2 Sucesiones

Objetivos:

Se pretende que el estudiante:

- Determine convergencia o divergencia de sucesiones.
- Analice Monotonía de sucesiones.
- Conozca las propiedades de la notación sigma.

2.1. SUCESIONES

2.1.1 DEFINICIÓN.

Sucesión es una función, denotada como $\{a_n\}$, cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y su rango son números reales. Es decir:

$$\begin{aligned} IN &\mapsto X \subseteq IR \\ n &\mapsto f(n) = a_n \end{aligned}.$$

Es común referirse al rango de la sucesión, por tanto la sucesión se presenta como una secuencia de términos $\{a_1, a_2, a_{3,}, \cdots\}$. Si la sucesión tiene una cantidad determinada de términos se la llamará SUCESIÓN FINITA. Si la sucesión tiene una cantidad no definida de términos, se la llamará SUCESIÓN INFINITA.

Ejemplo

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \cdots\right\}$$

La manera como se presentó la sucesión en el ejemplo anterior se denomina **forma explícita,** pero se la puede expresar como una **formula de recursión**.

Ejemplo

$a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + 3; n \geq 2$

Es decir:

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

Y así sucesivamente.

2.1.2 Convergencia y Límite

Una sucesión $\{a_n\}$, es convergente si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. Caso contrario; es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe, se dice que la sucesión es *divergente*.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, es decir si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, significa que:

$$\forall \xi > 0, \exists N > 0 \; talque \;\; n > N \Rightarrow |a_n - L| < \xi$$

Ejemplo.

Determinar si $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÖN:

Para determinar si es convergente o divergente se halla $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la sucesión es **convergente** y además converge a $1/2$

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente es que sea acotada.

Note que, para la sucesión anterior la **mínima cota superior** es $1/2$ y la **máxima cota inferior** es $1/3$.

PREGUNTA: ¿POR QUÉ SE DICE MÍNIMA COTA SUPERIOR? ¿POR QUÉ SE DICE MÁXIMA COTA SUPERIOR?

Ejemplo

Determinar si $\{a_n\} = \left\{n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ es convergente o divergente.

SOLUCION:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} \pi\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right]$$

Haciendo $u = \frac{\pi}{n}$ entonces, si $n \to \infty$ tenemos que $u \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \pi\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right] = \lim_{u\to 0} \pi\left[\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right] = \pi \lim_{u\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right] = \pi(1) = \pi .$$ Por tanto converge.

TEOREMA

Si a_n y b_n son sucesiones convergentes, entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n; \quad k \in IR$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

2.1.3 SUCESIONES MONOTONAS

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si sus términos son **no decrecientes**, es decir:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots;$$

ó si sus términos son **no crecientes**; es decir:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots.$$

Lo anterior quiere decir que si se cumple que $\boxed{a_n \leq a_{n+1}}$ o $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1}$ será una sucesión **CRECIENTE**. Caso contrario, es decir si da que $\boxed{a_n \geq a_{n+1}}$ o $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1}$ será una sucesión **DECRECIENTE**.

Ejemplo 1

Determinar si la sucesión $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ es creciente o decreciente.

SOLUCIÖN:

En este caso $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$

Al dividir ambas expresiones, resulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2n+3}}{\frac{n}{2n+1}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n}$$

note que en la última expresión se observa que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ¿Por qué?.

Por tanto, la sucesión será CRECIENTE.

Ejemplo 2

Analice la sucesión $a_n = 3 + (-1)^n$

SOLUCIÖN:
Desarrollando la sucesión tenemos

$$\{a_n\} = \left\{3 + (-1)^n\right\} = \{2,4,2,4,\cdots\}$$

Se observa que la sucesión no es monótona, no es convergente, si es acotada.

Ejemplo 3

Analice la sucesión $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

SOLUCIÖN:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$. El factorial es más creciente que la exponencial por tanto la sucesión converge a 0.

2. La sucesión es acotada debido a que es convergente.

3. $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Ahora $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \dfrac{2^n 2^1}{n!(n+1)} \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1}$

Se observa que para $n \geq 1$, $\boxed{\dfrac{2}{n+1} \leq 1}$ por tanto la sucesión es **decreciente**.

Ejercicios propuestos 2.1

1. Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes.

a. $\left\{\dfrac{3n^2+1}{2n^2-n}\right\}$	e. $\left\{\dfrac{2n+1}{3n^2-n}\right\}$
b. $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3n-1}\right\}$	f. $\left\{\dfrac{\ln n}{n^2}\right\}$
c. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right\}$	g. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\right\}$
d. $\left\{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n\right\}$	

2. Determine si las sucesiones son crecientes, decrecientes o no monótonas.

a. $\left\{\dfrac{3n-1}{4n+5}\right\}$	d. $\operatorname{sen}(n\pi)$
b. $\left\{\dfrac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$	e. $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$
c. $\left\{\dfrac{n!}{1\bullet 3\bullet 5\bullet\cdots\bullet(2n-1)}\right\}$	

2.2. SUMAS Y NOTACIÓN SIGMA

Sea la secuencia $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$.

La suma de estos números, puede ser expresada mediante una notación que denota abreviación, el símbolo empleado es el de sigma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Entonces, la notación sigma significa una suma de término, desde el primero hasta el n-ésimo. Podemos tener una suma finita de términos como también podemos tener una suma infinita.

Ejemplo 1

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{i^2+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{i=1} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{i=2} + \underbrace{\frac{3}{10}}_{i=3} + \underbrace{\frac{4}{17}}_{i=4}$$

Ejemplo 1

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

2.2.1 Propiedades

Sean $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ dos sucesiones y sea C una constante, entonces

1. $\sum_{i=1}^{n} Ca_i = C\sum_{i=1}^{n} a_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Alguna formulas que se necesitarán más adelante son:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

¡No olvide demostrarlas!