfrac{d(-\cos(x)\, e^{z})}{dx} + \dfrac{d(sen(x)e^{z})}{dz} \\ \dfrac{d(xy)}{dx} - \dfrac{d(sen(x)e^{z})}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

c) **Dada la región** $R = \left\{(x,y) \in R^{2}; \frac{x^{2}}{16} + \frac{y^{2}}{9} \leq 1\right\}$**, utilizando el teorema de Green se obtiene que el área de la superficie de R es igual a** $12\pi\, u^{2}$.

VERDADERO

$C: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\, sent \end{cases}; t \in R$

$dx = -4\, sen\, t\, dt$
$dy = 3\cos t\, dt$

$$A = \frac{1}{2}\oint_{C} x\, dy - y\, dx$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_{C} (4\, cost)(3\, cost)\, dt - (3\, sen\, t)\, (-4\, sen\, t\, dt)$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_{0}^{2\pi} 12\, cos^{2}t\, dt + 12\, sen^{2}t\, dt$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_{0}^{2\pi} 12\, (cos^{2}t \,+\, sen^{2}t)dt$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_{0}^{2\pi} 12\, dt = 12\,\pi\, u^{2}$$

d) El valor de $\iiint_Q z^2 dV$ donde Q es la región sólida que yace arriba del cono $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ es igual a $\frac{5505}{32}\pi\, u^3$

FALSO

Usamos coordenadas esféricas, en cuyo caso el cono $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ tiene como ecuación:

$$\rho\, cos\varphi = \sqrt{3}\,\rho\, sen\varphi \leftrightarrow tg\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}\ rad$$

La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ tiene ecuación esférica: $\rho^2 = 6\rho\, cos\varphi \leftrightarrow \rho = 6\, cos\varphi$

Por lo tanto,

$$\iiint_Q z^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{6\, cos\varphi} (\rho^2\, cos^2\varphi)(\rho^2\, sen\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \frac{6^5}{5}\, cos^7\varphi\, sen\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-7776}{40}\ cos^8\varphi\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/6} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{972}{5}\left(1 - \frac{81}{256}\right) d\theta$$

$$= \frac{972}{5}\left(\frac{175}{28}\right)\pi = \frac{8505}{32}\ \pi$$

SEGUNDO TEMA (6 puntos)

Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 81$, que estén más distantes y más cercanos del punto P (2,1,2). Hallar las respectivas distancias.

Buscamos los extremos de $\begin{cases} F.O: & f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \\ Restricción: & g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 81 \end{cases}$

Como la esfera es una superficie cerrada y acotada, el teorema de del valor extremo nos asegura que la función anterior restringida a la esfera tiene un punto máximo y uno mínimo. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-2) = 2\lambda x \;\; (1) \\ 2(y-1) = 2\lambda y \;\; (2) \\ 2(z-2) = 2\lambda z \;\; (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 81 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{x-2}{x}, \qquad \lambda = \; . \;\; \lambda = \frac{z-2}{z}$$

$$\frac{x-2}{x} = \frac{y-1}{y} \quad y \quad \frac{y-1}{y} = \frac{z-2}{z}$$

$$Como\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \ \ no\ satistacen\ (1), (2)\ y\ (3)\ respectivamente$$

$$\Rightarrow \; x = 2y\,, \quad z = 2y$$

Reemplazando en la restricción tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + y^2 + 4y^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 3$$

$$Si\ \ y = 3 \;\; \rightarrow \;\; P_1 = (6,3,6), \qquad si\ \ y = -3 \;\; \rightarrow \;\; P_1 = (-6,-3,-6)$$

Para hallar el punto más cercano y más lejano de la esfera la punto P(2,1,2) evaluamos los puntos hallados en la función objetivo.

$$f(P_1) = f(6,3,6) = 36\,u.$$

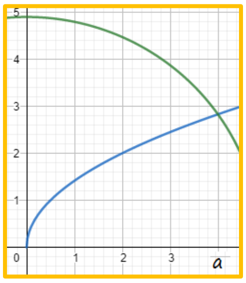
$$f(P_2) = f(-6,-3,-6) = 144\,u.$$

Entonces: $D\min = 6\,u.$ $\;y\; D\max = 12\,u.$

El punto más cercano es P_1 y el más lejano es el punto P_2

TERCER TEMA (8 puntos)

Dada la siguiente integral doble $\int_0^{2a}\int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{6a^2-x^2}} 2xy\,dy\,dx$, **cambie el orden de integración y luego evalúela.**



$y=\sqrt{6a^2-x^2}$ e $y=\sqrt{ax}$, hacemos

$$\sqrt{6a^2-x^2}=\sqrt{ax}$$

$$x^2+ax-6a^2=0 \Rightarrow x=\frac{-a\pm 5a}{2} \Rightarrow x=2a \quad \vee \quad x=-3a$$ (se descarta, ver límites de la primera integral)

Despejando x en función de y, tenemos

$y=\sqrt{ax} \rightarrow x=\dfrac{y^2}{a}$ con $x=2a$ tenemos $y=a\sqrt{2}$

Por lo tanto el nuevo dominio 1 es

$$D_1=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 0\le x\le \frac{y^2}{a}, 0\le y\le a\sqrt{2}\right\}$$

Con la otra curva:

$$y=\sqrt{6a^2-x^2} \rightarrow x=\sqrt{6a^2-y^2}$$

$$x=0 \rightarrow y=a\sqrt{6}$$

El otro dominio será

$$D_1=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 0\le x\le \sqrt{6a^2-y^2}, a\sqrt{2}\le y\le a\sqrt{6}\right\}$$

Luego el cambio de integración implica que con

$$D=D_1\cup D_2\; I=\int_0^{2a}\int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{6a^2-x^2}} 2xydydx=\int_0^{a\sqrt{2}}\int_0^{\frac{y^2}{a}} 2xydxdy+\int_{a\sqrt{2}}^{a\sqrt{6}}\int_0^{\sqrt{6a^2-y^y}} 2xydxdy$$

Resolviendo la integral, tenemos:

$$I = \int_0^{a\sqrt{2}} y[x^2]_0^{\frac{y^2}{a}} dy + \int_{a\sqrt{2}}^{a\sqrt{6}} y[x^2]_0^{\sqrt{6a^2-y^2}} dy$$

$$I = \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{y^5}{a^2} dy + \int_{a\sqrt{2}}^{a\sqrt{6}} y\left[6a^2 - y^2\right] dy = \frac{1}{6a^2} 8a^6 + 3a^2 \cdot 4a^2 - \frac{1}{4} \cdot 32a^4 = \frac{16}{3} a^4$$

Por lo tanto:

$$I = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{6a^2-x^2}} 2xydydx = \frac{16a^2}{3}$$

CUARTO TEMA (8 puntos)

Utilizando integrales triples y luego un cambio de sistema adecuado, calcule el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 + z^2 = 25\ ;\ x^2 + y^2 = z^2; z \geq 0$.

Como $z \geq 0$, entonces trabajamos con la parte positiva del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y de la esfera $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

La intersección de $x^2 + y^2 = 9$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ será $z = \sqrt{9} = 3$

La intersección de $x^2 + y^2 = 9$ y $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ será $z = \sqrt{25 - 9} = 4$

$$V = \int\int\int dv = \int\int_D \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\, dA = \int_D\int \sqrt{25 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\ dA.$$

Cambio de Variable

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$0 \leq r \leq 3$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(\sqrt{25 - r^2} - \sqrt{r^2}\right) r\, dr\, d\theta$$

$$2\pi \int_0^3 \sqrt{25 - r^2}\, r\, dr - \int_0^3 r^2\ dr$$

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{25 - r^2}(-2r)\, dr - \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3$$

$$\mu = 25 - r^2$$

$$d\mu = 2r\, dr$$

$$\int \sqrt{\mu}\ d\mu - 9$$

$$-\frac{1}{2}\, 2\frac{\mu^{3/2}}{3} - 9$$

$$\left.\frac{-(25 - r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^3 - 9$$

$$2\pi\left(\left[-\frac{(25-9)^{3/2}}{3}+\frac{25^{3/2}}{3}\right]-9\right)$$

$$2\pi\left(\left[\frac{(\sqrt{25})^3-(\sqrt{16})^3}{3}\right]-9\right)$$

$$2\pi\left(\left[\frac{125-64}{3}\right]-9\right)$$

$$\frac{2\pi\ (34)}{3}=\frac{68\pi}{3}\ u^3$$

QUINTO TEMA (8 puntos)

Utilizando el teorema de Stokes, calcule la integral $\int_C (y-z)dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, siendo C la curva dada por las ecuaciones $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

Sabemos que $\int_C \boldsymbol{F \cdot N\, dr} = \iint_S \boldsymbol{rot\, F \cdot N\, dS}$. Calculemos el $\boldsymbol{rot\, F}$:

$$\boldsymbol{rot\, F(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = (-2,-2,-2).$$

Para calcular el flujo consideremos como superficie la porción de paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + 4y^2 = 1$.

Parametrizamos dicha superficie:

$$\boldsymbol{r}: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ dada por } \boldsymbol{r(x,y)} = \left(\boldsymbol{x, y,\ x^2 + y^2}\right),$$

así, $S = r(D)$ donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x^2 + 4y^2 \leq 1\right\}$.

El vector normal: $N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (\boldsymbol{-2x, -2y,\ 1})$.

$$\int_C \boldsymbol{F \cdot N\, dr} = \iint_S \boldsymbol{rot\, F \cdot N\, dS} = \iint_S \boldsymbol{rot\, F\big(r(x,y)\big) \cdot N(x,y)\, dx\, dy}$$

$$= \iint_D \boldsymbol{(4x + 4y - 2)\, dx\, dy}$$

$$= \iint_D \boldsymbol{(4x + 4y)\, dx\, dy - 2 \iint_D dx\, dy}$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}}^{\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}} \boldsymbol{(4x + 4y)\, dy\, dx - 2 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}}^{\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}} dy\, dx}$$

$$= \int_{-1}^{1} \boldsymbol{4x\sqrt{1-x^2}\ dx - \pi}$$

$$= \boldsymbol{-\pi}$$