FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2019	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Baquerizo G., Brito W., Chóez M., Cifuentes C., Córdova N., Crow P., Díaz R., García E., Mejía M., Ramos M., Ramos P., Ronquillo C., Toledo X.
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	01/julio/2019

1. (12 PUNTOS) Obtenga la EXPRESIÓN SIMPLIFICADA para $\frac{dy}{dx}$ en cada literal:

a) (2 PUNTOS) $y = xe^x$

$$\frac{dy}{dx} = x(e^x) + (1)e^x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = e^x(x+1)}$$

Rúbrica del literal 1.a):

Capacidades deseadas	**Desempeño**		
El estudiante sabe derivar un producto de funciones, la función lineal y la función exponencial.	**Inicial**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo derivar.	**Obtiene la derivada, pero no factoriza.**	**Obtiene la derivada y la descompone con base en su factor común.**
	0	**1**	**2**

b) (2 PUNTOS) $y = ln\big(sen(x)\big)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sen(x)} \cdot cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = cot(x)}$$

Rúbrica del literal 1.b):

Capacidades deseadas	**Desempeño**		
El estudiante sabe derivar la función logaritmo natural, aplicar la regla de la cadena y derivar la función trigonométrica seno.	**Inicial**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo derivar.	**Obtiene la derivada, pero no la reduce a su mínima expresión.**	**Obtiene la derivada y la reduce a su mínima expresión con base en la identidad cociente de la función cotangente.**
	0	**1**	**2**

c) (2 PUNTOS) $\boldsymbol{y = 2^{x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{x^2}\ ln(2) \cdot (2x) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = x\ ln(2)\ 2^{x^2+1}}$$

Rúbrica del literal 1.c):

Capacidades deseadas	**Desempeño**		
El estudiante sabe derivar una función exponencial, aplicar la regla de la cadena y derivar la función cuadrática.	**Inicial**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo derivar.	**Obtiene la derivada, pero no simplifica.**	**Obtiene la derivada y la simplifica con base en propiedades de la exponenciación.**
	0	**1**	**2**

d) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{y = (x+1)^{1-x}}$

$$ln(y) = ln(x+1)^{1-x}$$
$$ln(y) = (1-x)\ ln(x+1)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = (-1)\ ln(x+1) + (1-x)\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = y\left(-\ ln(x+1) + \frac{1-x}{x+1}\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (x+1)^{1-x}\left(\frac{1-x}{x+1} - ln(x+1)\right)}$$

e) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{tan(xy) = \frac{x}{y}}$

$$sec^2(xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$
$$y\ sec^2(xy) + x\ sec^2(xy)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}$$
$$y^3 sec^2(xy) + xy^2 sec^2(xy)\frac{dy}{dx} = y - x\frac{dy}{dx}$$
$$xy^2 sec^2(xy)\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = y - y^3 sec^2(xy)$$
$$x\frac{dy}{dx}(y^2 sec^2(xy) + 1) = y\big(1 - y^2 sec^2(xy)\big)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y\big(1 - y^2 sec^2(xy)\big)}{x(1 + y^2 sec^2(xy))}}$$

Rúbrica de los literales 1.d) y 1.e):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre derivación logarítmica (o implícita), regla de la cadena, regla de la potencia, de la función trigonométrica tangente, logaritmo natural y de un producto (o un cociente) de funciones.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo derivar.	**Se equivoca en la derivación de alguno de los términos.**	**Deriva bien cada término pero no despeja bien la expresión de la derivada.**	**Deriva bien todos los términos y expresa bien la derivada.**
	0	**1**	**2**	**3**

2. (6 PUNTOS) Especifique el TIPO DE INDETERMINACIÓN y luego CALCULE::

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{tan(3x) - sen(3x)}}{\boldsymbol{x^3}}$$

Al aplicar el TEOREMA DE SUSTITUCIÓN se verifica que:

$$\frac{0-0}{0^3} = \frac{0}{0} \ \ (INDETERMINADO)$$

Se procede a calcular el límite:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen(3x)}{cos(3x)} - sen(3x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen(3x) - sen(3x)\,cos\,(3x)}{x^3\,cos(3x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)(1 - cos(3x))}{x^3\,cos(3x)}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{sen\,(3x)}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(3x)}{x^2}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{cos\,(3x)}\right)$$

$$= \left(3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{3x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(3x)}{x^2} \cdot \frac{1 + cos(3x)}{1 + cos(3x)}\right)(1)$$

$$= (3)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2(3x)}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + cos(3x)}\right) = 3\left(\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(3x)}{x^2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}(9) \lim_{x \to 0} \frac{sen^2(3x)}{9x^2} = \frac{27}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{3x}\right)^2 = \frac{27}{2}(1)^2$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{tan(3x) - sen(3x)}{x^3} = \frac{27}{2}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante identifica el tipo de indeterminación, aplica límites notables, identidades trigonométricas, el teoreme principal de límites y el teorema de sustitución.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra identificar el tipo de indeterminación y tampoco resuelve el límite.	Identifica el tipo de indeterminación, pero no identifica que debe aplicar límites notables trigonométricos.	Identifica el tipo de indeterminación y límites notables trigonométricos, pero no los resuelve bien.	Identifica el tipo de indeterminación, límites notables trigonométricos y los resuelve correctamente.
	0	1 – 2	3 – 4	5 – 6

3. (6 PUNTOS) Considere las funciones $f: X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g: X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Justificando su respuesta, establezca si la proposición dada es VERDADERA o FALSA.

"f y g son funciones continuas en $x = c$, solamente si la función cociente $\frac{f}{g}$ siendo $g(c) \neq 0$ también es continua en $x = c$."

En caso de ser VERDADERA, demuéstrela; y, en caso de ser FALSA, proporcione un contraejemplo.

Debe recordarse que la condicional de proposiciones expresada en forma simbólica $a \to b$ se traduce como "$a\ solamente\ si\ b$". La proposición especificada corresponde al TEOREMA DE CONTINUIDAD EN OPERACIONES CON FUNCIONES. A continuación se presenta la demostración.

Dado que las funciones f y g son continuas en $x = c$, se cumple que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

Aplicando la definición de función cociente y el TEOREMA PRINCIPAL a esta función:

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(c)}{g(c)}\ ;\ g(c) \neq 0$$

Esto permite concluir que se cumple la definición de continuidad para la función cociente:

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(c)$$

$$\boxed{\therefore \quad La\ proposición\ es\ VERDADERA.}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce la definición y las propiedades de la continuidad de funciones de variable real.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Indica que la proposición es falsa.	**Aplica la definición de continuidad para las funciones f y g, pero no conoce del teorema principal.**	**Aplica la definición de continuidad para las funciones f y g, y para la función cociente, conoce del teorema principal, pero no concluye.**	**Proporciona una demostración clara y concluye que la proposición es verdadera.**
	0	**1 – 2**	**3 – 5**	**6**

4. (5 PUNTOS) Calcule $(f^{-1})'(2)$ para la función $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = 3 - log_2(x)}$$

Se determina la abscisa correspondiente de la función original:

$$3 - log_2(x) = 2$$
$$log_2(x) = 3 - 2$$
$$log_2(x) = 1$$
$$\therefore x = 2$$

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{x\, ln(2)}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x\, ln(2)}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{-\left.\frac{1}{x\, ln\,(2)}\right|_{x=2}}$$

$$(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{\frac{1}{2\, ln(2)}}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(2) = -2\, ln(2)}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante aplica correctamente el teorema de la derivada de las funciones inversibles.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra realizar la derivada de la función original, ni la de su función inversa.	**Deriva correctamente la función original, pero no determina correctamente la abscisa a evaluar.**	**Aplica correctamente el teorema de la derivada de las funciones inversibles y determina la abscisa, pero se equivoca al evaluar.**	**Deriva la función inversa y expresa correctamente el valor solicitado.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5**

5. **(7 PUNTOS) Determine la ecuación de la ASÍNTOTA HORIZONTAL correspondiente a la función $\boldsymbol{f}: [2, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es:**

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}\right)}$$

Por definición:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \qquad \Leftrightarrow \qquad y = a \quad es\ una\ asíntota\ horizontal.$$

Entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\left(\cancel{\sqrt{}}x+3\right)^{\cancel{2}} - \left(\cancel{\sqrt{}}x-2\right)^{\cancel{2}}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\cancel{x} + 3 - (\cancel{x} - 2)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}}$$

$$= 5 \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x}} + \sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

$$= 5 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$= 5\left(\frac{1}{1+1}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{5}{2} \;\; es\ la\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ gráfica\ de\ la\ función\ f.}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe determinar la asíntota horizontal de una función de variable real con la aplicación de un límite al infinito.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo se obtiene una asíntota horizontal.	Sabe que debe aplicar el límite al infinito, pero tiene inconvenientes en la racionalización o en la evaluación.	Sabe que debe aplicar el límite al infinito, racionaliza bien pero evalúa mal al aplicar el teorema principal.	Sabe que debe aplicar el límite al infinito, racionaliza bien, evalúa correctamente y concluye sobre la ecuación de la asíntota horizontal.
	0	1 – 2	3 – 5	6 – 7

6. **(7 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:**

$$f(x) = (x^3 + 9)^{15}(x^2 - 3)^{12}$$

Determine la ecuación de la recta normal L, en la forma $y = ax + b$, para la función f cuando $x = -2$.

Se obtiene la ordenada correspondiente:

$$f(-2) = (-8+9)^{15}(4-3)^{12} = (1)(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(-2,1) \in f$$

Se obtiene la derivada:

$$f'(x) = 15(x^3+9)^{14}(3x^2)(x^2-3)^{12} + 12(x^3+9)^{15}(x^2-3)^{11}(2x)$$
$$f'(x) = 3x(x^3+9)^{14}(x^2-3)^{11}[15x(x^2-3)+8(x^3+9)]$$

Se obtiene la pendiente de la recta tangente:

$$m_T = f'(-2) = 3(-2)(1)(1)[15(-2)(1)+8(1)]$$
$$m_T = -6(-30+8) = -6(-22) = 132$$

Se obtiene la pendiente de la recta normal:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{132}$$

Se obtiene la ecuación de la recta normal:

$$y - 1 = -\frac{1}{132}(x+2)$$
$$y = -\frac{1}{132}x - \frac{1}{66} + 1$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{132}x + \frac{65}{66}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar el producto de funciones polinomiales y obtener la ecuación de la recta normal a partir de la pendiente de la recta tangente.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No obtiene la ordenada, ni la pendiente de la recta tangente.	**Obtiene correctamente la ordenada, pero no deriva bien para obtener la pendiente de la recta tangente.**	**Obtiene correctamente la ordenada, la pendiente de la recta tangente y la pendiente de la recta normal.**	**Obtiene correctamente la ordenada, la pendiente de la recta tangente, la pendiente de la recta normal y su ecuación en la forma solicitada.**
	0	**1 – 2**	**3 – 5**	**6 – 7**

7. (7 PUNTOS) Dada la curva en coordenadas paramétricas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2} \\ \boldsymbol{y(t) = \frac{1}{2}t^8 + 2t^7} \end{cases}$$

Obtenga:

$$\left.\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}}\right|_{x=\frac{4}{3}}$$

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^7 + 14t^6}{2t^2} = \frac{\cancel{2}t^{\cancel{6}\,4}(2t+7)}{\cancel{2t^2}} = t^4(2t+7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2t^5 + 7t^4$$

Se obtiene la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{10t^4 + 28t^3}{2t^2} = \frac{\cancel{2}t^{\cancel{3}}(5t+14)}{\cancel{2t^2}} = t(5t+14)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5t^2 + 14t$$

Se obtiene el valor de t_0 en el cual se evaluará la derivada:

$$x_0 = \frac{4}{3} = \frac{2}{3}t_0^3 + 2$$

$$\frac{2}{3}t_0^3 = \frac{4}{3} - 2$$

$$\cancel{\frac{2}{3}}t_0^3 = -\cancel{\frac{2}{3}}$$

$$t_0^3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = -1$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{4}{3}} = 5(-1)^2 + 14(-1) = 5 - 14$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{4}{3}} = -9}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre derivadas de orden superior y las aplica en ecuaciones paramétricas.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No conoce sobre derivadas de orden superior o derivación paramétrica.	Realiza bien la primera derivada pero se equivoca al obtener la segunda derivada.	Realiza bien la primera y la segunda derivada pero tiene problemas al simplificar.	Realiza bien la primera y la segunda derivada (con ambas expresiones simplificadas), obtiene el valor del parámetro y evalúa correctamente.
	0	1 – 2	3 – 5	6 – 7